



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F23 Tidsserieanalys

Autoregressiva processer

Antag X_1, X_2, \dots, X_T följer en autoregressiv process av 1:a ordningen, AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ är oberoende likafördelade $N(0, \sigma^2)$

Givet ett värde X_{T-1} kan vi beräkna väntevärdet X_T

$$E(X_T | X_{T-1}) = \phi X_{T-1}$$

och variansen

$$\text{Var}(X_T | X_{T-1}) = \sigma^2$$

Vi har även för ett givet X_{T-1} att

$$X_T | X_{T-1} \in N(\phi X_{T-1}, \sigma^2)$$

2005-05-25

2

Autoregressiva processer

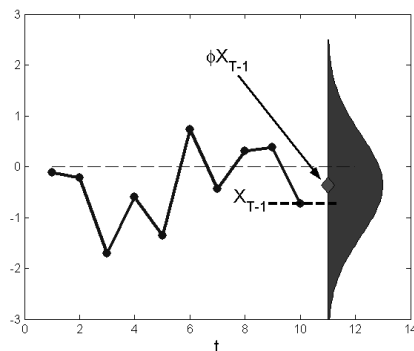
Alltså, för ett givet X_{T-1} t.ex.

$$P(X_T \leq a | X_{T-1} = x) =$$

$$= P\left(\frac{X_T - E(X_T | X_{T-1} = x)}{\sqrt{\text{Var}(X_T | X_{T-1} = x)}} \leq \frac{a - E(X_T | X_{T-1} = x)}{\sqrt{\text{Var}(X_T | X_{T-1} = x)}} | X_{T-1} = x\right)$$

$$= P(Z \leq \frac{a - x\phi}{\sigma})$$

$$= \Phi\left(\frac{a - x\phi}{\sigma}\right)$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

AR - stationäritet

Antag X_1, X_2, \dots, X_T följer en autoregressiv process av 1:a ordningen, AR(1)

Hur uppför sig $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n}$ i långa loppet?

Def: Tidsserien $\{X_t; t=1,2,\dots\}$ är strikt stationär om den simultana fördelningen för $(X_s, X_{s+1}, \dots, X_{s+n})$ är densamma som den simultana fördelningen för $(X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n})$ för alla s, t och n .

(ex.: histogram + korrelationer)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

4

AR - stationäritet

Def: Tidsserien $\{X_t; t=1,2,\dots\}$ är svagt stationär om

1. Väntevärdet och variansen för X_t är konstant för alla t .
2. För alla par av tidpunkter beror $\text{Cov}(X_s, X_t)$ endast på $t - s$.

(ex.: histogram + korrelationer)

För s.k. normalprocesser (t.ex. AR(1)) är svag stationäritet ekvivalent med stark stationäritet.



AR - stationäritet

En autoregressiv process av 1:a ordningen, AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

är stationär när

$$-1 < \phi < 1$$

(ex.: explosiv process)



AR - stationäritet

Om vi sätter

$$\phi = 1$$

är processen inte stationär

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Väntevärde: skriv

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= (X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= (X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$



AR - stationäritet

Väntevärde:

$$E(X_t) = E(X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ är oberoende likafördelade $N(0, \sigma^2)$

$$E(X_t) = X_0 \quad \text{konstant alltså}$$

Däremot varians:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \text{Var}(X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_1) + \text{Var}(\varepsilon_2) + \dots + \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon_t) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2 + \sigma^2 = t\sigma^2 \end{aligned}$$

Variansen funktion av tiden: ej stationär process!



AR - autokorrelation

Kom ihåg att korrelationen mellan två variabler X och Y

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Är graden av lineärt samband mellan två variabler X och Y

En stationär autoregressiv process av 1:a ordningen, AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

är stationär är

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_s)$$

och

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+n}) = \text{Cov}(X_s, X_{s+n})$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

9

AR - autokorrelation

Korrelationen mellan X_t, X_{t+1} för två på varandra följande tidpunkter

$$\rho(X_t, X_{t+1}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+1})}} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+1})}{\text{Var}(X_t)}$$

eftersom stationär

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t+1})$$

För kovariansen

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+1}) = E(X_t X_{t+1}) - E(X_t)E(X_{t+1})$$



Skriv ut X_{t+1} i termer av X_t

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

10

AR - autokorrelation

Den första termen i kovariansen när man skriver ut X_{t+1} i termer av X_t

$$E(X_t X_{t+1}) = E(X_t (\phi X_t + \varepsilon_{t+1}))$$

$$= E(\phi X_t X_t + X_t \varepsilon_{t+1})$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ är oberoende likafördelade $N(0, \sigma^2)$

$$= \phi E(X_t^2)$$

Den andra termen i kovariansen

$$\begin{aligned} E(X_t)E(X_{t+1}) &= E(X_t)E(\phi X_t + \varepsilon_{t+1}) \\ &= \phi E(X_t)^2 \end{aligned}$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

