

OSÄKERHET

Sannolikhetslära:

- Om det i ett område finns 32 % med universitetsexamen, vad är sannolikheten att ett stickprov kommer att innehålla 31-33 % med universitetsexamen?
- Om medelåldern i en population är 47 år, vad är sannolikheten att medelåldern i ett stickprov ligger i intervallet 46-48.5 år?
- Vad är sannolikheten för udda värde vid kast med en symmetrisk tärning?

Statistisk slutledning (statistisk inferens):

Med utgångspunkt från ett stickprov

- Vad är sannolikheten att det i ett i ett område finns 31-33 % med universitetsexamen?
- Vad är sannolikheten att medelåldern i en population är 46-48.5 år?
- Vad är sannolikheten att tärningen är symmetrisk?

GRUNDLÄGGANDE SANNOLIKHETSLÄRA

Sannolikhet = Kvantitativt mått på osäkerhet

- Objektiv sannolikhet
- Subjektiv sannolikhet

Slumpmässigt försök	Utfallsrum S
<i>Kast med tärning</i>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
<i>Befruktning av äggcell</i>	$\{pojke, flicka\}$
<i>Köp av penninglott</i>	$\{vinst, ej\ vinst\}$
<i>Slumpm. val av tvåbarnsfam</i>	$\{PP, PF, FP, FF\}$

- Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas ett utfall (outcome).
- Mängden av möjliga utfall kallas utfallsrummet (sample space) och betecknas under denna kurs med S .
- En samling utfall kallas en händelse (event).
- Händelser betecknas med stora bokstäver, A, B, C ,
- Komplementet till en händelse betecknas med $\bar{A}$.
- Komplementet till S är den tomma mängden $\emptyset = \{\}$ (innehåller inga element).

Tärningsexempel 1: Ett kast med en symmetrisk tärning

Utfallsrummet

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Händelserna A och B

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{5, 6\}$$

Snittet

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Unionen

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Komplementmängden

$$\bar{A} = \{1, 6\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$$

de Morgans regler

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Generalisering till ett godtyckligt antal mängder.

$$\text{Unionen: } A \cup B \cup C$$

$$\text{Snittet: } A \cap B \cap C.$$

I ett slumpförsök med utfallsrummet S motsvaras varje utfall av en sannolikhet. Sannolikheten att en händelse A skall inträffa betecknas med $\Pr(A)$ och uppfyller villkoren

$$1. \ 0 \leq \Pr(A) \leq 1$$

$$2. \ \Pr(S) = 1$$

$$3. \ \Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$4. \ \Pr(\emptyset) = 1 - \Pr(S) = 0$$

Om alla utfall tilldelas samma sannolikhet $1/N$, är sannolikheten för händelsen A

$$\Pr(A) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N} = \frac{g(A)}{N},$$

där N är antal möjliga fall och $g(A)$ är antalet utfall som är gynnsamma för A .

Fortsättning tärningsexempel 1:

Utfall tärningskast	Sannolikheter
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$\Pr(A) = \frac{g(A)}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Pr(B) = \frac{g(B)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{g(A \cap B)}{N} = \frac{1}{6}$$

$$\Pr(A \cup B) = \frac{g(A \cup B)}{N} = \frac{5}{6}$$

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(\bar{B}) = 1 - \Pr(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

VAD ÄR EN SANNOLIKHET

1) Sannolikhet definierat som relativa frekvenser (objektiva sannolikheter)

Den frekventistiska definitionen förutsätter

- ett oändligt antal upprepbara identiska experiment (t ex kast med en symmetrisk tärning)
- att det vid varje experiment finns ett ändligt antal utfall

Tolkning: Sannolikheten för en händelse är den relativa frekvensen (andelen experiment som resulterar i händelsen) vid ett oändligt antal upprepade identiska experiment.

2) Subjektiv sannolikhetsdefinition

Sannolikheter är personliga och mäter grad av övertygelse "degree of belief".

Vi slipper begränsa oss till händelser där sannolikheten kan fastställas med upprepade identiska experiment.

Exempel

- Sannolikheten för regn imorgon
- Sannolikheten att Djurgården vinner allsvenskan i år
- Sannolikheten att George W. Bush återväljs till president på onsdag.

KOMBINATORIK

Exempel 6 (Körner sid 24):

Vi har tre förrätter, två huvudrätter och fyra efterrätter. På hur många sätt kan en måltid komponeras?

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Multiplikationsprincipen

Man skall i ordning utföra k operationer. Antalet möjligheter vid de olika operationerna är $n_1, n_2, \dots, n_k$. Då är totala antalet sätt att utföra de olika operationerna $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

Exempel 8 (Körner sid 26):

Lampa	1	2	3	4	5
	släckt	grön	grön	släckt	röd

Hur många personer kan sökas med denna anläggning?

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 3^5 - 1 = 242$$

Permutationer

n olika element kan permuteras på
 $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (n-fakultet)
olika sätt.
 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
 $0! = 1$

Exempel 10 (Körner sid 26):

På hur många sätt kan man rangordna personerna
Andersson, Bergman och Cesar?

