



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

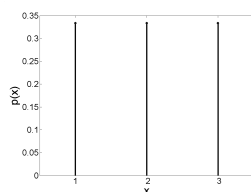
Finansiell statistik, vt-05

F11 CGS, ex. binomialoption, punkt- och intervallskattning

CGS exempel

Antag att vi bara drar tal slumpmässigt m.å. från $(0,1,2)$

x	$p(x)$
1	1/3
2	1/3
3	1/3



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

2

CGS exempel

Dra två element slumpmässigt m.å. X_1, X_2

x_1, x_2	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$	\bar{x}	\mathcal{E}	$p(x)$
1,1	$(1/3)(1/3)$	1	1	1/9
1,2	"	1,5	1,5	2/9
1,3	"	2	1,5	2/9
2,1	"	1,5	2	3/9
3,1	"	2	2,5	2/9
2,2	"	2	2,5	2/9
2,3	"	2,5	3	1/9
3,2	"	2,5	3	1/9
3,3	"	3		



Johan Koskinen, Department of Statistics

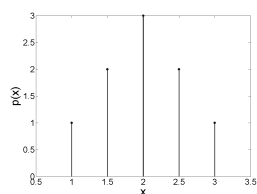
2005-04-22

3

CGS exempel

Dra två element slumpmässig m.å. X_1, X_2

x	$p(x)$
1	1/9
1,5	2/9
2	3/9
2,5	2/9
3	1/9



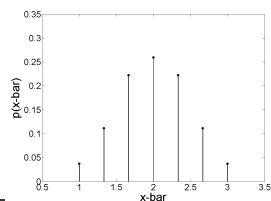
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

4

CGS exempel

Dra tre element slumpmässig m.å. X_1, X_2, X_3 (nu $3^3 = 27$ möjliga stickprov)



1 1 1 1.0000
1 1 2 1.3333
1 1 3 1.6667
1 2 1 1.3333
1 2 2 1.6667
1 2 3 2.0000
1 3 1 1.6667
1 3 2 2.0000
1 3 3 2.3333
2 1 1 1.3333
2 1 2 1.6667
2 1 3 2.0000
2 2 1 1.6667
2 2 2 2.0000
2 2 3 2.3333
2 3 1 2.0000
2 3 2 2.3333
2 3 3 2.6667
3 1 1 1.6667
3 1 2 2.0000
3 1 3 2.3333
3 2 1 2.0000
3 2 2 2.3333
3 2 3 2.6667
3 3 1 2.3333
3 3 2 2.6667
3 3 3 3.0000



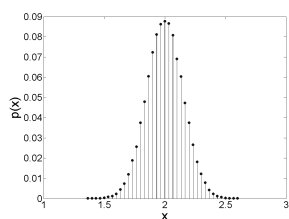
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

5

CGS exempel

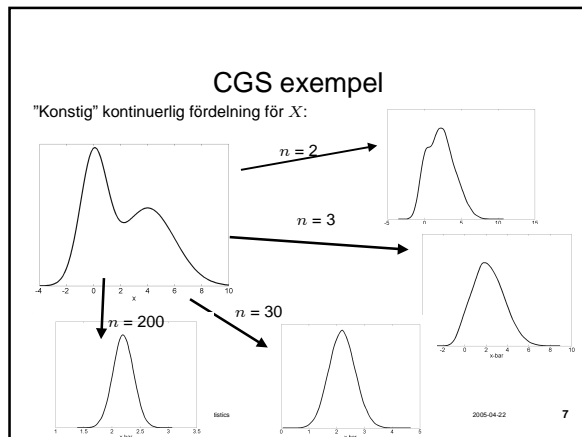
Dra trettio element slumpmässig m.å. X_1, X_2, \dots, X_{30} (nu 3^{30} möjliga stickprov)

