

1. a) Låt X =en plankas längd.

$$E(X) = \int_0^1 x dx = 1/2, E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = 1/3, V(X) = 1/3 - (1/2)^2 = 1/12.$$

b) Plankornas längder är $X_1, \dots, X_{100}$ (säg). Låt $Y = X_1 + \dots + X_{100}$. Då är Y approximativt $N(50, \sqrt{100/12})$, och vi får

$$P(Y > 55) = 1 - P(Y \leq 55) = 1 - \Phi\left(\frac{55-50}{\sqrt{100/12}}\right) \approx 1 - \Phi(1.73) \approx 1 - 0.96 = 0.04.$$

c) Z =antal plankor som är minst 60 cm är $\text{Bin}(10, 0.4)$. Tabell ger

$$P(Z \geq 5) = 1 - P(Z \leq 4) \approx 1 - 0.633 = 0.367$$

d) Här är $Z \in \text{Bin}(100, 0.4)$, och eftersom $100 * 0.4 * 0.6 = 24 > 10$ får normalapproximation användas. Vi får (med halvkorrektion)

$$P(Z \geq 50) = 1 - P(Z \leq 49) \approx 1 - \Phi\left(\frac{49.5-40}{\sqrt{24}}\right) \approx 1 - \Phi(1.94) \approx 1 - 0.97 = 0.03.$$

e) Man räknar på samma procentuella avvikelse från väntevärdet i c) och d) (samma absoluta avvikelse från väntevärdet då man tittar på medelvärden i stället för summor), och eftersom antalet observationer i d) är större bör svaret bli mindre enligt stora talens lag.

2. Låt $H_1 = \{\text{hon tar den blå leken}\}$, $H_2 = \{\text{hon tar den röda leken}\}$ och $A = \{\text{hon drar ett äss}\}$.

a) Lagen om total sannolikhet ger $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{2} * \frac{3}{51} + \frac{1}{2} * \frac{4}{52} = \frac{15}{221} \approx 0.0679$.

b) P.g.a. definitionen av betingad sannolikhet har vi $P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \left(\frac{1}{2} * \frac{3}{51}\right) / \left(\frac{15}{221}\right) = \frac{13}{30} \approx 0.433$.

3. a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{m}{2\sqrt{x}} e^{-m\sqrt{x}} dx = \left[-e^{-m\sqrt{x}}\right]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$

$$b) L(m) = \prod_{i=1}^3 \left(\frac{m}{2\sqrt{x_i}} e^{-m\sqrt{x_i}}\right) = \frac{m^3}{8\sqrt{x_1 x_2 x_3}} e^{-m(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})}$$

$$l(m) = \ln\{L(m)\} = \text{konst.} + 3 \ln m - m(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})$$

$$l'(m) = \frac{3}{m} - (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})$$

$$l''(m) = -\frac{3}{m^2}.$$

ML-skattningen $m = m^*$ löser $l'(m^*) = 0$, vilket ger $m^* = \frac{3}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}} = \frac{1}{4}$ med insatta värden. Detta ger ett maximum, ty $l''(m)$ är negativ för alla m .

4. a) Låt X = antalet vinster under ett år $\in \text{Bin}(52, p)$. Om $p = 0.10$ så är

$$P(X = 0) = 0.90^{52} \approx 0.0042.$$

b) Signifikansnivån $= P(X = 0; p = 0.10) \approx 0.0042$ enligt a).

c) Styrkan $= P(X = 0; p = 0.01) = 0.99^{52} \approx 0.593$.

5. a) Testa $H_0 : \beta_1 = 0$ mot $H_1 : \beta_1 \neq 0$. $F_{obs} = \frac{1328.6}{5.7} = 233.09 > F_{0.001}(1, 18) = 15.4$, så vi kan förkasta H_0 (på nivån 0.0001) d.v.s. mängden BULIMEX har betydelse.
- b) Testa $H_0 : \beta_1 \neq 0, \beta_2 = \beta_3 = 0$ mot $H_1 : \beta_1 \neq 0$, och någon av β_2 och β_3 är $\neq 0$. $F_{obs} = \left(\frac{1}{2} * (24.67 + 1.71)\right) / 4.75 = 2.7768 < F_{0.05}(2, 16) = 3.63$, så H_0 kan ej förkastas (på nivån 5%) d.v.s. de övriga två medlen ger tillsammans ingen signifikant förbättring.
- c) Ja, regressionskvadratsumman för X_1 ($C2$) kan läsas av ur tabellen som 1328.62 och regressionskvadratsumman är $24.67 + 1.71 + 76.00 = 102.38$.
6. a) Låt $z = a + bx$. $\frac{p(x)}{1-p(x)} = \left(\frac{1}{1+\exp(-z)}\right) / \left(1 - \frac{1}{1+\exp(-z)}\right) = \left(\frac{1}{1+\exp(-z)}\right) / \left(\frac{\exp(-z)}{1+\exp(-z)}\right) = 1/\exp(-z) = \exp(z) = \exp(a + bx)$.
- b) Utskriften ger skattningarna $\hat{a} = -1.7175$, $\hat{b} = 0.28713$. Oddset för en häst med $x = 20$ skattas till $\exp(-1.7175 + 0.28713 * 20) \approx 56.0$.
- c) Den sökta kvoten är $\exp(a + b * 30) / \exp(a + b * 20) = \exp(b * 10)$, som skattas med $\exp(0.28713 * 10) \approx 17.7$. (Obs. att $1.33^{10} \approx 17.3$)
- d) $\hat{b} * 10$ (som observeras till $0.28713 * 10 = 2.8713$) kan anses som approximativt normalfördelat med väntevärde $b * 10$ och standardavvikelse $s_{\hat{b}} * 10 = 0.08923 * 10 = 0.8923$. För $b * 10$ får vi därför på vanligt sätt det (approximativt) 95%-iga konfidensintervallet $(2.8713 \pm 1.96 * 0.8923) = (1.1224, 4.6202)$, vilket för oddskvoten $\exp(b * 10)$ ger konfidensintervallet $(\exp(1.1224), \exp(4.6202)) \approx (3.07, 101.5)$. (Obs. att $1.12^{10} \approx 3.1$, $1.59^{10} \approx 103$.)