

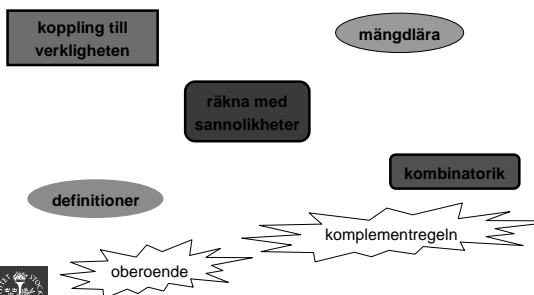


Johan, Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F2 Sannolikhets teori

Sannolikhetslära



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

2

Mängder

En mängd S är en samling element (objekt) e_1, e_2, \dots, e_n

ex: S kan bestå av talen 1, 2, 4, 5
och betecknas $S = \{1, 2, 4, 5\}$

En mängd S kan vara ändlig

ex: $S = \{1, 2, 4, 5\}$

En mängd S kan vara oändlig och uppräknarlig

ex: S kan bestå av alla naturliga tal 0, 1, 2, 3, ...
 $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

3

Mängder (forts)

En mängd S kan vara överuppräknad

ex: S kan bestå av alla tal mellan 0 och 1
 $S = [0,1]$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

4

Delmängder

En delmängd A av S

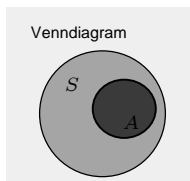
$$A \subseteq S$$

alla element som finns i A
 finns även i S

(En äkta delmängd A av S

$$A \subset S$$

det finns minst ett element i S
 som inte finns i A)



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

5

Delmängder: exempel

ex: $S = \{1,2,4,5\}$, låt $A \subseteq S$ vara alla jämna tal i S

$$A = \{2,4\}$$

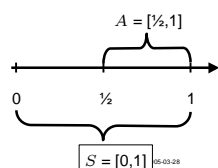
ex: $S = \{0,1,2,3, \dots\}$, låt $A \subseteq S$ vara alla jämna tal i S

$$A = \{0,2,4,6,8, \dots\}$$



ex: $S = [0,1]$ låt $A \subseteq S$ vara
 alla tal större eller lika med $\frac{1}{2}$ i S

$$A = [\frac{1}{2}, 1]$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

6

Komplementmängder

Vi låter S vara grundmängden och $A \subseteq S$
komplementmängden till A är

$$\bar{A} \subseteq S$$

alla element som finns i S men inte i A



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

7

Komplementmängder: exempel

ex: $S = \{1, 2, 4, 5\}$, låt $A \subseteq S$ vara alla jämna tal i S

$$A = \{2, 4\}$$

$$\bar{A} = \{1, 5\}$$

ex: $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, låt $A \subseteq S$ vara alla jämna tal i S

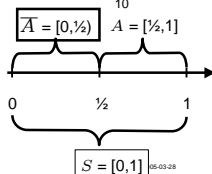
$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, \dots\}$$



ex: $S = [0, 1]$ låt $A \subseteq S$ vara
alla tal större eller lika med $\frac{1}{2}$ i S

$$A = [\frac{1}{2}, 1]$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

8

Union & snitt

Unionen av A och B

$$A \cup B$$

är mängden av alla element
som tillhör A , B eller både A och B



Snittet av A och B

$$A \cap B$$

är mängden av alla element
som tillhör både A och B



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

9

Union: exempel

ex: $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{2, 5\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5\}$

ex: $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$, $B = \{0, 1, 3, 4\}$,
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, \dots\}$

ex: $S = [0, 1]$ låt $A \subseteq S$ vara
 alla tal större eller lika med $\frac{1}{2}$ i S
 $A = [\frac{1}{2}, 1]$, $B = [\frac{1}{4}, 1]$,
 $A \cup B = [\frac{1}{4}, 1]$

$S = [0, 1]$

Johannes Koskinen, Department of Statistics

Snitt: exempel

ex: $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{2, 5\}$, $A \cap B = \{2\}$

ex: $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$, $B = \{0, 1, 3, 4\}$,
 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$

ex: $S = [0, 1]$ låt $A \subseteq S$ vara
 alla tal större eller lika med $\frac{1}{2}$ i S
 $A = [\frac{1}{2}, 1]$, $B = [\frac{1}{4}, 1]$,
 $A \cap B = [\frac{1}{2}, 1]$