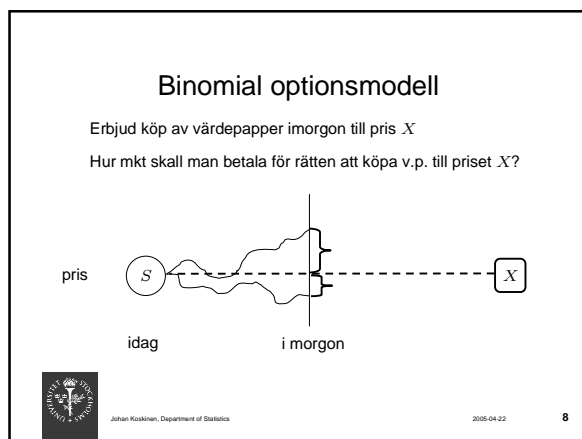


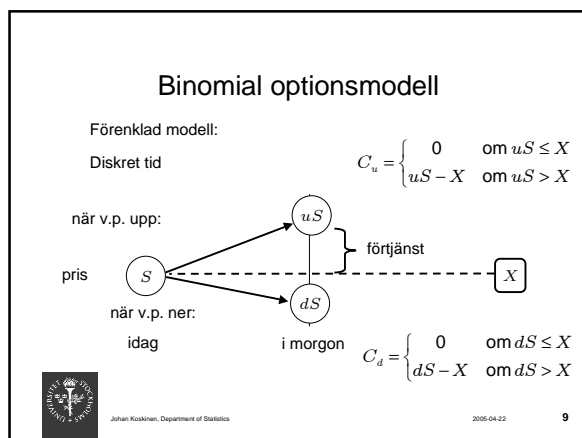
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

6







Binomial optionsmodell

Två möjliga utfall: {upp, ner}
 $P(\{upp\}) = p, P(\{ner\}) = 1 - p$

ibland pos. förtj.

Säker pos. förtj.

10

Binomial optionsmodell

om pos. förtj. stor

Säker pos. förtj. men liten

Hur trolig är pos. förtj.?

alltså $P(\{upp\}) = p = ?$

11

Binomial optionsmodell

Rättvist pris C : förtjänsten bör vägas med sannolikheterna

$$C = E(\text{förtjänst})$$

$$= (\text{förtj. upp}) \times P(\{upp\}) + (\text{förtj. ner}) \times P(\{ner\})$$

$$= C_u p + C_d (1 - p)$$

ex: $p = 0,85$

$$C = 10 \times 0,85 + 0 \times 0,15 = 8,5$$

12

Binomial optionsmodell

2a Rättvist pris C : förtjänsten bör vägas med sannolikheterna och korrigeras för riskfria räntan r
m.a.o. en förtjänst C_u är egentligen $\frac{C_u}{1+r}$

X investerade i riskfritt papper m. utveckling $(1+r)X$

pris S idag i morgon uS dS X

förtjänst

Johannes Koskinen, Department of Statistics 2005-04-22 13

Binomial optionsmodell

Detta ger rättvist pris C

$$C = E(\text{förtjänst})$$

$$= (\text{förtj. upp}) \times P(\{\text{upp}\}) + (\text{förtj. ner}) \times P(\{\text{ner}\})$$

$$= \frac{C_u}{1+r} p + \frac{C_d}{1+r} (1-p)$$

3a Antag förväntad utveckling papper $= r$

$$(1+r)x_0 = (ux_0)p + (dx_0)(1-p)$$

lös ut p : $p = \frac{1+r-d}{u-d}$

Johannes Koskinen, Department of Statistics 2005-04-22 14

Binomial optionsmodell

Rättvist pris C : antag vi säljer för \$ C

Vi måste betala C_u om upp C_d om ner

vi ("hedgar") köper h v.p. imorgon vår portfölj:

$$h(uS) + (1+r)(C-hS) \text{ om upp}$$

$$h(dS) + (1+r)(C-hS) \text{ om ner}$$

värde våra v.p. imorgon värde våra pengar imorgon

idag i morgon uS dS X

Johannes Koskinen, Department of Statistics 2005-04-22 15

Binomial optionsmodell

2b

Välj h och C så att förtjänst ej beror av uppgång eller nedgång!

