



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

## Finansiell statistik, vt-05

F22 Tidsserieanalys

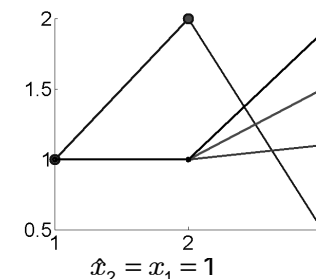
## Exponentiell utjämning

Antag att vi har tre observationer  $x_1, x_2, x_3$

1; 2; 0,5

vi provar exponentiell utjämning med utjämningskonstanterna

$\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$



$$\hat{x}_2 = x_1 = 1$$

$$\hat{x}_2 = x_1 = 1$$

$$\hat{x}_2 = x_1 = 1$$

$$\hat{x}_3 = 0,1x_2 + (1-0,1)\hat{x}_2$$

$$\hat{x}_3 = 0,5x_2 + (1-0,5)\hat{x}_2$$

$$\hat{x}_3 = 0,9x_2 + (1-0,9)\hat{x}_2$$

$$= 0,1 \times 2 + (1-0,1) \times 1$$

$$= 0,5 \times 2 + (1-0,5) \times 1$$

$$= 0,9 \times 2 + (1-0,9) \times 1$$

$$= 1,1$$

$$= 1,5$$

$$= 1,9$$

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

2

## Exponentiell utjämning

Ett kriterium för att välja utjämningskonstanten  $\alpha$

välj det  $\alpha$  som minimerar

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{x}_t)^2}{T}$$

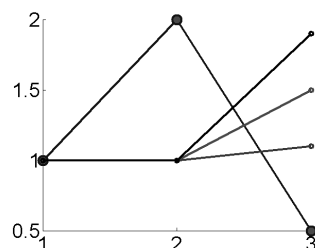
med utjämningskonstanterna

$\alpha = 0,1; 0,5; 0,9$

$\alpha = 0,1$

för alla tre

$$MSE = \frac{(x_3 - \hat{x}_3)^2}{3} = \frac{(0,5 - 1,1)^2}{3} = 0,12$$



$$\hat{x}_1 - x_1 = 0$$

$\alpha = 0,5$

$\alpha = 0,9$

$$\hat{x}_2 - x_2 = 0$$

$$MSE = \frac{(0,5 - 1,5)^2}{3} = 0,33$$

$$MSE = \frac{(0,5 - 1,9)^2}{3} = 0,65$$

Johan Koskinen, I

## Holt-Winters Prediktionsmodell

Antag att tidsserien kan beskrivas av en modell

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

men att  $\beta_0$  och  $\beta_1$  sakta förändras över tiden

antag att vi vid tiden för  $T-1$  har en skattning

$$a_0(T-1)$$

av  $\beta_0$  (kallas permanent komponent)

den genomsnittliga nivån på tidsserien

och att vi har en skattning

$$b_1(T-1)$$

av  $\beta_1$  (kallas trendkomponent) riktningkoefficienten

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

4

## Holt-Winters Prediktionsmodell

Får vi en ny observation vid tidpunkten  $T$  kan vi uppdatera skattningarna

$$a_0(T-1) \xrightarrow{\text{uppdatera}} a_0(T)$$

$$b_1(T-1) \xrightarrow{\text{uppdatera}} b_1(T)$$

och tidsserien kan beskrivas av en modell  $x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$

med uppdaterade parametrar så att en prediktion för  $x_{T+\tau}$  ges av

$$\hat{x}_{T+\tau} = a(T)_0 + b_1(T)\tau$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

5

## Holt-Winters: uppdatering

Ny observation  $x_T$  vid tidpunkten  $T$

$$a_0(T) = \alpha x_T + (1 - \alpha)[a_0(T-1) + b_1(T-1)]$$

$$b_1(T) = \beta[a_0(T) - a_0(T-1)] + (1 - \beta)b_1(T-1)$$

Exempel:

$$\alpha = 0,1 \quad \beta = 0,2$$

$$x_T : 2$$

$$a_0(T-1) : 1,5$$

$$b_1(T-1) : 0,1$$

$$a_0(T) = 0,1 \times 2 + (1 - 0,1)[1,5 + 0,1] = 1,64$$

$$b_1(T) = 0,2[1,64 - 1,5] + (1 - 0,2) \times 0,1 = 0,108$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

6

## Holt-Winters: uppdatering

med uppdaterade parametrar så ges en punktskattning för  $x_{T+\tau}$  av

$$\hat{x}_{T+\tau} = a(T)_0 + b_1(T)\tau$$

$$= 1,64 + 0,108\tau$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

7

## Autoregressiva processer

Antag deterministisk modell för variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_T$$

enligt

$$X_t = \phi X_{t-1}$$

alltså, morgondagens värde alltid lika med dagens ggr

konstant  $\phi$

antag  $\phi = 0,5$

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 0,5X_1 = 0,5$$

$$X_3 = 0,5X_2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

$$X_4 = 0,5X_3 = 0,5 \times 0,25 = 0,125 \quad \text{osv}$$



Johan Kt

2005-05-23

8

## Autoregressiva processer

Antag att tidsserien dagligen utsätts för slumpmässiga störningar

alltså, morgondagens värde alltid lika med dagens ggr konstant  $\phi$  + slumpterm

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ex:  $\phi = 0,5$

$$\varepsilon_2 = 0,3 \quad \varepsilon_3 = -0,1 \quad \varepsilon_4 = 1,5$$

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 0,5X_1 + \varepsilon_2 = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

$$X_3 = 0,5X_2 + \varepsilon_3 = 0,5 \times 0,8 - 0,1 = 0,3$$

$$X_4 = 0,5X_3 + \varepsilon_4 = 0,5 \times 0,3 + 1,5 = 0,65$$



2005-05-23

9

## Autoregressiva processer

M.a.o.  $\phi = 0,5$

nästföljande värde: hälften av nuvarande värde + slump

$\phi = 0$

nästföljande värde: inget av nuvarande värde + slump

$\phi = 1$

nästföljande värde: nuvarande värde + slump



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

10

## Autoregressiva processer

En autoregressiv process av 1:a ordningen, AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

där  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  är oberoende likafördelade  $N(0, \sigma^2)$

- variabeln  $\varepsilon_t$  är normalfördelad
- variabeln  $\varepsilon_t$  har väntevärde 0
- $\varepsilon_t$  och  $\varepsilon_k$  är statistiskt oberoende för alla  $t \neq k$
- variablerna  $\varepsilon_t$  har konstant varians  $\sigma^2$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

11

## Autoregressiva processer

Givet ett värde  $X_{T-1}$  kan vi beräkna väntevärdet  $X_T$

$$\begin{aligned} E(X_T | X_{T-1}) &= E(\phi X_{T-1} + \varepsilon_T) \\ &= \phi X_{T-1} + E(\varepsilon_T) \\ &= \phi X_{T-1} \end{aligned}$$

och variansen

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_T | X_{T-1}) &= \text{Var}(\phi X_{T-1} + \varepsilon_T) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_T) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

12

# Autoregressiva processer

Vi har även för ett givet  $X_{T-1}$  att

$$X_T \mid X_{T-1} \in N(\phi X_{T-1}, \sigma^2)$$

