



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

## Finansiell statistik, vt-05

F4 Diskreta variabler

---

---

---

---

---

---

---

## Slumpvariabler, stokastiska variabler

- Stokastiska variabler
  - diskreta variabler
  - kontinuerliga variabler
- Diskreta variabler
  - sannolikhetsfunktion, sannolikhetsfördelning
  - ex: fördelningar
  - funktioner av variabler, väntevärde, varians, etc



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

2

---

---

---

---

---

---

---

## Stokastiska variabler

Som tidigare: väl definierad situation/experiment där vi kan skriva upp utfallsrummet  $S \approx$  mängden av all möjliga händelser (utfall)



En slumpvariabel är en variabel som tilldelar alla möjliga utfall ett numeriskt

ex: utfall vid kast med en sexsidig tärning:  
Låt  $X$  vara antalet ögon på tärningen  
 $X$  kan anta värdena 1, 2, 3, 4, 5, 6



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

3

---

---

---

---

---

---

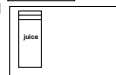
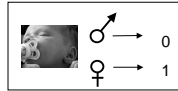
---

## Stokastiska variabler

Som tidigare: i förväg, vet bara vad som kan inträffa  
 $P(X = x)$  är sannolikheten att slumpvariabeln  $X$  skall anta värdet  $x$ .

Låt  $X$  vara

- 0 nyfödd pojke, 1 nyfödd flicka:  $x = 0, 1$
- prickar på tärning:  $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- livslängd lampa:  $x > 0$
- juice i tetran:  $0 \leq x \leq 1$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

4

---

---

---

---

---

---

---

---

## Stokastiska variabler: diskret/kontinuerlig

För ex, märk skillnad i typ av värden  $X$  kan anta

Vi skiljer på

- Diskret slumpvariabel variabel:  
kan anta ett uppräknligt antal värden
- Kontinuerlig slumpvariabel:  
kan anta ett överuppräknligt antal värden



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

5

---

---

---

---

---

---

---

---

## Stokastiska variabler: kontinuerlig i korthet

För  $X$ :

- livslängd lampa:  $x > 0$
- juice i tetran:  $0 \leq x \leq 1$



och vi kan t.ex. skriva upp

slh livslängd lampa är mellan 0,1 och 1 timme

$$P(\{X \geq 0,1\} \cap \{X \leq 1\}) = P(0,1 \leq X \leq 1)$$

juice i tetran mer än halvliter men mindre än 1 liter

$$P(\{X \geq 0,5\} \cap \{X < 1\}) = P(0,5 \leq X < 1)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

6

---

---

---

---

---

---

---

---

## Diskreta variabler: sannolikhetsfunktion

Om  $X$  antar värdena  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kallar vi

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

för den stokastiska variabelns sannolikhetsfunktion (för  $i = 1, 2, \dots, n$ )

Eftersom händelserna

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}$ , är disjunkta och  $P$  är en sannolikhet

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

$$\sum_{\text{alla } x} p(x) = \sum_{\text{alla } x} P(X = x) = 1$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

7

## Diskreta variabler: ex. sannolikhetsfunktion

För  $X$ :

antal krona vid två oberoende slantsinglingar där  $P(\text{krona}) = 1/2$  i varje försök.

Möjliga värden:  $x = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} p(0) &= P(\{\text{klave 1: a}\} \cap \{\text{klave 2: a}\}) \\ &= P(\{\text{klave 1: a}\})P(\{\text{klave 2: a}\}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

8

## Diskreta variabler: ex. sannolikhetsfunktion

$$\begin{aligned} p(1) &= P(\{\text{krona 1: a, klave 2: a}\} \cup \{\text{klave 1: a, krona 2: a}\}) \\ &= P(\{\text{krona 1: a, klave 2: a}\}) + P(\{\text{klave 1: a, krona 2: a}\}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2) &= P(\{\text{krona 1: a}\} \cap \{\text{krona 2: a}\}) \\ &= P(\{\text{krona 1: a}\})P(\{\text{krona 2: a}\}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Koll:

$$\begin{aligned} &p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) \\ &= p(0) + p(1) + p(2) \\ &= 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1 \end{aligned}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