Först, täckning för förtjänst:

$$C_u = h(uS) + (1+r)(C - hS) \quad (\text{också "pricing by arbitrage": två tillgångar med samma avkastning} \rightarrow \text{samma pris})$$

$$C_d = h(dS) + (1+r)(C - hS)$$

Sedan:

$$C_u - C_d = h(uS) - h(dS)$$

och lös ut h :

$$h = \frac{C_u - C_d}{uS - dS} = \frac{C_u - C_d}{S(u - d)}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

16

Binomial optionsmodell

3b

sätt in h i:

$$C_u = h(uS) + (1+r)(C - hS)$$

och lös ut optionspriset C :

$$C = \frac{1}{1+r} \left[\frac{1+r-d}{u-d} C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d} C_d \right]$$



$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \quad 1-\tilde{p} = 1 - \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{u-d-(1+r-d)}{u-d} = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

17

Binomial optionsmodell

4a

Utifrån antagandet att alla värdepapper måste utvecklas enligt den riskfria räntan

Rättvist pris C och slh upp p :

$$C = E(\text{förtj.}) = \frac{C_u}{1+r} p + \frac{C_d}{1+r} (1-p) \quad p = \frac{1+r-d}{u-d}$$

4b

Genom att välja h ant. v.p. vi köper

ges det rätta priset (så värdet vår port. ej beror på u el. d) C

$$C = \tilde{p} \frac{C_u}{1+r} + (1-\tilde{p}) \frac{C_d}{1+r} \quad \tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

18

Binomial optionsmodell

Oservera: den risk-neutrala sannolikheten

$$p = \frac{1+r-d}{u-d}$$

kan betraktas som en sannolikhet...

men har inget med $P(\text{upp}) = p$ att göra



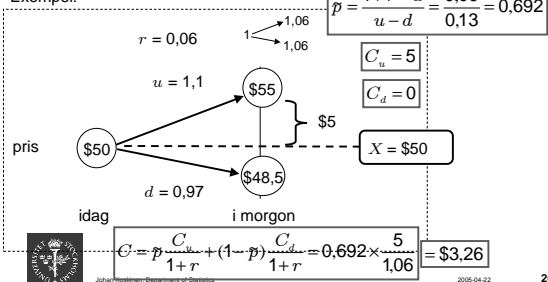
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

19

Binomial optionsmodell

Exempel:

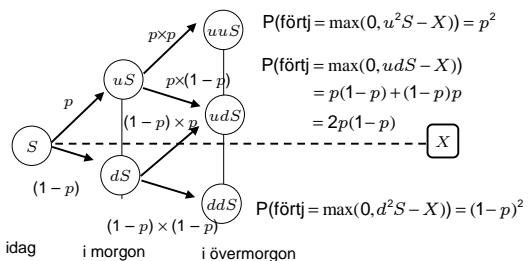


Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

20

Binomial optionsmodell - två per. till mognad



Johann Koskinen, Department of Statistics

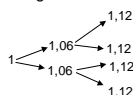
2005-04-22

21

Binomial optionsmodell - två per. till mognad

Eftersom x_0 riskfritt investerade pengar i övermorgon värda $(1+r)^2 x_0$ korrigerar förtj. med

$$\frac{1}{(1+r)^2}$$



Detta ger rättvist pris C

$$C = E(\text{förtjänst}) = p^2 \frac{\max(0, u^2 S - X)}{(1+r)^2} + 2p(1-p) \frac{\max(0, udS - X)}{(1+r)^2} + (1-p)^2 \frac{\max(0, d^2 S - X)}{(1+r)^2}$$

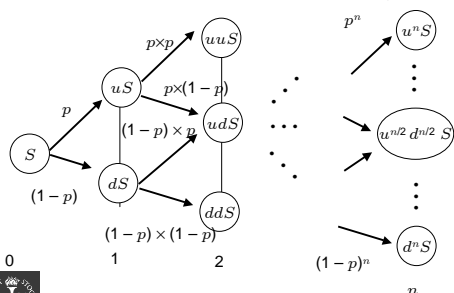


Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

22

Bin. option - flera per. till mognad



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

23

Bin. option - flera per. till mognad

En av de möjliga utvecklingarna efter n perioder

$$u^k d^{n-k} S$$

Alltså k uppgångar och $n-k$ nedgångar m. förtjänst

$$\frac{\max(0, u^k d^{n-k} S - X)}{(1+r)^n}$$

slh för varje sekvens: $S u u d d d u d \dots d u d = u^k d^{n-k} S$

$$p p (1-p) (1-p) (1-p) p (1-p) \dots (1-p) p (1-p) = p^k (1-p)^{n-k}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

