



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

## Finansiell statistik, vt-05

F9 Kontinuerliga variabler (forts)

---

---

---

---

---

---

---

## Egenskaper hos Normalfördelningen

För oberoende likafördelade normalfördelad s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

sedan tidigare

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ = n\mu$$

och

$$\text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) \\ = n\sigma^2$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

2

---

---

---

---

---

---

---

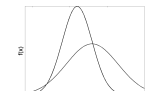
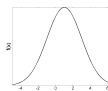
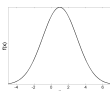
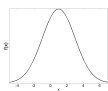
## Egenskaper hos Normalfördelningen

Fördelning för  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  ?

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$Y \in N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$X_i \in N(1, 2^2)$$



$$Y \in N(3 \times 1, 3 \times 2^2)$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

3

---

---

---

---

---

---

---

## Summor av normalfördelade s.v.

För oberoende normalfördelad s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  med

$$X_i \in N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

sedan tidigare

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \end{aligned}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

4

## Summor av normalfördelade s.v. ex.

Antag att en kunds nöjdhet med vara a är

$$X \in N(\mu_X, \sigma_X^2) \text{ och med vara b (ober.) } Y \in N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Om en kund väljer den vara som ger "mest" nöjdhet vad är sannolikheten att a väljes?

Nöjdhet större när  $X > Y$

Sökt slh:  $P(X > Y) = P(X - Y > 0)$

Låt:  $Z = X - Y$

$$Z \in N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

5

## Summor av normalfördelade s.v. ex.

Sökt slh:  $P(Z > 0)$

Antag  $X \in N(\mu_X = 1, \sigma_X^2 = 1^2)$ ,  $Y \in N(\mu_Y = 1.5, \sigma_Y^2 = 2^2)$

$$Z \in N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

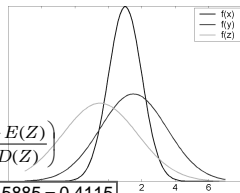
$$Z \in N(1 - 1.5; 1 + 4)$$

$$Z \in N(-0.5; 5)$$

$$P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Z - E(Z)}{SD(Z)} \leq \frac{0 - E(Z)}{SD(Z)}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0.2236) = 1 - 0.5885 = 0.4115$$



Johann

## Relaterade fördelningar: intro

För oberoende likafördelade normalfördelad s.v.  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$

$Z_i \in N(0,1)$

och låt  $Y_i = Z_i^2$ ,

$$E[Y_i] = E(Z_i^2)$$

och eftersom

$$\text{Var}[Z_i] = E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2 = E(Z_i^2) - 0$$

är

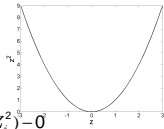
$$E[Y_i] = \text{Var}(Z_i)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

7



## Relaterade fördelningar

Sedan tidigare får vi

$$E[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n] = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n)$$

$$= \text{Var}(Z_1) + \text{Var}(Z_2) + \dots + \text{Var}(Z_n)$$

$$= n\sigma^2 = n$$

Fördelning för  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ ?



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

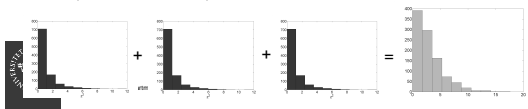
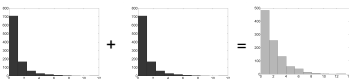
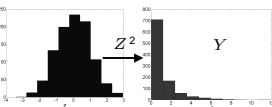
8

## Relaterade fördelningar

Fördelning för  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ ?

