



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

## Finansiell statistik, vt-05

F21 Tidsserieanalys

## Tidsserier

Tvärsnittsdata

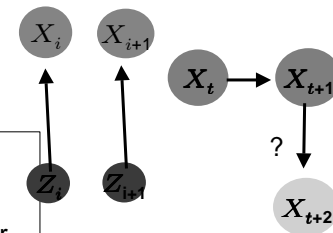


Observationer  $i=1, \dots, n$  på variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

oftast oberoende

ofta  
mönster/samband  
med andra variabler



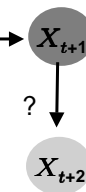
Tidsserie

Observationer  $t=1, \dots, T$  på variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_T$$

oftast beroende

prognoser

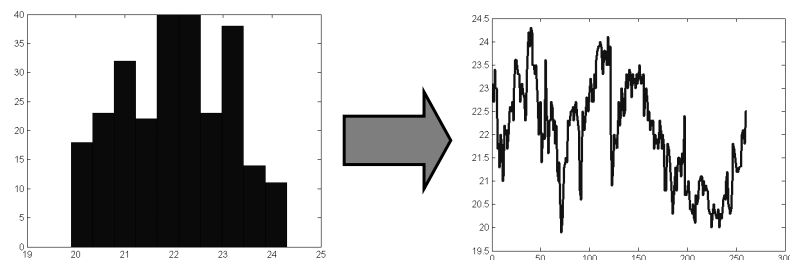


Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

2

## Förändring över tid



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

3

## Tidsseriekomponenter

Additiv modell

$$x_t = T_t + C_t + S_t + I_t$$

$T_t$  långsiktig trend,  
trendkomponent

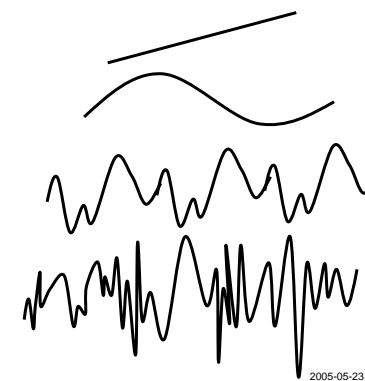
$C_t$  cyklisk komponent

$S_t$  säsongskomponent

$I_t$  slumpmässiga störningar

Multiplikativ modell

$$x_t = T_t C_t S_t I_t$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

4

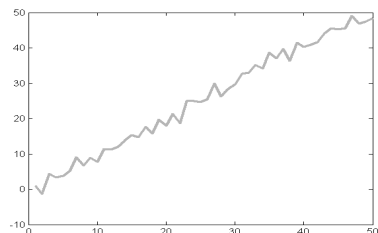
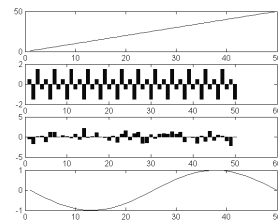
## Glidande medelvärden

$k$ -termers glidande medelvärde

$$z_t = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} x_{t-i} = \frac{1}{k} (x_{t-k+1} + x_{t-k+2} + \dots + x_t)$$

$k$ -termers glidande medelvärde med generella vikter

$$z_t = \sum_{i=0}^{k-1} w_{t-i} x_{t-i}$$



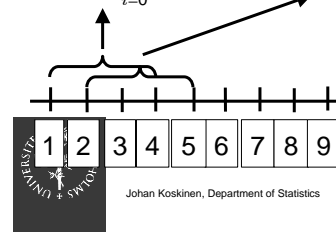
## Glidande medelvärden

Låt oss säga vi har  $k$  säsonger

då passar  $k$ -termers glidande medelvärde

$$z_{t-k/2+1/2} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{4-1} x_{t-i}$$

$$z_{2.5} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{4-1} x_{4-i} \quad z_{3.5} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{4-1} x_{5-i}$$



medelvärden av  
närliggande observationer

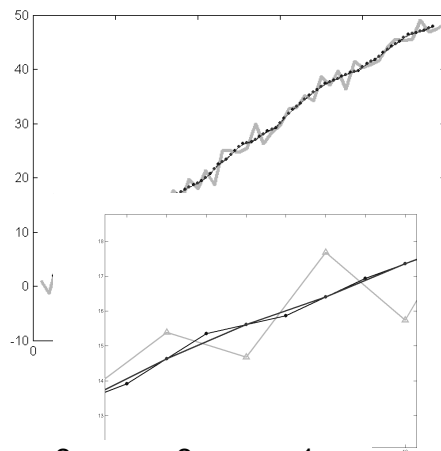
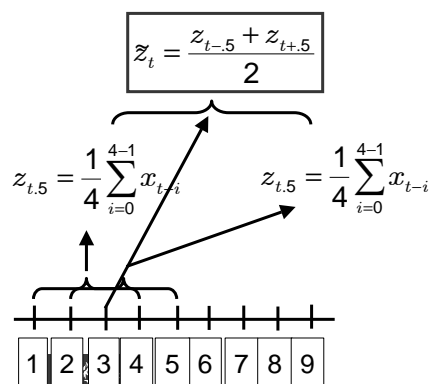
ger värden mellan  
observationer (när  $k$  jämn)

