



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

## Finansiell statistik, vt-05

F25 Tidsserieanalys

## Wienerprocesser

Varför: model för aktiekurs (dock med aber...)

exempel: Black-Scholes (jfr Binomialoptionsmodellen)



Först: konstruera Brownsk rörelse från enkel slumpvandring



Sedan: kort om egenskaper



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

2

## Enkel slumpvandring



exempel: Pär och Bertill spelar ett spel

omgångar:  $t = 1, 2, \dots, T$ ,

där vi betecknar Bertills vinst i omgång  $t$

$$\varepsilon_t = \begin{cases} -1 & \text{om Bertill förlorar} \\ 1 & \text{om Bertill vinner} \end{cases}$$

vidare säger vi att Pär och Bertill i varje spel har lika chanser att vinna:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} -1 & \text{med sannolikheten } 1/2 \\ 1 & \text{med sannolikheten } 1/2 \end{cases}$$



2005-05-30

3

## Enkel slumpvandring

Antag även oberoende mellan utfallen i spelomgångarna

alltså sekvens av Bernoulliförsök

Hur mycket har Bertill vunnit i omgång  $t$ ?

Inför beteckningen  $X_t$ : vinst i omgång  $t$

kan skrivas som

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

(ex.: några realisationer)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

4

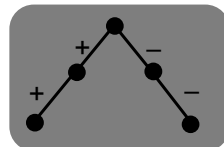
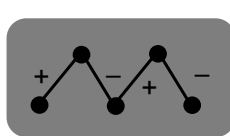
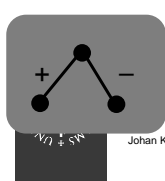
## Enkel slumpvandring

Vad är sannolikheten att Bertill går jämt ut efter  $T$  omgångar?

Sannolikheten  $P(X_T=0)$

Alla sekvenser lika troliga:

$$P(X_T = 0) = \frac{\text{antal realisationer så att } x_T = 0}{\text{antal realisationer}} \\ = \frac{\text{antal realisationer med lika många (+) som (-)}}{\text{antal realisationer}}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

5

## Enkel slumpvandring

Vad är sannolikheten att Bertill går jämt ut efter  $T$  omgångar?

Sannolikheten  $P(X_T=0) = 0$  om  $T$  ojämn (!)

$$\frac{\text{antal realisationer med lika många (+) som (-)}}{\text{antal realisationer}}$$

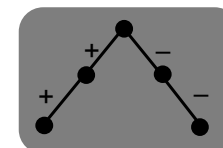
antal gynnsamma utfall:

på hur många sätt kan vi ordna  $T/2$  (+) och  $T/2$  (-) ?

$$P(X_T = 0) = \frac{\binom{T}{T/2}}{2^T}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics



## Enkel slumpvandring

Vad är sannolikheten att Bertill har exakt 1 efter  $T$  omgångar?

Sannolikheten  $P(X_T=1)$

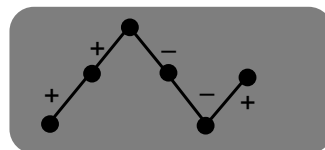
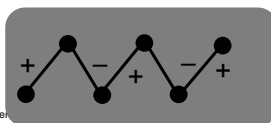
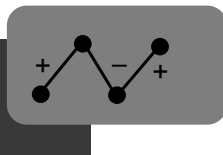
Alla sekvenser lika troliga:

$$P(X_T = 1) = \frac{\text{antal realisationer så att } x_T = 1}{\text{antal realisationer}}$$

antal gynnsamma utfall:

eftersom lika många (+) som (-) ger  $X_T=0$

måste vi ha ett (+) mer än (-)



Johan Koskinen, Department of Statistics

## Enkel slumpvandring

antal gynnsamma utfall:

$(T+1)/2$  st (+) och  $(T-1)/2$  st (-)

$$P(X_T = 1) = \frac{\text{antal realisationer så att } x_T = 1}{\text{antal realisationer}}$$

$$= \frac{\binom{T}{(T+1)/2}}{2^T}$$

Generellt: sannolikheten att Bertill har exakt  $k$  efter  $T$  omgångar?

Sannolikheten  $P(X_T=k)$

$(T+k)/2$  st (+) och  $(T-k)/2$  st (-)

$$P(X_T = k) = \frac{\binom{T}{(T+k)/2}}{2^T}$$

2005-05-30

8

## Enkel slumpvandring

Antag Bertill startar med 10 kr

Vad är sannolikheten att Bertill har förlorat exakt 2kr efter  $T$  omgångar?

