

Skriftlig tentamen på momentet statistisk teori, 5 poäng, ingående i
påbyggnadskurs i statistik.

Fredagen den 24 september, 1999

.....
Skrivtid: 4 timmar
Hjälpmedel: Tabeller över statistiska fördelningar. Studentlitteratur,
Lund, 1982.
Godkänd miniräknare.
Formelblad (vidhäftat).
Genomgång: Meddelas via anslagstavlan.

Alla lösningar skall vara väl motiverade.
.....

1. I en urna finns det 20 kulor varav 18 är röda och 2 är vita.

a) Låt X beteckna antalet dragningar *utan* återläggning till och med vi får
den andra vita kulan. Bestäm sannolikhetsfördelningen och väntevärdet
för X .

Ledning:

$$\sum_{k=1}^X k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Fru A och fru B drar varannan gång på måfå en kula ur urnan.
Dragningarna sker *med* återläggning. Den som först drar en vit kula vinner.
Bestäm sannolikheten att fru A vinner, givet att hon drar den första kulan.

2. X och Y är två simultant fördelade stokastiska variabler med täthets-
funktionen

$$f(x; y) = \frac{2x + y}{16} \quad (0 < x < 2; 1 < y < 3)$$

a) Bestäm den betingade täthetsfunktionen för X , för givet $Y = y$.

b) Bestäm den betingade variansen för X , för givet $Y = y$.

3. En stokastisk variabel X har momentgenererande funktionen $M(t)$ given av

$$M(t) = (1 - t)^{-1/2}; t < 1$$

a) Väntevärdet $E[X(X-1)(X-2)]$ är ett exempel på ett så kallat faktorialmoment. Beräkna värdet på detta.

b) Vad har X för fördelningsfunktion?

4. Farbror Sid äger en spelautomat och hävdar att den i varje spel ger vinst med sannolikheten $p = \frac{1}{2}$. Ernie betvivlar att p är så stort och genom att spela till dess han har vunnit för första gången, vill han pröva hypotesen $H_0: p = \frac{1}{2}$ mot $H_1: p < \frac{1}{2}$. Efter en stunds funderande bestämmer han sig för att förkasta nollhypotesen (H_0) om de sex första spelen inte har givit någon vinst.

a) Beräkna testets signifikansnivå α :

b) Bestäm testets styrkefunktion $K(p)$ och beräkna $K(1/4)$:

c) Antag att Ernie vinner för första gången i det 5:e spelet. Beräkna testets p -värde (p -value):

5. Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara n oberoende observationer av en stokastisk variabel X med täthetsfunktionen

$$f(x; \mu) = e^{-(x-\mu)}; (x \geq \mu)$$

a) Bestäm en estimator för parametern μ med maximumlikelihood-metoden.

b) Är maximumlikelihood-estimatoren en väntevärdesriktig estimator för skattning av μ ?