

Skriptid: 4 timmar.

Hjälpmedel: Tabeller över statistiska fördelningar, Studentlitteratur 1982. Miniräknare och formelblad (vidhäftat).

Skrivningsvisning: Fredag den 24 mars, kl. 10.00, sal B705.

Anvisningar: Lösningarna ska vara väl motiverade. Maximalt antal poäng per uppgift finns angivet.

Totalt kan man få 24 poäng, varav 12 poäng räcker till godkänt och 20 poäng till väl godkänt.

1. (5p) En hög med ett mycket stort antal överblivna plankor ligger på en brädgård. Dessa plankors längder kan antas vara oberoende och likformigt fördelade med längd högst 1 meter.
 - a) Visa att väntevärdet för en plankas längd är $1/2$, och att variansen är $1/12$.
 - b) Om man slumpmässigt tar 100 av dessa plankor och lägger i en rad efter varandra, hur stor är då sannolikheten att plankradens längd överstiger 55 meter?
 - c) Om man slumpmässigt tar 10 plankor, vilken är sannolikheten att minst 5 stycken av dessa är minst 60 cm långa?
 - d) Om man slumpmässigt tar 100 plankor, vilken är sannolikheten att minst 50 stycken av dessa är minst 60 cm långa?
 - e) Jämför svaren i c) och d), och kommentera varför det ena är större än det andra!
2. (3p) Brynhilda har två vanliga kortlekar med vardera 52 kort, en med blåa baksidor och en med röda. Kortleken med blå baksida saknar hjärter äss, i övrigt finns alla kort med. Brynhilda väljer en av kortlekarna med lika sannolikhet, och drar därefter ett kort slumpmässigt ur den valda leken.
 - a) Vilken är sannolikheten att hon får ett äss?
 - b) Om hon fick ett äss, vilken är då den betingade sannolikheten att den blå leken har valts?
3. (4p) Man har observationerna $x_1 = 9$, $x_2 = 16$ och $x_3 = 25$ av de oberoende stokastiska variablerna X_1 , X_2 , X_3 , som alla har täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{2\sqrt{x}} e^{-m\sqrt{x}}, & x > 0, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- a) Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.
- b) Räkna ut ML-skattningen, m^* , av m . Glöm inte att visa att likelihooden (eller log likelihooden) har ett maximum i $m = m^*$.

4. (4p) Farbror Sid arrangerar varje vecka ett lotteri. Varje sådant lotteri innehåller 100 lotter varav, enligt farbror Sid, 10 stycken är vinstlotter. Ernie har under ett år (52 veckor) köpt en lott i varje lotteri, men aldrig vunnit.
- a) Givet att farbror Sid talar sanning, vilken är sannolikheten för att, som Ernie, misslyckas med att vinna 52 gånger?
- b) Låt p = sannolikheten för vinst på ett veckolotteri. Tänk er ett test av $H_0 : p = 0.10$ (vilket Sid hävdar) mot $H_1 : p < 0.10$ (vilket Ernie misstänker). Förkasta H_0 bara om antalet vinster på 52 spel är 0. Vilken signifikansnivå har detta test?
- c) Vilken styrka har testet i b) om det i själva verket är så att bara en enda lott är vinstlott, d.v.s. $p = 0.01$?
5. (4p) Veterinären Beata Bengtsson prövar olika kosttillskott på 20 st anorektiska elefanter. Efter att, utöver deras vanliga kost, ha gett elefanterna X_1 kg av BULIMEX, X_2 kg av Nisses Specialkraftfoder och X_3 kg av Gretas Späckbrygd uppmäter hon deras viktökningar till Y kg. Se bifogat blad för resultat av körningar i MINITAB. (Y motsvaras av $C1$, X_1 av $C2$, X_2 av $C3$ och X_3 av $C4$.)
- a) Beata vill först undersöka om mängden BULIMEX kan ha betydelse för viktökningen, och prövar därför regressionssambandet $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$. Undersök, genom att utföra ett lämpligt test, om detta är riktigt. Var noga med att redovisa hypoteser, signifikansnivå och teststorhet.
- b) Efter att ha utfört testet i a) går Beata vidare med modellen $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$. Givet att BULIMEX har betydelse, testa om Nisses Specialkraftfoder och Gretas Späckbrygd tillsammans ger någon ytterligare förbättring! Redovisa även här hypoteser, signifikansnivå och teststorhet.
- c) Kunde testet i a)-uppgiften ha utförts enbart med körningen i b)-uppgiften som grund, och i så fall hur?
6. (4p) Beata vill undersöka sambandet mellan hästars ålder och deras benägenhet att drabbas av gikt. Hon sätter upp en logistisk regressionsmodell, där x är hästens ålder och sannolikheten för gikt, $p(x)$, ges av

$$p(x) = \frac{1}{1 + \exp(-(a + bx))}.$$

I Beatas datamaterial ingår 50 hästar. Se bifogat blad för körningsresultat i MINITAB (förekomst av gikt, 1 eller 0, motsvaras av $C1$, och åldern x ligger i $C2$).

- a) Visa att oddset $\frac{p(x)}{1-p(x)} = \exp(a + bx)$.
- b) Skatta oddset $\frac{p(x)}{1-p(x)}$ för en 20-årig häst.
- c) Skatta kvoten mellan oddset för en 30-årig häst och en 20-årig.
- d) Gör ett konfidensintervall för oddskvoten i c) med konfidensgrad 95%.