

F10, Konfidensintervall (en population) forts.

Christian Tallberg

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Ensidiga k.i.

Ibland är man bara intresserad av intervallets nedre (eller övre) gräns. Vi har ett stickprov av oberoende variabler $X_1, \dots, X_n$ från

$$X \sim N(\mu; \sigma^2),$$

där μ är okänt och σ^2 känt. Ett ensidigt $(1 - \alpha)$ 100 %-igt k.i. för μ som är begränsat nedåt ges av

$$\mu > \bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

och ett ensidigt $(1 - \alpha)$ 100 %-igt k.i. för μ som är begränsat uppåt ges av

$$\mu < \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Exempel 1 Körner (sid 155):

Låt $X_1, \dots, X_n$ vara ett stickprov ($n = 25$) av oberoende normalfördelade variabler med μ okänt och känd standardavvikelse $\sigma = 15$. Punktskattningen är $\bar{x} = 102$. Ett ensidigt 95 %-igt k.i. för μ som är begränsat nedåt ges av

$$\begin{aligned} \bar{x} - 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 102 - 1.64 \frac{15}{5} \\ &= 102 - 5.88. \end{aligned}$$

Tolkning: Med konfidensgraden 95 % täcker intervallet $(97.08; \infty)$ populationsparametern μ .

K.i. för σ^2

Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara ett stickprov av oberoende observationer från en normalfördelning med medelvärde μ och standardavvikelse σ . Då är

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

dvs χ^2 -fördelad med $n-1$ frihetsgrader. Då gäller att

$$\begin{aligned} \Pr\left(\chi_v^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi_h^2\right) &= 0.95 \\ \Pr\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_h^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_v^2}\right) &= 0.95 \end{aligned}$$

Ett 95 %-igt k.i. för σ^2 ges alltså av

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_h^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_v^2}$$

och för σ av

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_h^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_v^2}}.$$

Exempel:

En bank vill inte att betjäningstiden (i minuter) för kunder skall ha stor variation, för då tenderar kölängden att öka. Därför undersöker man regelbundet variansen för betjäningstiden. I ett slumpmässigt stickprov av 22 betjäningstider är $s^2 = 8$. Om betjäningstiden följer en normalfördelning med medelvärde μ och varians σ^2 , bilda ett 95 %-igt k.i. för σ^2 och σ .

Ett 95 %-igt k.i. för σ^2 ges av

$$\frac{(22-1)8}{35.48} < \sigma^2 < \frac{(22-1)8}{10.28} \\ = 4.7 < \sigma^2 < 16.3$$

och för σ av

$$\text{sqrt}\left(\frac{(13-1)37.8}{23.34}\right) < \sigma < \text{sqrt}\left(\frac{(13-1)37.8}{4.40}\right) \\ = 2.2 < \sigma < 4.0.$$

Med 95 % tillförlitlighet ligger σ^2 i intervallet (4.7; 16.3) och σ i intervallet (2.2; 4.0).

Hypotesprövning

Vi gör ett antagande angående populationen (en populationsparameter) och vill testa om detta antagande håller. Vi formulerar en *nollhypotes* (H_0) och en *mothypotes* (H_1).

Exempel:

En maskin fyller konservburkar och av erfarenhet vet man att vikten varierar från burk till burk. Väntevärdet är $\mu = 750$ gram och standardavvikelsen är $\sigma = 16$ gram. Man har köpt in en ny maskin där μ är okänt men standardavvikelsen är samma. Antag att vikten varierar som en normalfördelad variabel. Man vill nu testa om väntevärdet är samma för den nya maskinen på 5 % signifikansnivå. Man drar ett slumpmässigt stickprov av storlek $n = 16$ där $\bar{x} = 743$.

Vi har följande två hypoteser

$$H_0 : \mu = 750 \\ H_1 : \mu \neq 750$$

Lösning:

Alternativ 1: Ett 95 %-igt k.i. för μ ges av

$$\bar{x} \pm z_{0.025} \frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)} \\ = 743 \pm 1.96 \frac{16}{4}$$

Med 95 % tillförlitlighet ligger μ i intervallet (735.2; 750.8). Då $\mu_0 = 750$ ligger i intervallet kan vi inte förkasta nollhypotesen utan accepterar att $\mu = 750$.

