

F12, Hypotesprövning forts.

Christian Tallberg

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Typ-I-fel och typ-II-fel. Styrkebegreppet

Hypotesprövning kan resultera i två typer av felaktiga beslut:

- att förkasta en sann nollhypotes (typ-I-fel)
- att acceptera en falsk nollhypotes (typ-II-fel)

Sannolikheterna för dessa felbeslut är

$$\alpha = \Pr(\text{förkasta } H_0 | H_0 \text{ är sann})$$

$$\beta = \Pr(\text{acceptera } H_0 | H_0 \text{ är falsk})$$

Exempel:

Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara ett stickprov av oberoende normalfördelade variabler med standardavvikelsen $\sigma = 5$. Vi har då att

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Vi ska pröva hypoteserna:

$$H_0 : \mu = 20$$

$$H_1 : \mu > 20$$

a) Beräkna för $\alpha = 0.05$ sannolikheten för typ-II-fel β (OBS! Ej en regressionskoefficient) om stickprovet omfattar $n = 16$ observationer och $\mu = 23$. Testvariabeln

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0; 1) \text{ då } H_0 \text{ är sann.}$$

Nollhypotesen förkastas om testvariabelns observerade värde är större än 1.64, dvs om

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - 20}{\frac{5}{4}} &> 1.64 \\ \bar{x} &> 1.64 \cdot 1.25 + 20 = 22.05 \end{aligned}$$

Om $\mu = 23$ har vi att

$$\bar{X} \sim N\left(23; \frac{5^2}{16}\right).$$

Sannolikheten att acceptera den felaktiga nollhypotesen $\mu = 20$ är då

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr(\bar{X} < 22.05 | H_0 \text{ är falsk}) \\ &= \Pr(\bar{X} < 22.05 | \mu = 23) \\ &= \Pr\left(Z < \frac{22.05 - 23}{\frac{5}{4}}\right) = \Phi(-0.76) = 0.224\end{aligned}$$

b) Vi gör samma beräkningar som i a) för $\alpha = 0.01$. Nollhypotesen förkastas om

$$\begin{aligned}\frac{\bar{x} - 20}{\frac{5}{4}} &> 2.33 \\ \bar{x} &> 2.33 \cdot 1.25 + 20 = 22.91\end{aligned}$$

Sannolikheten att acceptera den felaktiga nollhypotesen $\mu = 20$ är då

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr(\bar{X} < 22.91 | H_0 \text{ är falsk}) \\ &= \Pr(\bar{X} < 22.91 | \mu = 23) \\ &= \Pr\left(Z < \frac{22.91 - 23}{\frac{5}{4}}\right) = \Phi(-0.07) = 0.472\end{aligned}$$

Vi ser att när α minskas från 0.05 till 0.01 ökar β från 0.224 till 0.472.

c) Vi gör samma beräkningar som i a) för stickprovsstorleken $n = 25$.

$$\bar{X} \sim N\left(24; \frac{5^2}{25}\right).$$

Nollhypotesen förkastas om

$$\begin{aligned}\frac{\bar{x} - 20}{\frac{5}{5}} &> 1.64 \\ \bar{x} &> 1.64 + 20 = 21.64\end{aligned}$$

Sannolikheten att acceptera den felaktiga nollhypotesen $\mu = 20$ är då

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr(\bar{X} < 21.64 | H_0 \text{ är falsk}) \\ &= \Pr(\bar{X} < 21.64 | \mu = 23) \\ &= \Pr\left(Z < \frac{21.64 - 23}{\frac{5}{5}}\right) = \Phi(-1.36) = 0.087\end{aligned}$$

När stickprovsstorleken ökar från 16 till 25 observationer minskar β från 0.224 till 0.087.

