

Uppgift 1

I.

- problem: minnesfel i allmänhet; telescoping i synnerhet; även frågans känsliga natur
- åtgärder: t ex förbered minnesprocessen med cueing; ge tid; undersök även föregående och påföljande referensperioder.

II.

Med $\hat{V}(\hat{p}_{\pi, OSU})$ och $KI_{95\%, \hat{p}_{\pi, OSU}}$ definierade som

$$\begin{aligned}\hat{V}(\hat{p}_{\pi, OSU}) &= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n - 1}, \text{ som i "värsta fall"-scenariot blir} \\ &= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{4(n - 1)}, \text{ resp.}\end{aligned}$$

$$KI_{95\%, \hat{p}_{\pi, OSU}} = 2 \times z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\hat{V}(\hat{p}_{\pi, OSU})}, \text{ får vi}$$

$$2 \times z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\hat{V}(\hat{p}_{\pi, OSU})} = C \quad (C - \text{den önskade längden på intervallet})$$

$$\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{4(n - 1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2$$

$$\frac{N - n}{N(n - 1)} = \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2$$

$$N - n = \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2 N(n - 1)$$

$$n \left(1 + N \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2\right) = N + N \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2$$

$$n = \frac{N \left(1 + \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2\right)}{1 + N \left(\frac{C}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2}$$

Insättning ger

$$n = \frac{2984 \left(1 + \left(\frac{.06}{1.96}\right)^2\right)}{1 + 2984 \left(\frac{.06}{1.96}\right)^2} \approx 787$$

Remark 1 Det uttryck som förekommer på formelbladet, nämligen

$$n = \frac{N\sigma^2}{(N - 1) \frac{B^2}{4} + \sigma^2} = \frac{Np(1 - p)}{(N - 1) \frac{B^2}{4} + p(1 - p)}$$

och som i fallet ovan ger

$$\frac{Np(1 - p)}{(N - 1) \frac{B^2}{4} + p(1 - p)} = \frac{2984 \times .5(1 - .5)}{(2984 - 1) \frac{(\frac{.06}{2})^2}{4} + .5(1 - .5)} \approx 810,$$

skiljer sig i två avseenden från den ovanstående: a) det sätter normalfördelningens $z_{1-\alpha/2}$, vid $\alpha = 0.05$, till 2 i st f det korrekta 1.96¹; b) det använder populationens varians för medelvärde, $p(1-p)/n$ i st f den korrekta stickprovsvariansen $\hat{p}(1-\hat{p})/(n-1)$. För denna skrivning har dessa båda lösningar betraktats som korrekta.

Uppgift 2

I.

Se utdelat material, F4-7, avsn. 3.3.

Uppgift 3

I.

1.

$$\hat{\tau}_{ST} = \sum_{\ell=1}^L \hat{\tau}_{y\ell}$$

2.

$$\hat{V}(\hat{\tau}_{ST}) = \sum_{\ell=1}^L \hat{V}(\hat{\tau}_{y\ell})$$

Att ange en skriftlig motivation för ovanstående höjer svarets värde.

II.

Se utdelat material, F4-7, avsn. 6.2.

Uppgift 4

I.

Pop.: $N = 2984$; urv.: OSU, $n = 8$; hjv.: X , $\tau_x = 15300$.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_y &= r\tau_x, \text{ där } r = \frac{\hat{\tau}_y}{\hat{\tau}_x} = \frac{\sum_{i \in s} y_i}{\sum_{i \in s} x_i}; \\ \hat{V}(\hat{\tau}_y) &= \hat{V}(N\hat{\mu}_y) = N^2 \hat{V}(\hat{\mu}_y) \\ &= N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_{yr}^2}{n}, \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Från formelbladet} \\ \text{där } s_{yr}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i \in s} (y_i - rx_i)^2. \end{aligned}$$

¹Eftersom inferensen vid designansats bygger på normalteorin (CSG) finns det ingen anledning att "approximera" 1.96 med 2.

Data:

i	X	Y	Yhatt	Y-Yhatt
1	15	17	16.32353	0.676471
2	1	2	1.088235	0.911765
3	8	6	8.705882	-2.70588
4	1	0	1.088235	-1.08824
5	3	4	3.264706	0.735294
6	0	0	0	0
7	5	7	5.441176	1.558824
8	1	1	1.088235	-0.08824
Summa	34	37	s2yr=	1.824765
r=	1.088235			

Resultat:

$$\hat{\tau}_y = r\tau_x = 1.0882 \times 15300 = 16649.5$$

$$\hat{V}(\hat{\tau}_y) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_{yr}^2}{n} = 2984^2 \left(1 - \frac{8}{2984}\right) \frac{1.82477}{8} = 2025582$$

$$KI_{.95}(\hat{\tau}_y) = \hat{\tau}_y \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\tau}_y)} = 16649.5 \pm 1.96 \times \sqrt{2025582} = [13860, 19439]$$

II.

$$\begin{aligned} z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{\tau}_y)} &= c \\ N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_{yr}^2}{n} &= \left(\frac{c}{z_{1-\alpha/2}}\right)^2 \\ \frac{1}{n} &= \frac{1}{s_{yr}^2} \left(\frac{c}{z_{1-\alpha/2}N}\right)^2 + \frac{1}{N} \\ n &= \left(\frac{1}{s_{yr}^2} \left(\frac{c}{z_{1-\alpha/2}N}\right)^2 + \frac{1}{N}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Insättning ger

$$n = \left(\frac{1}{1.82477} \left(\frac{150}{1.96 \times 2984}\right)^2 + \frac{1}{2984}\right)^{-1} \approx 1438$$

Uppgift 5

I.

