

000406

1. a) Vi måste ha $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} cxe^{-x} dx = c \int_0^{\infty} xe^{-x} dx$. Med partiell integration fås nu $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-x}) dx = 0 - 0 - [e^{-x}]_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1$, vilket medför att $c = 1$.
- b) $P(1 < X < 2) = \int_1^2 xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_1^2 - \int_1^2 (-e^{-x}) dx = -2e^{-2} - (-e^{-1}) - [e^{-x}]_1^2$
 $= -2e^{-2} + e^{-1} - e^{-2} + e^{-1} = 2e^{-1} - 3e^{-2} \approx 0.330$

2. a) Marginalfördelningarna fås ur tabellen som

$k :$	0	1	2	3
$p_X(k) :$	0.60	0.25	0.10	0.05
$j :$	0	1		
$p_Y(j) :$	0.50	0.50		

ur vilken vi får momenten $E(X) = 0.60 * 0 + 0.25 * 1 + 0.10 * 2 + 0.05 * 3 = 0.6$,

$E(X^2) = 0.60 * 0^2 + 0.25 * 1^2 + 0.10 * 2^2 + 0.05 * 3^2 = 1.1$ vilket ger

$V(X) = 1.1 - 0.6^2 = 0.74$, och på motsvarande sätt fås $E(Y) = 0.5$, $E(Y^2) = 0.5$, $V(Y) = 0.5 - 0.5^2 = 0.25$.

b) X och Y är inte oberoende, ty t.ex. är $p_{X,Y}(3,0) = 0$ men $p_X(3)p_Y(0) = 0.05 * 0.5 = 0.025$.

c) $E(XY) = 0 + 0.10 * 1 * 1 + 0.05 * 1 * 2 = 0.2$, vilket ger

$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.2 - 0.6 * 0.5 = -0.1$ och

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{-0.1}{\sqrt{0.74*0.25}} \approx -0.23.$$

d) Ja, eftersom kovariansen (och korrelationen) mellan mjölk- och sockerunyttjande är negativ.

3. a) Låt X = antal blå pärlor på halsbandet, som är Hypgeom(6, 4, 1/3). Alltså är

$$P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{8}{15} \approx 0.53.$$

b) Låt $H_1 = \{\text{Spencer drar en blå pärla}\}$ och $H_2 = \{\text{Spencer drar en röd pärla}\}$. Låt vidare Y = det antal blå pärlor som Doris sedan drar. Då är $P(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{2}{3}$,

$P(Y=1|H_1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{2}{3}$ och $P(Y=1|H_2) = \frac{8}{15}$ (se ovan), så lagen om total sannolikhet ger $P(Y=1) = \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{8}{15} = \frac{26}{45} \approx 0.58$.

c) Låt b = antalet blå kulor i asken från början. Om X är som i a), så ges ML-skattningen $\hat{b}$ av b som det b som maximerar likelihooden $L(b) = P(X=1; b) = \frac{\binom{b}{1}\binom{6-b}{3}}{\binom{6}{4}}$ om $b = 1, 2, 3$ och 0 annars. (Övriga fall är omöjliga.) Vi får tabellen

$b :$	0	1	2	3	4	5	6
$L(b) :$	0	10/15	8/15	3/15	0	0	0

och ser att vi måste ha $\hat{b} = 1$.

4. a) Med normalapproximation blir konfidensintervallet på vanligt sätt
 $50 \pm 1.645 * \frac{20}{\sqrt{100}} = (46.7, 53.3)$
- b) Det ser inte ut att stämma, eftersom 100 inte ligger i konfidensintervallet. Detta motsvarar att förkasta hypotesen att den förväntade livslängden är 100 mot alternativet att den är mindre än 100 på nivån 5%.
- c) Om Arnold köpt n st fiskar, och standardavvikelsen fortfarande varit 20, så skulle konfidensintervallets längd ha blivit $2 * 1.645 * \frac{20}{\sqrt{n}} = \frac{65.8}{\sqrt{n}}$. Vi ska således lösa $1 = \frac{65.8}{\sqrt{n}}$, vilket ger $n = 65.8^2 \approx 4330$.
5. a) Testa $H_0 : \beta_1$ och β_2 är nollskilda, $\beta_3 = \beta_4 = 0$ mot $H_1 : \text{Alla parametrar är nollskilda}$. Vi får $F_{obs} = \left(\frac{1}{2}(1.3 + 22.4)\right) / 53.2 \approx 0.22 < F_{0.001}(2, 13) = 12.3$, så H_0 kan ej förkastas på nivån 0.1% (t.ex.). Huvudets omkrets och näsans längd har ingen påvisbar inverkan på blodtryckssänkningen.
- b) Nej. Variablerna är i fel ordning för detta i utskriften. Kvadratsummorna som står där är ju betingade av hur många variabler som tagits med. Man hade behövt ta in x_2 sist i modellen för att kunna utföra detta test.
6. a) Vi testar $H_0 : \beta_2 = 0$ mot $H_1 : \beta_2 \neq 0$ på nivån 5%. Normalapproximation kan göras, och vi får $z_{obs} = \frac{5.573-0}{4.059} \approx 1.37 < 1.96 = \lambda_{0.025}$, så H_0 kan ej förkastas, d.v.s. vi kan inte påvisa att β_2 är skilld från 0. (Man kan också se detta genom att avläsa testets p-värde, som är $0.156 > 0.05$.)
- b) Den sökta kvoten är $\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 * 50 + \beta_2 * 1)}{\exp(\beta_0 + \beta_1 * 20 + \beta_2 * 0)} = \exp(\beta_1 * 30 + \beta_2)$, som skattas med $\exp(0.2384 * 30 + 5.753) \approx 402000$.