Ordnade delmängder

$$N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Exempel 11 (Körner sid 28):

Bland fyra personer skall två väljas ut och rangordnas.
På hur många sätt kan detta ske?

$$N = 4; n = 2$$

Icke – ordnade delmängder

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n} \quad (\text{uttalas "N över n"})$$

eller binomialkoefficienten.

Exempel 12 (Körner sid 29):

Bland fyra personer skall två väljas ut (Obs! ingen
rangordning). På hur många sätt kan detta ske?

$$N = 4; n = 2$$

	Med återl.	Utan återl.
Med häns t ordn	N^n	$\frac{N!}{(N-n)!}$
Utan häns t ordn	$\binom{N+n-1}{n}$	$\binom{N}{n}$

Tärningsexempel 2: *Två* kast med en symmetrisk sex-
sidig tärning.

A = Högst två prickar i första kastet

B = Minst sju prickar sammanlagt

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\Pr(A) = \frac{g(A)}{N} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$\Pr(B) = \frac{g(B)}{N} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} = 0.58$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.08$$

$$\Pr(A \cup B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0.83$$

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap \bar{B}) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{A} \cap B) &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \Pr(\overline{A \cup B}) = 1 - \Pr(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

ADDITIONSSATSEN

Sannolikheten att minst en av händelserna A och B inträffar är

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$\Pr(A \cap B)$ = Den simultana sannolikheten för händelserna A och B .

I tärningsexemplet beräknas $\Pr(A \cup B)$ med hjälp av additionssatsen

$$\Pr(A \cup B) = \frac{12}{36} + \frac{21}{36} - \frac{3}{36} = \frac{5}{6} = 0.83$$

För disjunkta (ömsesidigt uteslutande) händelser gäller att $\Pr(A \cap B) = 0$,

dvs $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

BETINGAD SANNOLIKHET

Exempel 7 (Körner sid 48):

	Pojke	Flicka	Summa
Blå ögon	340	340	680
Ej blå ögon	172	148	320
Summa	512	488	1000

Vad är sannolikheten att barnet

- a) har blå ögon
- b) är en pojke
- c) har blå ögon och är en pojke
- d) har blå ögon om vi vet att barnet är en pojke

Låt A = händelsen "blå ögon" och B = händelsen "pojke"

$$\Pr(A) = \frac{680}{1000} = 0.680$$

$$\Pr(B) = \frac{512}{1000} = 0.512$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{340}{1000} = 0.340$$

$$\Pr(A|B) = \frac{340}{512} = 0.66$$

De betingade sannolikheterna ges av

$$\Pr(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

$$\Pr(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Fortsättning tärningsexempel 2: Beräkna $\Pr(A|B)$

$$\begin{aligned} & \Pr(\text{Högst två prickar i kast 1} | \text{Minst sju prickar sammanlagt}) \\ &= \frac{\Pr(\text{Högst två prickar i kast 1} \cap \text{Minst sju prickar sammanlagt})}{\Pr(\text{Minst sju prickar sammanlagt})} \\ &= \frac{3}{21} = \frac{1}{7} = 0.14 \end{aligned}$$

Multiplikationssatsen:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B|A)$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) \Pr(A|B)$$

SATSEN OM TOTAL SANNOLIKHET

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B})$$

Fortsättning exempel 7 (Körner sid 48):

A = blå ögon

B = pojke

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B}) = \frac{340}{1000} + \frac{340}{1000} \\ &= \frac{680}{1000} = 0.680 \end{aligned}$$

STS (generellt):

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i)$$

Händelserna $B_1, B_2, \dots, B_n$ skall vara disjunkta och tillsammans fylla upp hela utfallsrummet.

BAYES SATS:

Enligt satsen om total sannolikhet är

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B}) \quad (1).$$

Enligt definitionen för betingad sannolikhet är

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}, \quad \Pr(A) > 0 \quad (2)$$

och

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \quad \Pr(B) > 0$$

$$\text{dvs } \Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) \Pr(B) \quad (3)$$

och

$$\Pr(A|\bar{B}) = \frac{\Pr(A \cap \bar{B})}{\Pr(\bar{B})}, \quad \Pr(\bar{B}) > 0$$

$$\text{dvs } \Pr(A \cap \bar{B}) = \Pr(A|\bar{B}) \Pr(\bar{B}) \quad (4).$$

Sätt in (3) och (4) i (1). Dvs

$$\Pr(A) = \Pr(A|B) \Pr(B) + \Pr(A|\bar{B}) \Pr(\bar{B}) \quad (5).$$

Sätt in (5) i (2). Dvs

$$\begin{aligned} \Pr(B|A) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap \bar{B})} \\ &= \frac{\Pr(B) \Pr(A|B)}{\Pr(B) \Pr(A|B) + \Pr(\bar{B}) \Pr(A|\bar{B})} \end{aligned}$$

Bayes sats (generellt):

$$\begin{aligned} \Pr(B_1|A) &= \frac{\Pr(A \cap B_1)}{\sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i)} \\ &= \frac{\Pr(B_1) \Pr(A|B_1)}{\sum_{i=1}^n \Pr(B_i) \Pr(A|B_i)} \end{aligned}$$

Exempel:

En person har två paket spik där relativa frekvensen defekta är 0.01 resp 0.07. Hon väljer först slumpmässigt ett paket. Sannolikheten att hon väljer paket 1 är 0.6 och sannolikheten att hon väljer paket 2 är 0.4. Ur det valda paketet väljer hon därefter slumpmässigt en spik.

a) Vad är sannolikheten att spiken är defekt?

b) Den valda spiken var defekt! Vad är sannolikheten att den kommer från paket 1 resp. paket 2?