Svar:

- 1. Population med M individer (personer)
- 2. Systematiskt urval av n individer (steglängd $k > \max$ hushållsstorlek)
- 3. Antag att n är multipel av M (dvs $M = kn$, med k ett heltal)
- 4. Då har alla individer i pop lika slh (n/M) att komma med i det systematiska urvalet
- 5. Säg att hushåll nummer j består av personerna $a_1, a_2, \dots, a_{m_j}$ (samtantaget m_j stycken personer i hushållet).
- 6. Då,

$$\begin{aligned}
 P(\text{hushåll } j \text{ utvalt}) &= P(a_1 \text{ utvald eller } a_2 \text{ utvald eller... eller } a_{m_j} \text{ utvald}) \\
 &= P(a_1 \text{ utvald}) + P(a_2 \text{ utvald}) + \dots + P(a_{m_j} \text{ utvald}) \\
 &= \underbrace{\frac{n}{M} + \frac{n}{M} + \dots + \frac{n}{M}}_{m_j} \\
 &= \frac{m_j n}{M}
 \end{aligned}$$

(ju fler medlemmar hushållet har desto större chans det har att komma med i stickprovet)²

- Både π -estimatoren och kvotestimatoren ger i det här fallet samma svar (därför att information om gruppstorlekar är inbakad i gruppinklusionssannolikheter):

$$\hat{\tau}_{y\pi} = \sum_{j \in s} \frac{y_j}{\pi_j},$$

$$\hat{\tau}_{yr} = M \frac{\hat{\tau}_{y\pi}}{\hat{\tau}_{M\pi}} = M \frac{\sum_{j \in s} \frac{y_j}{\pi_j}}{\sum_{j \in s} \frac{m_j}{\pi_j}}$$

•

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_{y\pi} &= \sum_{j \in s} \frac{y_j}{\pi_j} \\
 &= \frac{10}{\frac{2 \times 4}{2984}} + \frac{2}{\frac{1 \times 4}{2984}} + \frac{16}{\frac{3 \times 4}{2984}} + \frac{24}{\frac{4 \times 4}{2984}} = 13676.7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}_{yr} &= M \frac{\hat{\tau}_{y\pi}}{\hat{\tau}_{M\pi}} = M \frac{\sum_{j \in s} \frac{y_j}{\pi_j}}{\sum_{j \in s} \frac{m_j}{\pi_j}} = 2984 \times \frac{\frac{10}{\frac{2 \times 4}{2984}} + \frac{2}{\frac{1 \times 4}{2984}} + \frac{16}{\frac{3 \times 4}{2984}} + \frac{24}{\frac{4 \times 4}{2984}}}{\frac{2}{\frac{2 \times 4}{2984}} + \frac{1}{\frac{1 \times 4}{2984}} + \frac{3}{\frac{3 \times 4}{2984}} + \frac{4}{\frac{4 \times 4}{2984}}} \\
 &= 2984 \times \frac{13676.7}{2984} = 13676.7
 \end{aligned}$$

²Vi tackar Jan Wretman för denna mycket klara framställning av resultatet.

Vissa har uppfattat uppgiften så som att det fanns $n = 10$ *hushåll* i stickprovet. Att det vore så ändrar inget i uttrycken ovan. T ex

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{y\pi} &= \sum_{j \in s} \frac{y_j}{\pi_j} \\ &= \frac{3}{\frac{2 \times 10}{2984}} + \frac{7}{\frac{2 \times 10}{2984}} + \frac{2}{\frac{1 \times 10}{2984}} + \frac{3}{\frac{3 \times 10}{2984}} + \frac{5}{\frac{3 \times 10}{2984}} + \frac{8}{\frac{3 \times 10}{2984}} + \frac{3}{\frac{4 \times 10}{2984}} + \frac{7}{\frac{4 \times 10}{2984}} + \frac{12}{\frac{4 \times 10}{2984}} + \frac{2}{\frac{4 \times 10}{2984}} \\ &= 5470.667\end{aligned}$$

En lösning som denna uppfattas som likvärdig den föregående lösningen.

- För π -estimatorn:

$$\hat{V}(\hat{\tau}_{y\pi}) = \sum_{j \in s} \left(\frac{y_j}{\pi_j} \right)^2 \frac{\pi_j (1 - \pi_j)}{\pi_j} + 2 \sum_{j \in s: j' < j} \frac{y_{j'}}{\pi_{j'}} \frac{y_j}{\pi_j} \frac{\pi_{j'j} - \pi_{j'}\pi_j}{\pi_{j'j}}$$

II.

Se t ex KD, avsn. 9.7.