$S = [0, 1]$

Johannes Koskinen, Department of Statistics

Tomma mängden och Disjunkta mängder

Den delmängd av S som inte innehåller några element:
 Tomma mängden
 \emptyset

Om snittet av A och B är tomt
 $A \cap B = \emptyset$
 är A och B disjunkta

obs! inga element
 gemensamma

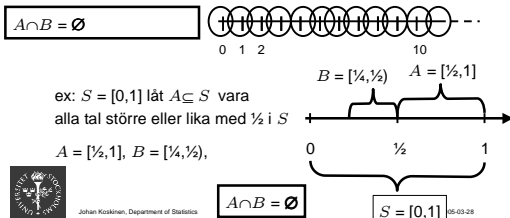
Johannes Koskinen, Department of Statistics

Diskunkta mängder: exempel

ex: $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$, $B = \{5\}$,

$$A \cap B = \{\} = \emptyset$$

ex: $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

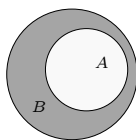
13

Några följder

Om A är en delmängd av B :

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

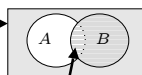
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$



DeMorgans Lagar:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



(komplementet till)



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

14

Sannolikheter

Väl definierad situation där vi kan skriva upp utfallsrummet
 $S \approx$ mängden av alla möjliga händelser (utfall)

exempel:

- slantsingling $S = \{\text{krona, klave}\}$
- Sve.-Bul $S = \{\text{vinst, oavgjort, förlust}\}$
- ABB kurs $S = \{\text{upp, ner}\}$
- tärning $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

15

Sannolikheter forts

- För alla händelser $A \subseteq S$ definierar vi sannolikheter P så att
- def $0 \leq P(A) \leq 1$
- och eftersom S skall vara alla möjl. händelser
- def $P(S) = 1$
- exempel:
- sannolikheten att Sverige förl. mot Bul.
- $P(\{\text{förlust}\}) = 1/3$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

16

Sannolikheter forts

exempel forts:

eftersom

$$\{\text{förlust}\} = \overline{\{\text{vinst, oavgjort}\}}$$

verkar det rimligt att

$$P(\{\text{förlust}\}) = P(\overline{\{\text{vinst, oavgjort}\}})$$

och $S = \{\text{vinst, oavgjort, förlust}\}$, och $P(S) = 1$

$$P(\overline{\{\text{förlust}\}}) = 1 - P(\{\text{förlust}\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

17

Sannolikheter forts

För disjunkta händelser A och B gäller

def $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

exempel: tärning; $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

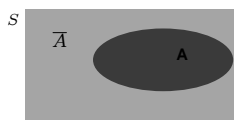
$P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = 1/6 + 1/6 = 1/3$

$$S = A \cup \bar{A}$$

$$P(S) = P(A \cup \bar{A})$$

$$1 = P(A) + P(\bar{A})$$

def $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

18

Sannolikheter forts

Additionsregeln för händelser A och B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Varför?

$A \cup B$ = {alla element som tillhör A , B eller både A och B }

= {alla element som tillhör A men inte B }

\cup {alla element som tillhör B men inte A }

\cup {alla element som tillhör både A och B }

$$= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics



Slh. additionsregeln forts

Alltså gäller det att

$$P(A \cup B) = P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B))$$

disjunkta

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

Men vi ser också (genom definitionerna) att

$$P(A) + P(B) = P((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)) + P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B))$$

disjunkta

disjunkta

$$P(A) + P(B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

20

Slh. additionsregeln forts

Kombinerar vi

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

med

$$P(A) + P(B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

får vi

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A \cup B)$$



lätt med Venndiagram?

Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

21

Slh en "sista" definition

- Vi måste tilldela den delmängd av S som inte innehåller några element, Tomma mängden, \emptyset , en sannolikhet
- \emptyset : den omöjliga händelsen
- S : alla möjliga händelser
- $P(S) = 1$, så

$$P(\emptyset) = P(S) = 1 - P(S) = 0$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

22

Hur relaterar dessa slh till verkligheten?

Slantsingling: "många" slantsinglingar

$$P(\{\text{krona}\}) \approx \frac{\text{antalet krona}}{\text{antalsinglingar}}$$

intuitivt? realistiskt? tillräckligt realistiskt?

Vid (exempelvis) unika försök ej tolkbart

ex: Sverige - Bulgarien

måste vi ändå ha $P(\{\text{vinst}\})$?

satsa pengar på resultatet...



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

23

schema!

Hur relaterar dessa slh till verkligheten?

grad av tilltro - mått på osäkerhet

vi vet att $P(S) = 1$ och $P(\emptyset) = 0$ med säkerhet

för övriga händelser A har vi bara vår subjektiva uppfattning

ex: varje dag har Lantis "dagens pasta- eller risrätt"

är det pasta finns det (i princip) minst en rätt jag kan tänka mig att äta; alternativet: gå till veg.

för att avgöra: gå upp eller ner på onsdag

$P(\{\text{pasta}\}) = 0,9$

bygger på erfarenhet, etc. Obs! menyn finns på nätet...



