

Skriftlig tentamen på momentet **statistisk teori**, 5 poäng, ingående i
påbyggnadskurs i statistik

Onsdagen den 8 mars 2000

Skrivtid : 4 timmar
Hjälpmedel : Tabeller över statistiska fördelningar, Studentlitteratur,
Lund, 1982
Godkänd miniräknare
Formelblad (vidhäftat).
Genomgång : Meddelas via anslagstavlan

Alla lösningar skall vara väl motiverade.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade lösblad

1. Den tid (enhet: minuter) det tar för en terränglöpare att springa ett varv på en bana kan beskrivas med en stokastisk variabel X med frekvensfunktionen

$$f(x) = \frac{125 - x}{450} \quad \text{då } 95 \leq x \leq 125$$

Antag att fem löpare vars tider kan antas oberoende springer ett varv.

- a) Hur stor är sannolikheten att ingen av de fem löparna kommit i mål inom 100 minuter?
- b) Hur stor är sannolikheten att tre av de fem löparna kommit i mål inom 100 minuter ?
- c) Bestäm täthetsfunktionen för $Y = X^2$.
2. En myra befinner sig i en viss punkt. Myran vandrar X längdenheter åt öster, Y åt norr, och Z åt väster. Här är X , Y , och Z oberoende stokastiska variabler som var och en antar värdet 0 med sannolikheten $1/3$ och värdet 1 med sannolikheten $2/3$. Efter denna promenad befinner sig myran V ländenheter från utgångspunkten.
- a) Ange sannolikhetsfunktionen för V .
- b) Antag att myran dessutom (oberoende av de övriga stegen) går U längdenheter åt söder där U har samma fördelning som t ex X . Vilken sannolikhetsfunktion får i så fall V ?

3. Den stokastiska variabeln X har (kumulativ) fördelningsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

- a) Beräkna väntevärdet av X
 - b) Beräkna Medianen av X
 - c) Beräkna variansen av X
4. a) Låt X_1, X_2 vara ett stickprov på en stokastisk variabel X med Bernoulli fördelning med parameter θ . Låt $T_1 = X_1 X_2$, och $T_2 = X_1 + X_2$ vara två statistikor. Vissa att T_2 är tillräcklig statistika för θ , medan T_1 är inte så.
- b) Skatta I_1 och I_2 med momentmetoden när vi har 6 oberoende observationer: 0, 1, 0, 2, 0, 2 av en diskret stokastisk variabel X som kan anta värdena 0, 1, eller 2 med sannolikheten givna av $P(X = 0) = I_1$ och $P(X = 1) = I_2$
5. a) Bestäm Maximumlikelihood skattningen av θ från ett stickprov $X_1, \dots, X_n$ på en stokastisk variabel X , som har täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{q^2}, & 0 \leq x \leq q \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

b) Låt X_1, X_2 och X_3 vara ett stickprov från ett exponentiell fördelning:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} e^{-x/q}, & x > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Låt $\hat{q}_1 = X_1$, $\hat{q}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$, $\hat{q}_3 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}$ och $\hat{q}_4 = \bar{X}$ vara fyra olika skattningar av θ . Bestäm vilken (eller vilka) som är väntevärderiktig(a) samt vilken som har de minsta varians?

6. Antag att vi vill testa $H_0: \theta = 4.5$ mot $H_1: \theta \neq 4.5$, med ett likelihood-kvot test där vi har en observation from $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. Låt $L(q_0 | x)$ stå för likelihoodfunktionen när $\theta = \theta_0$, medan $L(\hat{q}_{ML} | x)$ stå för likelihoodfunktionen när Maximum-likelihood skattningen av θ används.

- a) Bestäm $L(q_0 | x)$ och $L(\hat{q}_{ML} | x)$ för $x = 1, 2, \dots, 8$.
- b) Bestäm för vilka värden på X som H_0 skall förkastas om vi önskar en signifikansnivå som ligger så nära 0.10 som möjligt.
- c) Vilken styrka har testet i punkten $\theta = 1$?