

Hur ofta går idioten ut?

Jan Hagberg¹

1. Idioten

En populär patiens som stundom kallas idioten går till på följande sätt. Vi har en slumpmässigt ordnad kortlek med valörerna 1 till 13 i *fyra* olika färger. De 52 korten skall fördelas på h stycken högar där $1 \leq h \leq 13$. Det första kortet placeras i hög 1, det andra kortet placeras i hög 2, ..., det h :te i hög h , kort $h+1$ i hög 1 osv till dess alla kort har placerats ut. Patiensen misslyckas, dvs går ej ut, om minst ett kort av valör j hamnar i hög j , $j = 1, \dots, h$.

2. En exakt lösning

Den exakta sannolikheten för att idioten skall gå ut är

$$P_h(\text{ingen valör } j \text{ i hög } j, j = 1, \dots, h) = \sum_{k=0}^{4h} (-1)^k \frac{(52-k)!}{52!} r_k$$

där r_k ges av koefficienten framför x^k i tornpolynomet $R_h(x)$. Tornpolynom behandlas exempelvis i Grimaldi (1989) och Stanley (1997).

Låt $t = \text{heltalsdelen av } \frac{52}{h}$ och $s = 52 - ht$. Tornpolynomet för idioten kan då skrivas som

$$R_h(x) = \left(\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \binom{t+1}{k} k! x^k \right)^s \left(\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \binom{t}{k} k! x^k \right)^{h-s}.$$

Exempelvis är $R_3(x) = 1 + 208x + 19516x^2 + \dots + 23961\,22767\,36000x^{12}$

$$\begin{aligned} \text{och } P_3(\cdot) &= P(\text{ingen 1:a (ess) i hög 1, ingen 2:a i hög 2, ingen 3:a i hög 3}) \\ &= \frac{52! - 208 \cdot 51! + 19516 \cdot 50! - \dots + 23961\,22767\,36000 \cdot 40!}{52!} \\ &= 0.00816502 \end{aligned}$$

¹Martin Karlberg och Daniel Thorburn har bidragit med värdefull hjälp i form av programmering och goda idéer.

3. En approximativ lösning

Låt $I_i = \begin{cases} 1 & \text{om kort } i \text{ med valör } j \text{ hamnar i hög } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$P_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i = 0 \right) = P_h(\text{idioten går ut})$. Med lite räknearbete finner vi att

$$E_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i \right) = 52 \cdot \frac{1}{13} = 4 \text{ och}$$

$$\begin{aligned} E_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^{52} E_h(I_i^2) + \sum_{\substack{i \neq k \\ \text{kort } i \text{ och } k \\ \text{har samma valör}}}^{52} E_h(I_i I_k) + \sum_{\substack{i \neq k \\ \text{kort } i \text{ och } k \\ \text{har olika valörer}}}^{52} E_h(I_i I_k) \\ &= 52 \cdot \frac{1}{13} + A \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + B \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \end{aligned}$$

$$\text{där } A = s(t+1)t + (h-s)t(t-1) = t[h(t-1) + 2s]$$

$$\text{och } B = 52 \cdot 51 - A = 2652 - A.$$

$$\text{Dvs } Var_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i \right) = 4 \left(1 - \frac{A}{2652} \right) = \frac{2652 - A}{663} = \frac{B}{663}.$$

Approximera fördelningen för $\sum_{i=1}^{52} I_i$ med fördelningen för Y där

$Y \sim Bin(n, p)$, $np = E_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i \right)$ och $np(1-p) = Var_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i \right)$ dvs

$$p = \frac{A}{A+B} = \frac{A}{2652} \text{ och } n = \frac{4}{p} = \frac{10608}{A}.$$

Således,

$$P_h \left(\sum_{i=1}^{52} I_i = 0 \right) \approx P(Y = 0) = (1-p)^n = \left(1 - \frac{4}{n} \right)^n.$$

Det följer även att $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^n = e^{-4}$ och att approximationen blir bättre ju mindre p är. Det sistnämnda är ekvivalent med att noggrannheten i approximationen förbättras när h ökar.

4. Utgångssannolikheterna i tabellform

<u>h</u>	<u>Exakta sannolikheter</u>	<u>Approximativa sannolikheter</u>
2	0.00424283	0.00409647
3	0.00816502	0.00804678
4	0.01055450	0.01045696
5	0.01208233	0.01200465
6	0.01315546	0.01309013
7	0.01393869	0.01388341
8	0.01453739	0.01448963
9	0.01501884	0.01497622
10	0.01540182	0.01536444
11	0.01571094	0.01567756
12	0.01596951	0.01594020
13	<u>0.01623273</u>	<u>0.01620437</u>

Referenser

Grimaldi, R.P. (1989). Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied introduction. Second Edition. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Stanley, R.P. (1997). Enumerative Combinatorics. Volyme 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49. Cambridge University Press, Cambridge.