Alternativ 2: Utnyttja att

$$\Pr(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95 \\ \Pr\left(-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}} < 1.96\right) = 0.95$$

då nollhypotesen är sann. Testförfarandet går då till på följande sätt:

Vi har en testvariabel (teststatistika, testfunktion)

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\text{sqrt}(n)}}, \text{ som är } N(0, 1) \text{ då } H_0 \text{ är sann.}$$

Vi beräknar det observerade testvärdet i stickprovet

$$z_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{743 - 750}{\frac{16}{4}} = -1.75$$

Om vårt observerade testvärde är större än 1.96 eller mindre än -1.96 förkastas H_0 och vi drar slutsatsen att μ är större eller mindre än μ_0 . I det här fallet är $-1.96 < z_{obs} = -1.75 < 1.96$ och H_0 accepteras. Slutsatsen är att det är inte helt osannolikt att vårt observerade stickprovsvärde $\bar{x} = 743$ är draget från en fördelning med $\mu = 750$.

Signifikansnivå. Kritiskt område

- *Kritiskt område*: De värden då nollhypotesen förkastas.
- *Acceptansområde*: De värden då nollhypotesen accepteras.
- Bestäms genom *signifikansnivån (risknivån)* α . I föregående exemplet är $\alpha = 0.05$ och gränserna -1.96 och 1.96.
- Vanliga värden på α är 0.1, 0.05, 0.01 och 0.001.

Ensidigt eller tvåsidigt (dubbelsidigt) test

Nollhypotes (antagande):

$$H_0 : \mu = 750$$

Mothypotes:

Tvåsidigt

$$H_1 : \mu \neq 750$$

Ensidigt

$$H_1 : \mu > 750$$

eller

$$H_1 : \mu < 750$$

Exempel 2:

En kund misstänker att medelvikten μ är mindre än 750 g som företaget påstår. Hon vill utföra ett test på 5 % signifikansnivå. Hon drar ett slumpmässigt stickprov av samma storlek $n = 16$ och får samma $\bar{x} = 743$.

Hypoteserna blir

$$H_0 : \mu = 750$$

$$H_1 : \mu < 750$$

Testvariabeln är

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \text{ som är } N(0, 1) \text{ då } H_0 \text{ är sann.}$$

H_0 förkastas om vi observerar ett värde som är mindre än -1.64 (det kritiska området). Vi beräknar det observerade testvärdet i stickprovet

$$z_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{743 - 750}{\frac{16}{4}} = -1.75$$

Det observerade testvärde är mindre än -1.64. Alltså H_0 förkastas och vi drar slutsatsen att medelvikten är mindre än 750 gram.

Notera att hypoteserna bestäms innan vi tittar på data och därför kan komma fram till olika slutsatser för samma data.

Probability value (p-värde)

- Vid ensidiga test är p -värdet

$$= \Pr \left(\begin{array}{l} \text{ett värde som är minst lika extremt} \\ \text{som det observerade om } H_0 \text{ är sann} \end{array} \right)$$

- Vid tvåsidiga test är p -värdet

$$= 2 \cdot \Pr \left(\begin{array}{l} \text{ett värde som är minst lika extremt} \\ \text{som det observerade om } H_0 \text{ är sann} \end{array} \right)$$

I första exemplet

$$H_0 : \mu = 750$$

$$H_1 : \mu \neq 750$$

är p -värdet

$$\begin{aligned} & \Pr(Z > 1.75) \text{ eller } \Pr(Z < -1.75) \\ &= 2 \Pr(Z > 1.75) \\ &= 2(1 - \Pr(Z < 1.75)) \\ &= 2(1 - 0.9599) = 0.08 \end{aligned}$$

H_0 accepteras för signifikansnivåer mindre än 0.08.

I andra exemplet

$$H_0 : \mu = 750$$

$$H_1 : \mu < 750$$

är p -värdet

$$\begin{aligned} \Pr(Z < -1.75) &= \Pr(Z > 1.75) \\ &= 1 - \Pr(Z < 1.75) \\ &= 1 - 0.9599 = 0.04 \end{aligned}$$

För $\alpha = 0.05$ förkastas H_0 , men för $\alpha = 0.01$ accepteras H_0 .