



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F8 Kontinuerliga variabler (forts)

Egenskaper hos Normalfördelningen

För normalfördelad s.v. X
 $X \in N(\mu, \sigma^2)$

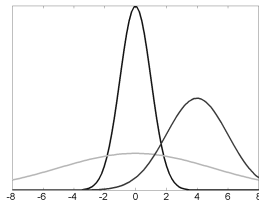
Väntevärde: $E(X) = \mu$

Varians: $\text{Var}(X) = \sigma^2$

Standardavvikelse: $\text{SD}(X) = \sigma$

Median: $P(X \leq \text{Md}) = 1/2$

$\Rightarrow \text{Md} = \mu$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

2

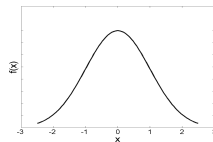
Egenskaper hos Normalfördelningen

För normalfördelad s.v. X
 $X \in N(\mu, \sigma^2)$

Väntevärde: $E(X) = \mu$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

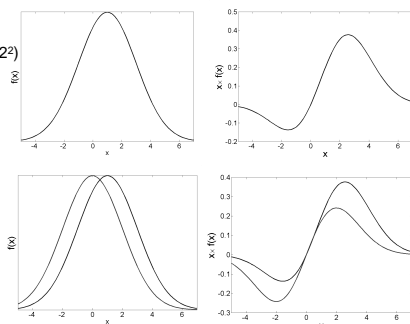
2005-04-15

3

Egenskaper hos Normalfördelningen

Vad händer?

$$X \in N(\mu = 1, \sigma^2 = 2^2)$$



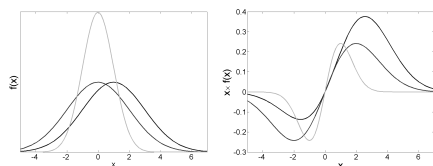
$-\mu$



Johann Koski

Egenskaper hos Normalfördelningen

$1/\sigma$



Johann Koski, Department of Statistics

2005-04-15

5

Egenskaper hos Normalfördelningen

Generellt för s.v. X

med väntevärde: $E(X) = \mu$

$$Y = X - \mu$$

också s.v.!!!

$$E(Y) = E(X - \mu)$$

$$= E(X) - \mu$$

linearitet

$$= 0$$

och varians: $\text{Var}(X) = \sigma^2$

$$Y = X / \sigma$$

också s.v.!!!

$$\text{Var}(Y) = 1$$



6



Johann Koski, Department of Statistics

Egenskaper hos Normalfördelningen

För normalfördelad s.v. X

$X \in N(\mu, \sigma^2)$

kombinera föregående

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{också s.v.!!!}$$

$$E(Z) = 0$$

$$\text{Var}(Z) = 1$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

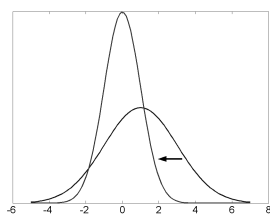
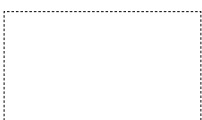
7

Egenskaper hos Normalfördelningen

Så $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ stokastisk var med $E(Z) = 0$ med $\text{Var}(Z) = 1$

men vilken typ?

$f_X(x) \xrightarrow{?} f_Z(z)$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

8

Egenskaper hos Normalfördelningen: z-transformation

För normalfördelad s.v. X

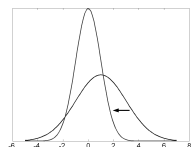
$X \in N(\mu, \sigma^2)$

Väntevärde: $E(X) = \mu$

Varians: $\text{Var}(X) = \sigma^2$

är

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in N(0, 1)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

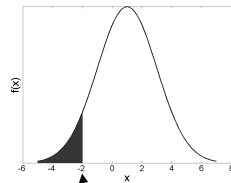
2005-04-15

9

Normalfördelningen: fördelningsfunktion

För normalfördelat s.v. X
 $X \in N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dt \\ &= ? \end{aligned}$$



$$F(-2) = P(X \leq -2)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

10

Normalfördelningen: fördelningsfunktion

Ingen sluten formel

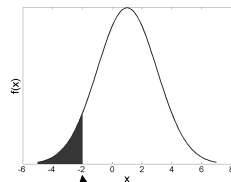
Använd dator

Minitab:

Calc ->

Probability Distributions ->

Normal



$$F(-2) = P(X \leq -2)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

11

Normalfördelningen: fördelningsfunktion

Excel:

med formel:

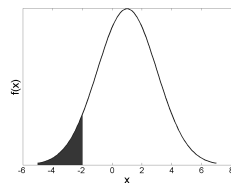
=NORMFÖRD(1.5;0;1;SANT)

infoga funktionsknappen



Statistik ->

NORMFÖRD



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

12

Normalfördelningen: fördelningsfunktion

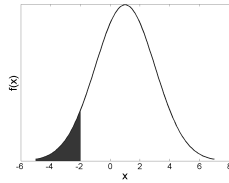
Alternativ: Tabell (t.ex. A3)