24

Bin. option - flera per. till mognad

Hur många sekvenser

$$Suuddddud \dots dud = u^k d^{n-k} S$$

$$Sududdud \dots ddu = u^k d^{n-k} S$$

$$Sdduddud \dots duu = u^k d^{n-k} S$$

Var och en med slh

$$pp(1-p)(1-p)(1-p)p(1-p) \dots (1-p)p(1-p) = p^k (1-p)^{n-k}$$

(jfr F3 samt F4: Binomialfördelning)



SVAR:
Johan Koskinen, Department of Statistics

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

2005-04-22

25

Bin. option - flera per. till mognad

Alltså slh förtjänst

$$\frac{\max(0, u^k d^{n-k} S - X)}{(1+r)^n}$$

ges av

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Detta ger rättvist pris C

$$C = E(\text{förtjänst}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\max(0, u^k d^{n-k} S - X)}{(1+r)^n}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

26

Bin. option - flera per. till mognad

Vi kan skriva om detta som

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\max(0, u^k d^{n-k} S - X)}{(1+r)^n}$$

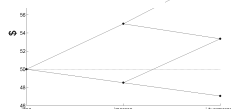
$$= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{\substack{\text{över alla } k: \\ u^k d^{n-k} S - X > 0}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} [u^k d^{n-k} S - X]$$

Så summan går från det minsta k så att

$$u^k d^{n-k} S - X > 0$$



Johan Koskinen, Department of Statistics



2005-04-22

27

Bin. option - flera per. till mognad

Låt m vara det minsta k så att

$$u^k d^{n-k} S - X > 0$$

Med lite algebra...

$$k > \log\left(\frac{X}{d^n S}\right) / \log(u/d)$$

$$m = \left\lceil \log\left(\frac{X}{d^n S}\right) / \log(u/d) \right\rceil$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

28

Bin. option - flera per. till mognad

Vi kan skriva om

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{\substack{\text{över alla } k: \\ u^k d^{n-k} S - X > 0}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} [u^k d^{n-k} S - X] \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} [u^k d^{n-k} S - X] \\ &= \frac{S}{(1+r)^n} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} u^k d^{n-k} \quad \boxed{p' = p \frac{u}{1+r}} \\ &\quad - \frac{X}{(1+r)^n} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-22

29

Bin. option - flera per. till mognad

$$\begin{aligned} C &= \frac{S}{(1+r)^n} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} u^k d^{n-k} \quad \boxed{p' = p \frac{u}{1+r}} \\ &\quad - \frac{X}{(1+r)^n} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \downarrow \\ &= S \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p'^k (1-p')^{n-k} \quad \boxed{1-p' = (1-p) \frac{d}{1+r}} \\ &\quad - \frac{X}{(1+r)^n} [1 - F_{n,p'}(m-1)] \quad \uparrow \\ &\quad \text{fördelningsfunktion för } Y \in \text{Binomial}(n, p') \end{aligned}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

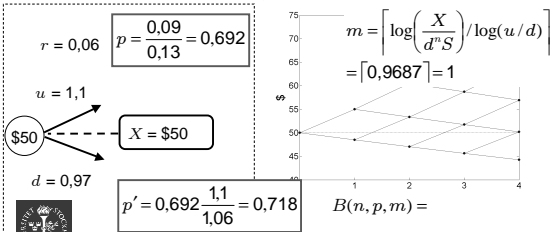
2005-04-22

30

Bin. option - flera per. till mognad

$$C = SB(n, p', m) - \frac{X}{(1+r)^n} B(n, p, m)$$

Exempel: med följande siffror beräkna C med $n = 4$ perioder



Bin. option - normal approximation

$$B(n, p, m) = 1 - P(Y < m) \quad \text{för } Y \in \text{Binomial}(n, p)$$

$$B(n, p', m) = 1 - P(V < m) \quad \text{för } V \in \text{Binomial}(n, p')$$

$$Y \text{ approximativ } \in N(np, np(1-p))$$

$$V \text{ approximativ } \in N(np', np'(1-p'))$$