Summan alltid positiv

Väntevärde = antalet variabler



## $\chi^2$ -Fördelningen

Om oberoende likafördelade normalfördelad s.v.  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$

$$Z_i \in N(0,1), \text{ och } Y_i = Z_i^2$$

$$V = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$V$  är en chitvåfördelad s.v.

$$V \in \chi^2(v)$$

Enda parameter: antal frihetsgrader,  $v$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

10

---

---

---

---

---

---

---

---

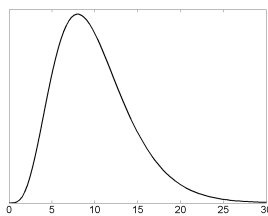
## $\chi^2$ -Fördelningen

För  $V$  en chitvåfördelad s.v.

$$E[V] = v$$

$V \in \chi^2(v)$ , antal frihetsgrader  $v=1,2,\dots$

$$\text{Var}[V] = 2v$$



Jukka

2005-04-18

11

---

---

---

---

---

---

---

---

## $\chi^2$ -Fördelningen

Varför intressant?

Fördelning för kvadrerade avvikelser...

(senare) t.ex.  $\chi^2$ -test, summor av:

$$\frac{(\text{observerade värden} - \text{förväntade värden})^2}{\text{förväntade värden}}$$

framförallt, stickprovsvariansen:  $S^2$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-18

12

---

---

---

---

---

---

---

---

## $\chi^2$ -Fördelningen

För oberoende normalfördelat s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  med  $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

Vad kan vi säga om storleken på avvikelserna:

$$s^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

●

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n)$$

2

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})} \in N(0,1) \Rightarrow \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})} \right]^2 \in \chi^2(1)$$

3

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2 / n} + \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

2005-04-18

13

## $\chi^2$ -Fördelningen

Eftersom

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2 / n} + \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n)$$

3

Borde

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)$$

liksom för  $N(0,1)$   
använder vi tabell.

Lee A5



Johann Korkkainen, Department of Statistics

2005-04-18

14

## Student $t$ -fördelningen

Nu vet vi att för oberoende normalfördelat s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  med  $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})} \in N(0,1)$$

vad händer om vi ersätter med

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

alltså:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(s / \sqrt{n})} \in ?$$



Johann Korkkainen, Department of Statistics

2005-04-18

15

## Student $t$ -fördelningen

För oberoende normalfördelad s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  med  $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

säger vi att

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{(s/\sqrt{n})} \in t(\nu)$$

följer en  $t$ -fördelningen

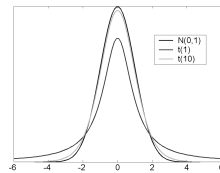
med antal frihetsgrader

$\nu = 1, 2, \dots$

där  $\nu = n-1$

liksom för  $N(0,1)$  och  $\chi^2$   
använder vi tabell.

Lee A4



16

## F-fördelningen

Nu vet vi att för oberoende normalfördelad s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  med  $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})} \in N(0,1) \Rightarrow \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})} \right]^2 \in \chi^2(1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(s/\sqrt{n})} \in t(\nu) \Rightarrow \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{(s/\sqrt{n})} \right]^2 \in ?$$



Juha Korkkinen, Department of Statistics

2005-04-18

17

## F-fördelningen

För oberoende normalfördelad s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  med  $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

$$T^2 = \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{(s/\sqrt{n})} \right]^2 \in F(1, n-1)$$

För oberoende s.v.  $U \in \chi^2(\nu)$  och  $V \in \chi^2(m)$

$$\frac{U/\nu}{V/m} \in F(\nu, m)$$

liksom för  $N(0,1)$ ,  $\chi^2(\nu)$  och  $t(\nu)$   
använder vi tabell.

Lee A6

2005-04-18

18

## Centrala gränsvärdessatsen (CGS)

För oberoende likafördelade s.v.  $X_1, X_2, \dots, X_n$   
fördelade som  $X$  med väntevärde  $E(X)$  och varians  $\text{Var}(X)$

gäller

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = E(X)$$

och

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} \text{Var}(X)$$



---

---

---

---

---

---

---

---

## Centrala gränsvärdessatsen (CGS)

saft under ganska generösa förhållanden  
CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN:

$$\bar{X} \text{ approximativt} \in N(E(X), \text{Var}(X))$$



---

---

---

---

---

---

---

---