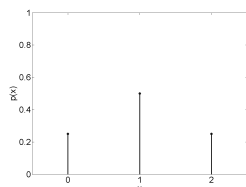
2005-04-05

9

## Diskreta variabler: sannolikhetsfördelning

En systematisk framställning av värdena  $X$  kan anta samt sannolikhetsfunktionen utvärderad i dessa punkter kallas sannolikhetsfördelning

$x$	$p(x)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

10

---

---

---

---

---

---

---

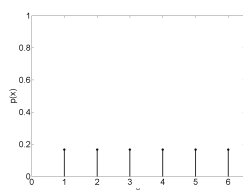
---

## Diskreta variabler: sannolikhetsfördelning

Låt  $X$  vara antalet ögon på tärningen vid ett kast m sexsidig tärning



$x$	$p(x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

11

---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Bernoulli

Om  $X$  är Bernoullifördelad

$X \in \text{Bernoulli}(p)$

antar  $X$  värdena 0 och 1 med sannolikhetsfunktionen

$p(1) = p$  samt  $p(0) = q = 1 - p$ .

Ett experiment där man observerar  $\{X = x\}$ , kallas ett Bernoulliförsök

När  $\{X = 1\}$  säger man att det är ett "lyckat" försök,

när  $\{X = 0\}$  säger man att det är ett "misslyckat" försök



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

12

---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Bernoulli

Man är alltså endast intresserad av:

har händelsen  $A$  inträffat

$\{X = 1\}$  (lyckat försök)

eller ej

$\{X = 0\}$  (misslyckat försök)



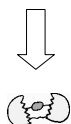
exempel:

Bul. möter Kroatien

Låt  $X$  vara

1 om Bul. vinner, 0 annars

$X \in \text{Bernoulli}(p)$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

13

---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Binomialfördelningen

Låt  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vara oberoende  $\text{Bernoulli}(p)$

och låt  $Y$  var antalet lyckade försök

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$p(y) = P(Y = y) = ?$

Den stokastiska variabeln  $Y$  antar värdena:

0, 1, 2, ...,  $n$ .



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

14

---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Binomialfördelningen

Låt  $n = 3$ , vilka sekvenser av lyckade och misslyckade försök leder till  $y = 2$ ?

1,1,0   1,0,1   0,1,1

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 0\}) \\ &\quad + P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 = 1\}) \\ &\quad + P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}) \\ &= ppq + pqp + qpp \\ &= 3 p^2 q \end{aligned}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

15

---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Binomialfördelningen

Låt  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vara oberoende Bernoulli( $p$ )  
och låt  $Y$  var antalet lyckade försök  
 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

om  $\{Y = y\}$ :  
har vi lyckats i  $y$  försök och misslyckats i  $n - y$  försök  
sannolikheten för varje sådan sekvens:  
 $pp \dots pq \dots q = p^y q^{n-y}$

$$P(Y = y) = \text{antal sekvenser} \times p^y q^{n-y}$$

antal sätt att få  $y$  lyckade försök och  $n - y$  misslyckade?



---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Binomialfördelningen

Om  $X$  är Binomialfördelad  
med slh lyckas  $p$  och antal försök  $n$   
 $X \in \text{Binomial}(n, p)$

Den Binomialfördelade variablen  $Y$  antar värdena:  
 $0, 1, 2, \dots, n$ .  
Har sannolikhetsfunktionen:

$$p(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}$$



---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Binomialfördelningen

Antag att vi singlar slant  $n = 5$  gånger med rättvist mynt  
och låt  $X$  vara antalet gånger vi får krona

$X \in \text{Binomial}(5, 1/2)$

Vad är sannolikheten att vi får krona alla gånger?

$$P(Y = 5) = p(5) = \binom{5}{5} (0,5)^5 (0,5)^{5-5} = 2^{-5} = 0,0313$$



---

---

---

---

---

---

---

---

## Fördelningar: Hypergeometrisk

I en skål finns 2 gröna marker och 3 röda. Drag två marker. Vad är sannolikheten att vi fått exakt 1 grön marker?

Låt  $X$  vara antal gröna marker vid två dragningar (u.å.)



Variablen  $X$  antar värdena: 0, 1, 2.

Variablen  $X$  är hypergeometriskt fördelad och har slh-funktion av formen

$$P(A) = \frac{g(A)}{n}$$

hur beräknar vi antalet gynnsamma utfall och totala ant utfall?



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

19

---

---

---

---

---

---

---

---