

Skriftlig tentamen på momentet **statistisk teori**, 5 poäng, ingående i
påbyggnadskurs i statistik

Fredagen den 18 februari 2000

Skrivtid : 4 timmar
Hjälpmedel : Tabeller över statistiska fördelningar, Studentlitteratur,
Lund, 1982
Godkänd miniräknare
Formelblad (vidhäftat).
Genomgång : Meddelas via anslagstavlan

Alla lösningar skall vara väl motiverade.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade lösblad

1. En krona kastas 3 gånger. Låt $\mathbf{X}$ beteckna antalet kronor i det första kastet, och låt $\mathbf{Y}$ beteckna totala antalet kronor i de 3 kasten.
 - a) Beräkna den simultana sannolikhetsfunktionen för $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$
 - b) Bestäm den momentgenererande funktionen för $\mathbf{X}$ respektive $\mathbf{Y}$.
 - c) Bestäm väntevärdena $E(\mathbf{X})$ och $E(\mathbf{Y})$.
2. Den tvådimensionella stokastiska variabeln $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ har den simultana täthetsfunktionen
$$f(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 < x < y < 3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$
 - a) Bestäm konstanten c .
 - b) Bestäm de betingade fördelningarna för $\mathbf{X}$ givet $\mathbf{Y}$, respektive $\mathbf{Y}$ givet $\mathbf{X}$.
 - c) Är $\mathbf{X}$ och $\mathbf{Y}$ oberoende? Motivera.
3.
 - a) Bestäm täthetsfunktionen (pdf) för $\mathbf{Y} = e^{\mathbf{X}}$ om $\mathbf{X} \sim N(0, 1)$
 - b) $\hat{\theta}_1$ och $\hat{\theta}_2$ är två oberoende och väntevärderiktiga skattningar av θ med varianser $\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \sigma_1^2$ och $\text{Var}(\hat{\theta}_2) = \sigma_2^2$. Bilda en linjär kombination $\hat{\theta}_3 = k\hat{\theta}_1 + (1-k)\hat{\theta}_2$ och välj konstanten k så att $\hat{\theta}_3$ blir en väntevärdesriktig punktskattning av θ med så liten varians som möjligt.
 - c) Vi har fem oberoende observationer: 2, 5, 3, 3 och 2 från en stokastisk variabel $\mathbf{X} \sim \text{Poisson}(\theta)$. Bestäm Maximumlikelihood skattningen av θ .

4. Låt $X_1, \dots, X_{16}$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel $X \sim N(\mu, 1)$. Antag att man vid test av $H_0: \mu = 0$ mot $H_1: \mu = 1$ ställt upp följande beslutregel:

Förkasta H_0 om $\sum_{i=1}^{16} X_i > 10$.

Bestäm testets signifikansnivå och styrka.

5. Antag att vi vill testa $H_0: \theta = 0.6$ mot $H_1: \theta \neq 0.6$ med ett likelihoodkvot-test där vi har en observation från $X \sim \text{Bin}(12, \theta)$. I tabellen nedan står $L(\hat{\theta}_0 | x)$ för likelihoodfunktionen när $\theta = \theta_0 = 0.6$, medan $L(\hat{\theta}_{ML} | x)$ står för likelihoodfunktionen när Maximum-likelihood skattningen av θ används. Utnyttja tabellen för att lösa följande uppgifter.

x	$L(\hat{\theta}_0 x)$	$L(\hat{\theta}_{ML} x)$
0	0.000017	1.000000
1	0.000302	0.383995
2	0.002491	0.296094
3	0.012457	0.258104
4	0.042043	0.238446
5	0.100902	0.228605
6	0.176579	0.225586
7	0.227030	0.228605
8	0.212841	0.238446
9	0.141894	0.258104
10	0.063852	0.296094
11	0.017414	0.383995
12	0.002177	1.000000

a) Visa hur man kommer fram till värdena 0.042043 samt 0.238446 raden som svarar mot $x = 4$ i tabellen.

b) Bestäm för vilka värden på X som H_0 skall förkastas om vi önskar en signifikansnivå som ligger så nära 0.05 som möjligt utan att överstiga 0.05.