Sätt  $X_0 = 10$

Sannolikheten  $P(X_T = 10 - 2) = P(X_T = 8)$

antal gynnsamma utfall:

$(T - 2)/2$  st (+) och  $(T + 2)/2$  st (-)

$$P(X_T = 8) = \frac{\binom{T}{(T-2)/2}}{2^T}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

9

## Enkel slumpvandring

Antag Bertill startar med 10 kr men är bankrutt när han inte har några pengar kvar.

Vad är sannolikheten att Bertill har förlorat exakt 2kr efter  $T$  omgångar utan att bli bankrutt?

Sätt  $X_0 = 10$

Sannolikheten

$P(X_T = 8 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{T-1} > 0) = ?$

antal gynnsamma utfall:

antal vägar med  $(T - 2)/2$  st (+) och  $(T + 2)/2$  st (-) förutom de som skär



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

10

## Enkel slumpvandring

antal gynnsamma utfall:

antal vägar med  $(T - 2)/2$  st (+) och  $(T + 2)/2$  st (-)

förutom de som skär den horisontella axeln

Kort om reflexionsprincipen:

antal vägar från

är lika många som antal vägar från

$(s, x_s)$

$(s, x_s)$

till

$(t, x_t)$

till

$(t, -x_t)$

som går genom

$(s + r, 0)$  stics

som går genom

$(s + r, 0)$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

11

## Enkel slumpvandring

antal vägar som går genom 0

antal vägar med  $10 - (-8) = 18$  fler (-) än (+)

$$\binom{T}{(T-18)/2}$$

$$P(X_T = 8 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{T-1} > 0) = \frac{\binom{T}{(T-2)/2} - \binom{T}{(T-18)/2}}{2^T}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

12

# Wienerprocesser

Med Pär-och-Bertill-exemplet

eftersom

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

lite begränsat för t.ex. kursutveckling

exempelvis differensen

$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t = \begin{cases} -1 \text{ med sannolikheten } 1/2 \\ 1 \text{ med sannolikheten } 1/2 \end{cases}$$

(ex.: några realisationer)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

13

# Wienerprocesser

Antag att vi stoppar in "extrasteg" mellan tidpunkterna

t.ex.: med

$$\varepsilon_{t+1/2} = \begin{cases} -1 \text{ med sannolikheten } 1/2 \\ 1 \text{ med sannolikheten } 1/2 \end{cases}$$

vi får då

$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1/2} = \begin{cases} -2 \text{ m slh. } 1/4 \\ 0 \text{ m slh. } 1/2 \\ 2 \text{ m slh. } 1/4 \end{cases}$$

(ex.: några realisationer)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

14

# Wienerprocesser

Antag att vi stoppar in många "extrasteg" mellan tidpunkterna

Vi låter  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  vara oberoende likafördelade

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 \text{ med sannolikheten } 1/2 \\ 1 \text{ med sannolikheten } 1/2 \end{cases}$$

och definierar

$$X_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} = X_{\frac{i}{n}}^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_{i+1}$$

observera  
tidsskalan

m.a.o.

$$X_{\frac{i}{n}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i)$$

(ex.: några realisationer)



Johan Koskinen, Department of Statistics

15

# Wienerprocesser

Stoppa in interpolerade värden mellan "extrastegen" mellan tidpunkterna

$$\bar{X}_t^{(n)} = \left( t - \frac{i}{n} \right) (X_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} - X_{\frac{i}{n}}^{(n)}) + X_{\frac{i}{n}}^{(n)}$$

för tidpunkten  $t$  i intervallet

$$\left[ \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$$

Tidpunkterna  $t$  är nu kontinuerliga!!!

(ex.: alltså utan punkterna)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

16

# Wienerprocesser

Eftersom i princip

$$\bar{X}_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{\lfloor tn \rfloor})$$

oberoende likafördelade  
variabler

Enligt CGS: när antalet  $n$  "extrasteg" blir stort

$$\bar{X}_t^{(n)} \in N(0, t)$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

17

# Wienerprocesser

Procesen  $X(t)$  kallas för standard Wienerprocess om den uppfyller

$$X(0) = 0$$

$$E(X(t)) = 0 \text{ för alla } t$$

$$\text{Var}(X(t)) = t \sigma^2 \text{ för alla } t$$

$$X(t) \text{ är normalfördelade för alla } t$$

$$X(t) \text{ har oberoende ökningar: för alla } t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$$

$$\text{gäller att } X(t_2) - X(t_1) \text{ och } X(t_4) - X(t_3) \text{ är oberoende}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

18



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-30

19