Problem: "många"
kombinationer av μ och σ^2

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in N(0,1)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

13

Normalfördelningen: fördelningsfunktion

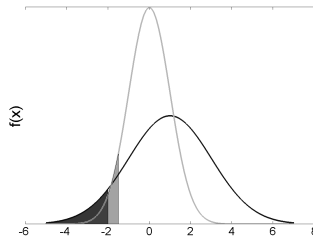
I stället för

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Kan vi "beräkna"

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

Standardnormalfördelningen: fördelningsfunktion

$$Z \in N(0,1)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-z^2/(2\sigma^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Kallas även standardnormal fördelning; standardiserad
normalfördelning

Fördelningsfunktionen tabulerad

$$F(z) = P(Z \leq z) = \Phi(z)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

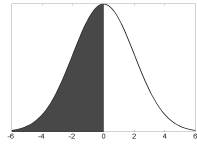
15

Normalfördelningen exempel

Antag att priset vi får betala för en vara imorgon minus dagens pris

$$X \in N(0, 2^2)$$

Sannolikheten för prisökning?



$$P(X > 0) \quad \text{symmetri:} \quad = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 0) \quad \text{komplementregeln:} \quad = 1 - P(X \leq 0) \\ = 1 - F(0)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

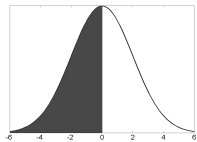
2005-04-15

16

Normalfördelningen exempel

transformera:

$$P(X \leq 0) = P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{0 - \mu}{\sigma}\right] \\ = P(Z \leq 0) \\ = \Phi(0)$$



tabell: 1/2 generellt nf: $P(X \leq \mu) = 1/2$

Sannolikheten för prisökning: $1 - 1/2 = 1/2$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

17

Normalfördelningen exempel

Sannolikheten för prisökning men högst 2 enheter?

$$P(0 < X \leq 2) = P(\{X \leq 2\} \cap \{\overline{X \leq 0}\})$$

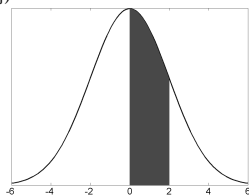
eftersom händelserna

$$\{X \leq 0\} \quad \text{och} \quad \{\overline{X \leq 0}\}$$

delar upp utfallsrummet

enligt LTS:

$$P(X \leq 2) = P(\{X \leq 2\} \cap \{X \leq 0\}) \\ + P(\{X \leq 2\} \cap \{\overline{X \leq 0}\})$$



$$\text{lös ut} \quad P(0 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(\{X \leq 2\} \cap \{X \leq 0\})$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

18

Normalfördelningen exempel

Sannolikheten för prisökning men högst 2 enheter?

$$P(0 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(\{X \leq 2\} \cap \{X \leq 0\})$$

Eftersom

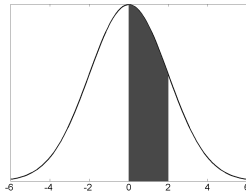
$$\{X \leq 0\} \subset \{X \leq 2\} \cap \{X \leq 0\}$$

gäller

$$P(\{X \leq 2\} \cap \{X \leq 0\}) = P(X \leq 0)$$

Den sökta sannolikheten för
prisökning men högst 2
enheter:

$$P(0 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

19

Normalfördelningen exempel

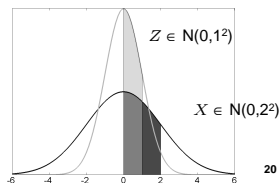
$$P(0 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0)$$

$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{2 - \mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{0 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(0)$$

$$= 0,841 - 0,5 = 0,34$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

20

Egenskaper hos Normalfördelningen

För oberoende likafördelade normalfördelad s.v. X_1, X_2, \dots, X_n

$$X_j \in N(\mu, \sigma^2)$$

sedan tidigare

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= n\mu \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) \\ &= n\sigma^2 \end{aligned}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

21

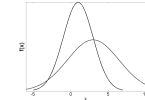
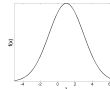
Egenskaper hos Normalfördelningen

Fördelning för $X_1 + X_2 + \dots + X_n$?

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$Y \in N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$X_i \in N(1, 2^2)$$



$$Y \in N(3 \times 1, 3 \times 2^2)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

22

Relaterade fördelningar: intro

För oberoende likafördelade normalfördelad s.v. Z_1, Z_2, \dots, Z_n

$$Z_i \in N(0, 1)$$

och låt $Y_i = Z_i^2$.

$$E[Y_i] = E(Z_i^2)$$

och eftersom

$$\text{Var}[Z_i] = E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2 = E(Z_i^2) - 0$$

är

$$E[Y_i] = \text{Var}(Z_i)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

23

Relaterade fördelningar: intro

Sedan tidigare får vi

$$E[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n] = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n)$$

$$= \text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2) + \dots + \text{Var}(Z_n)$$

$$= n\sigma^2 = n$$

Summan alltid positiv

Väntevärde = antalet variabler

Fördelning för $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$?



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-15

24