A = Defekt spik; B_1 = Paket 1; B_2 = Paket 2

a) Enligt satsen om total sannolikhet är

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2) \\ &= \Pr(B_1) \Pr(A|B_1) + \Pr(B_2) \Pr(A|B_2) \\ &= 0.6 \cdot 0.01 + 0.4 \cdot 0.07 = 0.006 + 0.028 = 0.034\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Pr(B_1|A) &= \frac{\Pr(A \cap B_1)}{\Pr(A)} \\ &= \frac{\Pr(B_1) \Pr(A|B_1)}{\Pr(B_1) \Pr(A|B_1) + \Pr(B_2) \Pr(A|B_2)} \\ &= \frac{0.006}{0.034} = 0.1765 \\ \Pr(B_2|A) &= \frac{\Pr(A \cap B_2)}{\Pr(A)} = \frac{0.028}{0.034} = 0.8235\end{aligned}$$

$\Pr(B_i)$ = Apriorisannolikheten för $B_i, i = 1, 2$.

$\Pr(B_i|A)$ = Aposteriorisannolikheten för $B_i, i = 1, 2$.

OBEROENDE HÄNDELSE

Två händelser A och B är oberoende om och endast om

- 1) $\Pr(A|B) = \Pr(A), \Pr(B) > 0$
- 2) $\Pr(B|A) = \Pr(B), \Pr(A) > 0$
- 3) $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$

Exempel: Ett symmetriskt mynt singlar två gånger.

$S = \{GK, GG, KG, KK\}$

A = Gubbe i första kastet

B = De två kasten ger samma resultat (GG eller KK)

C = Gubbe i båda kast

a) Är A och B oberoende?

b) Är A och C oberoende?

$$\Pr(A) = 0.5, \Pr(B) = 0.5, \Pr(C) = 0.25, \Pr(A|B) = 0.5, \Pr(C|A) = 0.5$$

Lösning a)

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap B) &= \Pr(A|B) \Pr(B) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \\ \Pr(A) \Pr(B) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 = \Pr(A \cap B)\end{aligned}$$

Händelserna A och B är oberoende.

Lösning b)

$$\begin{aligned}\Pr(A \cap C) &= \Pr(C|A) \Pr(A) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \\ \Pr(A) \Pr(C) &= 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \neq \Pr(A \cap C)\end{aligned}$$

Händelserna A och C är inte oberoende.

Urval med och utan återläggning

Exempel:

En urna innehåller två gröna kulor och en vit kula.
Två kulor dras med respektive utan återläggning.

a) med återläggning

b) utan återläggning

$$\begin{aligned} a) \Pr(\text{två gröna kulor}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\ b) \Pr(\text{två gröna kulor}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \end{aligned}$$

En annan urna innehåller 200000 gröna kulor och 100000 vita kulor. Två kulor dras utan återläggning.

$$a) \Pr(\text{två gröna kulor}) \approx \frac{200000}{300000} \cdot \frac{199999}{299999} \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

- Urval med återläggning ger oberoende (oändlig population)
- Urval utan återläggning ger inte oberoende
- Om populationen är stor i förhållande till stickprovet kan urval utan återläggning behandlas som urval med återläggning. Tumregel då $\frac{n}{N} < 0.1$.

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \Pr(A \cup B) \\ \Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) &= 1 - \Pr(A \cup B) \\ \Pr(A \cup B) &= 1 - \Pr(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &= 1 - \Pr(\bar{A}) \Pr(\bar{B}) \quad (\text{om } A \text{ och } B \text{ oberoende}) \end{aligned}$$

Unionsregeln (oberoende händelser):

$$\begin{aligned} \Pr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - \Pr(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \\ &= 1 - \Pr(\bar{A}_1) \Pr(\bar{A}_2) \dots \Pr(\bar{A}_n) \end{aligned}$$

Exempel 22:

- Sannolikheten för minst en sexa vid fyra kast med en symmetrisk tärning
- Sannolikheten för minst en dubbelsexa vid 24 kast med två symmetriska tärningar

$$\begin{aligned} \Pr(\text{minst en sexa}) &= 1 - \Pr(\text{ingen sexa}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(\text{minst en dubbelsexa}) &= 1 - \Pr(\text{ingen dubbelsexa}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491 \end{aligned}$$