d) Vi gör samma beräkningar som i a) under förutsättning att $\mu = 24$. Enligt a) förkastas nollhypotesen om

$$\bar{x} > 22.05$$

Om $\mu = 24$ har vi att

$$\bar{X} \sim N\left(24; \frac{5^2}{16}\right).$$

Sannolikheten att acceptera den felaktiga nollhypotesen $\mu = 20$ är då

$$\begin{aligned}\beta &= \Pr(\bar{X} < 22.05 | H_0 \text{ är falsk}) \\ &= \Pr(\bar{X} < 22.05 | \mu = 24) \\ &= \Pr\left(Z < \frac{22.05 - 24}{\frac{5}{4}}\right) = \Phi(-1.56) = 0.059\end{aligned}$$

Om det hypotetiska värdet är $\mu = 20$ och det sanna värdet ökar från 23 till 24 minskar β från 0.224 till 0.059.

Vi sammanfattar beräkningarna på följande sätt:

- Om α minskas ökar risken β att acceptera en felaktig nollhypotes.
- Om n ökas minskar risken β att acceptera en felaktig nollhypotes.
- Risken β att acceptera en felaktig nollhypotes är mindre ju större skillnaden är mellan det hypotetiska och det sanna paramervärdet.

Vi kan fatta följande beslut

		Beslut	
		H_0 accept	H_0 förka
I verklh. är	H_0 sann	Korrekt beslut	Typ-I-fel ($\text{Pr} = \alpha$)
	H_0 falsk	Typ-II-fel ($\text{Pr} = \beta$)	Korrekt beslut

Att vi accepterar en nollhypotes innebär inte att vi påstår att den är sann. Att nollhypotesen accepteras innebär att stickprovet inte ger tillräckligt stöd för mothypotesen.

Testets styrka = $\text{Pr}(\text{förkasta } H_0 \text{ då } H_0 \text{ är falsk})$

$$\text{Styrkan} + \beta = 1$$

$$\text{Styrkan} = 1 - \beta$$

$$\beta = 1 - \text{Styrkan}$$

K.i. vid jämförelser mellan olika grupper

Skillnader mellan medelvärden

Från en population med medelvärde μ_1 och variansen σ_1^2 drar man ett slumpmässigt stickprov av storleken n_1 . Oberoende av utfallet där drar man från en annan population med medelvärde μ_2 och variansen σ_2^2 ett slumpmässigt stickprov av storleken n_2 . Populationsmedelvärdena μ_1 och μ_2 skattas med stickprovsmedelvärdena $\bar{X}_1$ och $\bar{X}_2$.

Vi bildar differenserna $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ som har väntevärde

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

och varians

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) &= V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) - 2Cov(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \\ &= V(\bar{X}_1) + V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}. \end{aligned}$$

Notera, att eftersom stickproven dras oberoende av varandra är $\bar{X}_1$ och $\bar{X}_2$ oberoende (okorrelerade) och kovariansen $Cov(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = 0$.

Normalfördelade variabler med känd varians

Vi har två populationer. Låt X_1 vara inkomsten i ena pop. och X_2 vara inkomsten i andra pop. Vi vill jämföra de icke kända medelinkomsterna μ_1 och μ_2 i de två populationerna. Låt

$$X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$$

och

$$X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2).$$

Två slumpmässiga stickprov av storlek n_1 och n_2 dras oberoende av varandra från populationerna.

Då gäller att

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1; \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2; \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

och att differensen

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Dessutom är

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0; 1)$$

Om varianserna σ_1^2 och σ_2^2 är kända ges ett $(1 - \alpha)$ 100 %-igt k.i. för $\mu_1 - \mu_2$ av

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Om $\bar{x}_1 = 15$ tusen kr, $\bar{x}_2 = 14$ tusen kr, $\sigma_1^2 = 6$, $\sigma_2^2 = 4.5$, $n_1 = 10$ och $n_2 = 15$ har vi att ett 95 %-igt k.i. för $\mu_1 - \mu_2$ ges av

$$(15 - 14) \pm 1.96 \sqrt{\frac{6}{10} + \frac{4.5}{15}} \\ 1 \pm 1.86.$$

Med 95 % tillförlitlighet ligger skillnaden i medelinkomst i intervallet $(-0.86; 2.86)$.