



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F6 Diskreta variabler (forts)

Väntevärde för olika fördelningar

$$X \in \text{Bernoulli}(p) \quad E(X) = p$$

$$X \in \text{Binomial}(n, p) \quad E(X) = np$$

$$X \in \text{Hyp}(N, h, n) \quad E(X) = n \left(\frac{h}{N} \right)$$

$$X \in \text{Poisson}(\lambda) \quad E(X) = \lambda$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

2

Varians

Om X är en diskret stokastisk variabel som antar värdena

x_1, x_2, \dots, x_n

med sannolikhetsfunktionen

$p(x_i)$

är variansen för X , $\text{Var}(X)$:

$$\begin{aligned} E([X - E(X)]^2) &= \sum_{\text{alla } x} (x - E(X))^2 P(X = x) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p(x_i) \end{aligned}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

3

Varians

$$0 + 1 = 1 \quad (= x)$$

x	$p(x)$	$x p(x)$	$(x - E(x))^2$	$(x - E(x))^2 p(x)$
0	$\frac{1}{4}$	0	$(-1)^2 = 1$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1^2 = 1$	$\frac{1}{4}$
1		1	$\frac{1}{2}$	

Juhani Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

4

en fördelning

=

$12,5 \times 0,0909 = 1,11$

Juhani Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

5

Skillnader i varians

två fördelningar

Juhani Koskinen, Department of Statistics

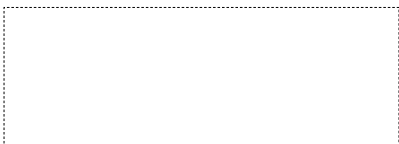
2005-04-11

6

Varians: alternativ formel

Om X är en diskret stokastisk variabel är variansen för X :

$$E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

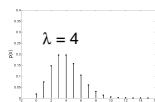
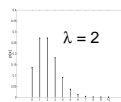
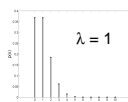
7

Varians: Poisson

En poissonfördelad variabel X

$X \in \text{Poisson}(\lambda)$

har sannolikhetsfunktion



variansen för X : λ



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

8

Variansen för olika fördelningar

$X \in \text{Bernoulli}(p)$

$$\text{Var}(X) = pq$$

$X \in \text{Binomial}(n, p)$

$$\text{Var}(X) = npq$$

$X \in \text{Hyp}(N, h, n)$

$$\text{Var}(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \left[n \left(\frac{h}{N}\right) \left(1 - \frac{h}{N}\right) \right]$$

$X \in \text{Poisson}(\lambda)$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

9

Bivariata fördelningar

Låt X och Y vara två diskreta s.v. som antar värdena x_1, x_2, \dots, x_n respektive y_1, y_2, \dots, y_m med sannolikhetsfunktionerna

$p_X(x_i)$ respektive $p_Y(y_j)$

Händelser av typen

$$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(X = x_i, Y = y_j)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

10

Bivariata fördelningar

För X och Y definieras den bivariata sannolikhetsfunktionen

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

Om $\{X = x_i\}$ och $\{Y = y_j\}$ oberoende för alla utfall

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$



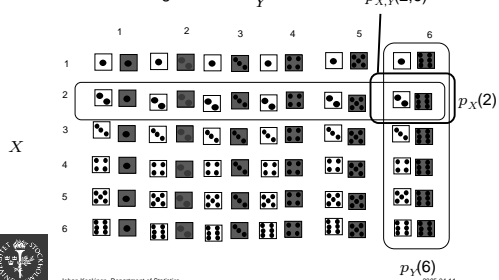
Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

11

Bivariata fördelningar

Utfall vid kast av två tärningar:

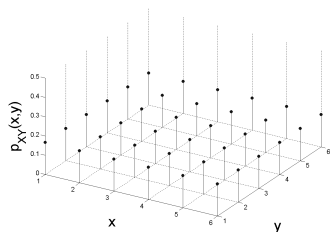


Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

12

Den bivariata slh fördelningen för X och Y



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

13

Bivariata fördelningar

Låt X och Y vara två diskreta s.v. som antar värdena

x_1, x_2, \dots, x_n respektive y_1, y_2, \dots, y_m

med den bivariata sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(x_i, y_j)$