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

6

## Centrerade glidande medelvärden



$$z_3 = \frac{z_{2.5} + z_{3.5}}{2} = \frac{1}{2 \times 4} x_1 + \frac{2}{2 \times 4} x_2 + \frac{2}{2 \times 4} x_3 + \frac{2}{2 \times 4} x_4 + \frac{1}{2 \times 4} x_5$$

7

## Säsongindex

Låt oss säga vi har  $k$  säsonger

och använder  $k$ -termers glidande medelvärde

ges "preliminära" säsongsavvikelser för säsong  $i$  av

differenserna

$$\hat{S}_{ti} = x_t - z_t \quad \text{Additiv modell om } t \text{ tillhör säsong } i$$

ges "preliminära" säsongskoefficienter för säsong  $i$  av

$$\bar{S}_i = \frac{1}{n_i} \sum_t \hat{S}_{ti}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

8

## Säsongsindex

För att effekten av säsongsvariationen ej skall bidra till trenden skall de preliminära säsongskoefficienterna normeras så att de summerar till 0

$$\hat{S}_i = \bar{S}_i - \frac{1}{k} \sum_i \bar{S}_i$$

Tidsserien kan sedan säsongsrensas

ty om

$$x_t = T_t + S_t + I_t \approx T_t + I_t + \hat{S}_i$$

$$x_t - \hat{S}_i \approx T_t + I_t$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

9

## Säsongsindex - multiplikativ modell

Multiplikativ modell  $x_t = T_t C_t S_t I_t$

$$\hat{S}_{ti} = x_t / \bar{Z}_t \quad \begin{array}{l} \text{multiplikativ modell om } t \\ \text{tillhör säsong } i \end{array}$$

ges "preliminära" säsongskoefficienter för säsong  $i$  av

$$\bar{S}_i = \frac{1}{n_i} \sum_t \hat{S}_{ti}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

10

## Säsongsindex - multiplikativ modell

För att effekten av säsongsvariationen ej skall bidra till trenden skall de preliminära säsongskoefficienterna normeras så att de summerar till  $k$

$$\hat{S}_i = \bar{S}_i \frac{k}{\sum_i \bar{S}_i}$$

Tidsserien kan sedan säsongsrensas

ty om

$$x_t = T_t S_t I_t \approx T_t I_t \hat{S}_i$$

$$x_t / \hat{S}_i \approx T_t I_t$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

11

## Tidsserieregession

Observationer  $t = 1, \dots, T$  på variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_T$$

Om vi antar linjär trend

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \epsilon_t$$

Alltså en linjär regressionsmodell med tiden som förklarande variabel

Hur är det med antagandena för  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_T$  ?



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

12

## Tidsserieregession

Observationer  $t = 1, \dots, T$  på variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_T$$

Om vi antar exponentiell trend

$$x_t = \beta_0 e^{\beta_1 t} \varepsilon_t$$

Får vi en linjär regressionsmodell med tiden som förklarande variabel genom att logaritmera

$$\log(x_t) = \log(\beta_0 e^{\beta_1 t} \varepsilon_t)$$

$$\log(x_t) = \log(\beta_0) + \log(e^{\beta_1 t}) + \log(\varepsilon_t)$$

$$x_t' = \beta_0' + \beta_1 t + \varepsilon_t'$$

Hur är det med antagandena för  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T$ ?

2005-05-23

13

## Exponentiell utjämning

Antag att vi har observationerna  $x_1, x_2, \dots, x_T$

Gör vi en prediktion för  $T+1$  bara mha  $x_T$  tar vi inte hänsyn till att  $x_T$  innehåller en hel del tillfälliga avvikelser

Gör vi en prediktion för  $T+1$  mha alla  $x_1, x_2, \dots, x_T$  har  $x_1$  samma inflytande som  $x_T$ ?

Lösning

$$\hat{x}_2 = x_1$$

$$\hat{x}_3 = \alpha x_2 + (1 - \alpha) \hat{x}_2$$

$$\hat{x}_4 = \alpha x_3 + (1 - \alpha) \hat{x}_3$$

$\vdots$

$$\hat{x}_{T+1} = \alpha x_T + (1 - \alpha) \hat{x}_T$$

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

14

## Exponentiell utjämning

M.a.o. kan det utjämnade värdet för tidpunkt  $t$  skrivas

$$\hat{x}_t = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{x}_{t-1}$$

$$= \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) (\alpha x_{t-2} + (1 - \alpha) \hat{x}_{t-2})$$

$$= \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha) (\alpha x_{t-2} + (1 - \alpha) (\alpha x_{t-3} + (1 - \alpha) \hat{x}_{t-3}))$$

$\vdots$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{t-1} (1 - \alpha)^k x_{t-k} + (1 - \alpha)^t \hat{x}_0$$

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

15

## Exponentiell utjämning

Ett kriterium för att välja utjämningskonstanten  $\alpha$

välj det  $\alpha$  som minimerar

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{x}_t)^2}{T}$$

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

16