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

24

Hur relaterar dessa slh till verkligheten?

fysik/logik

ex: tärning

sex sidor

lika stora

symmetri: slh få 6:a lika stor som slh få 1:a



$$P(\{6\}) = \frac{\text{antalet sätt att få 6:a}}{\text{antal sidor}}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

25

Slh verkligheten? logik-aber

men 1: skiljer sig från subjektiv?

kan säga: jag tror $P(\{6\}) = 99/100$

mer intuitivt: jag tror $P(\{6\}) = 1/6$

just pga symmetrin

men 2: absolut sant? hur tärningen kastas...

jfr slantsingling



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

26

Slh verkligheten? Sammanfattning

Frekventisttolkning: slh för en händelse A är

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

A inträffar m ggr i n identiska (oberoende) försök

Klassisk: om antalet utfall som är gynnsamma för A är $g(A)$

$$P(A) = \frac{g(A)}{n}$$

n är antalet utfall

Subjektiv: vår tro på att A kommer att inträffa (är sann) $P(A)$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

27

Forts. slh: viktiga begrepp; betingning

Betingad sannolikhet för A givet att B inträffat



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

hur stor del av slh för A ligger i B

ex: låt A vara händelsen stud. klarar tentan i Finansiell statistik

låt B vara händelsen stud. har läst kurslitteraturen

antag $P(A \cap B) = 3/8$ och $P(B) = 1/2$

jfr: om det var så
att $P(A) = 1/2$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

28

Forts. slh: viktiga begrepp; betingning

exempel på betingad slh:

låt B vara händelsen att ABBs kurs går upp en specifik dag

låt A vara händelsen att ABBs kurs går upp dagen efter

hur tolkar vi då $P(A|B)$?



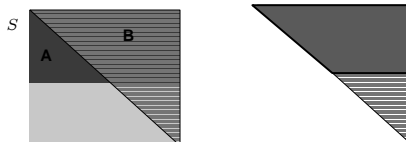
Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

29

Forts. slh: viktiga begrepp; betingning

Att betinga på att händelsen B inträffat när man beräknar
slh för A är detsamma som att byta utfallsrum, från S till B



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

30

Forts. slh: viktiga begrepp; multiplikationsregeln

Om vi har $P(A|B)$ och $P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Visa genom att lösa ut $P(A \cap B)$ ur föreg def

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ex: låt A vara händelsen Bertil missar pendeltåget

låt B vara händelsen Bertil missar bussen

antag $P(A|B) = 0,95$ och $P(B) = 0,05$

vad är slh Bertil missar både bussen och pendeln?



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

31

Forts. slh: viktiga begrepp; oberoende

Om sannolikhet för A är oförändrad givet att B inträffat

$$P(A|B) = P(A)$$

är A och B oberoende

ex: låt A vara händelsen att en råtta utvecklar cancer

låt B vara händelsen att råtten ätit stekt potatis

antag för sannolikheten att en råtta ätit stekt potatis och utvecklar cancer

$P(A \cap B) = 1/4000$, samt $P(A) = 1/4$ och $P(B) = 1/1000$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4000}{1/1000} = \frac{1}{4} = P(A)$$

tolkning?



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

32

Forts. slh: viktiga begrepp; oberoende

Om A och B är oberoende

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Visa! Multiplikationsregeln

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

enligt föreg. def.

ex: låt A vara händelsen slumpvis vald pers kvinna

låt B vara händelsen slumpvis vald pers röker

om oberoende samt $P(A) = 1/2$ och $P(B) = 1/15$

slh rökande kvinna: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/30$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

33

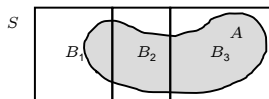
Forts. slh: viktiga begrepp; lagen om total slh

Om S kan delas upp i disjunkta delmängder

$$S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$

kan $P(A)$ skrivas som

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \\ = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

34

lagen om total slh: exempel (Lee, tab 5.8)

ex: låt A vara händelsen att en viss aktie går upp

låt B vara händelsen marknaden "bra"

låt N vara händelsen marknaden "normal"

låt D vara händelsen marknaden "dålig"

antag att vi vet

slh aktie upp och markn bra:

$$P(A \cap B) = 0,28$$

slh aktie upp och markn normal:

$$P(A \cap N) = 0,16$$

slh aktie upp och markn dålig:

$$P(A \cap D) = 0,05$$

vi vill veta slh aktie upp:

$$P(A)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

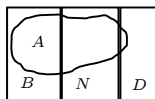
2005-03-28

35

lagen om total slh: exempel (Lee, tab 5.8) forts

enligt lagen om total sannolikhet

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap N) + P(A \cap D) \\ = 0,28 + 0,16 + 0,05 \\ = 0,49$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-03-28

36