För alla par x_i och y_j

$0 \leq p_{X,Y}(x_i, y_j) \leq 1$

$$\sum_{\text{alla par } x,y} p_{X,Y}(x,y) = 1$$

anv. LTS

$$P(X = x_i) = p_X(x_i) = \sum_{\text{alla } y} p_{X,Y}(x_i, y)$$

$$P(Y = y_j) = p_Y(y_j) = \sum_{\text{alla } x} p_{X,Y}(x, y_j)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

14

Betingade sannolikhetsfunktioner

Som i fallet med de betingade sannolikheterna för en

händelse givet en annan definierar vi

för X och Y två diskreta s.v. som antar värdena

x_1, x_2, \dots, x_n respektive y_1, y_2, \dots, y_m

med den betingade sannolikhetsfunktionen för X givet Y

$$P(X = x_i | Y = y_j) = p_{X|Y=y_j}(x_i | y_j)$$

$$= \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}$$

obs: alla >0

samt den betingade sannolikhetsfunktionen för Y givet X

$$P(Y = y_j | X = x_i) = p_{Y|X=x_i}(y_j | x_i) = \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

15

Kovarians

Låt X och Y vara två diskreta s.v. som antar värdena x_1, x_2, \dots, x_n respektive y_1, y_2, \dots, y_m med den bivarata sannolikhetsfunktionen $p_{X,Y}(x_i, y_j)$

def: Kovariansen mellan X och Y

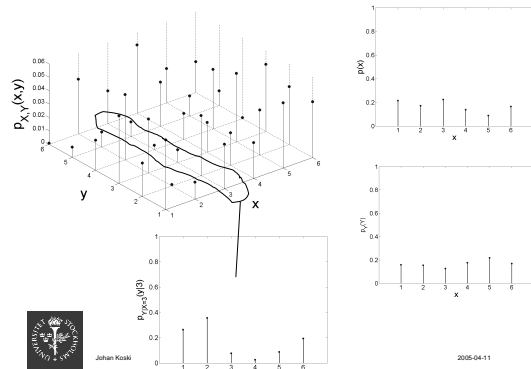
$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E_{X,Y}[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= \sum_{\text{alla par } x,y} [(x - E(X))(y - E(Y))] p_{X,Y}(x, y) \end{aligned}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

16

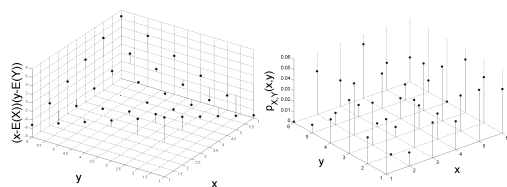


Johann Koski

2005-04-11

17

Kovarians



i det här fallet $\text{Cov}(X, Y) = -0,2256$
vad säger det?

Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

18

Kovarians: alternativ formel

Kovariansen mellan X och Y kan också skrivas

$$\text{Cov}(X, Y) = E_{X,Y}(XY) - E(X)E(Y)$$

där

$$E_{X,Y}(XY) = \sum_{\text{alla par } x,y} xy p_{X,Y}(x,y)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

19

Kovarians och oberoende

Om variablerna X och Y är oberoende

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

vad blir kovariansen mellan X och Y ?

$$\text{Cov}(X, Y) = E_{X,Y}[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-11

20

Väntevärde för summan variabler

Låt X och Y vara två diskreta s.v.

$$E[X + Y] = E(X) + E(Y)$$

$$E[X - Y] = E(X) - E(Y)$$

Och för diskreta s.v. X_1, X_2, \dots, X_n

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

ex: Bernoulli \rightarrow Binomial



Johannes Koskinen, Department of Statistics



2005-04-11

21

Variansen för summan av variabler

Låt X och Y vara två diskreta s.v.

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}[X - Y] = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - \text{Cov}(X, Y)$$

Och för oberoende diskreta s.v. X_1, X_2, \dots, X_n

$$\text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

ex: Bernoulli \rightarrow Binomial



Johannes Koskinen, Department of Statistics



2005-04-11

22