11

AR - autokorrelation

Alltså, kovariansen:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+1}) = E(X_t X_{t+1}) - E(X_t)E(X_{t+1})$$

$$\begin{aligned} \text{kom ihåg definitionen av} \quad &= \phi E(X_t^2) - \phi E(X_t)^2 \\ \text{varians!} \quad &= \phi \text{Var}(X_t) \end{aligned}$$

Korrelationen mellan X_t, X_{t+1} för två på varandra följande tidpunkter

$$\rho(X_t, X_{t+1}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+1})}{\text{Var}(X_t)} = \frac{\phi \text{Var}(X_t)}{\text{Var}(X_t)} = \phi$$

(ex.: spridningsdiagram)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

12

AR - SAC

Man kan visa att för AR(1) ges korrelationen mellan X_t, X_{t+k} av

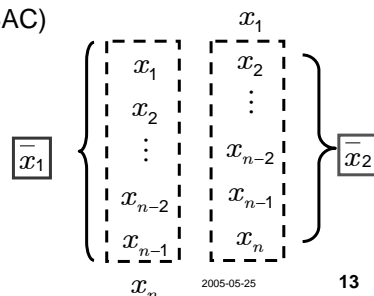
$$\rho(X_t, X_{t+k}) \equiv \rho_k = \phi^k$$

Precis som stickprovskorrelationskoefficienten skattar korrelationen mellan två variabler X och Y

Är stickprovsautokorrelationsfunktionen (SAC)

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_{k+1})(x_{t-1} - \bar{x}_k)}{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_{k+1})^2 \sum_{t=k+1}^n (x_{t-1} - \bar{x}_k)^2}$$

en estimator av ρ_k



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

13

AR(p)

Generellt säger man att X_1, X_2, \dots, X_T följer en autoregressiv process av p :te ordningen, $AR(p)$ om man kan skriva den som

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ är oberoende likafördelade $N(0, \sigma^2)$
(villkoret för stationaritét är lite krångligare)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

14

AR(p)

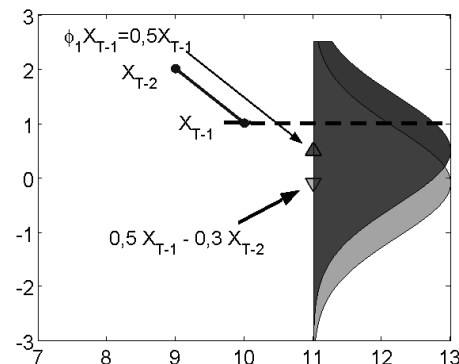
Exempel med en autoregressiv process av 2:a ordningen, $AR(2)$

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

$\phi_0 = 0$ fluktuerar runt noll

$\phi_1 = 0,5$ positivt samband mellan tidpunkter

$\phi_2 = -0,3$ minns höga/låga värden två tidpunkter tillbaka



Johan Koskinen, Department of Statistics

AR - SAC & identifiering av modell

Eftersom stickprovsautokorrelationsfunktionen (SAC)

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_{k+1})(x_{t-1} - \bar{x}_k)}{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x}_{k+1})^2 \sum_{t=k+1}^n (x_{t-1} - \bar{x}_k)^2}$$

en estimator av ρ_k

borde r_1, r_2, \dots , ge oss ide om hur många laggar vi borde ha
d.v.s. bestämma p :

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

(ex.: fig 3.2 i komp.)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

16

AR - SAC & identifiering av modell

För X_1, X_2, \dots, X_T som följer en autoregressiv process $AR(p)$

Definieras även den partiella autokorrelationskoefficienten (SPAC)

r_{11}, r_{22}, \dots

Tolkning av r_{kk} ungefär:

korrelationen mellan X_t, X_{t+k} givet korrelationen mellan X_t, X_{t+s} för alla andra s

Box-Jenkinsmetodik: titta på SAC och SPAC för att identifiera modell



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

17

MA-(glidande medelvärdes-processer)

Istället för att X_1, X_2, \dots, X_T följer en autoregressiv process av p :te ordningen, skulle vi kunna använda en liknande formulering

$$X_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

där $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ är oberoende likafördelade $N(0, \sigma^2)$

MA(q) Alltså, många små chocker vid olika tidpunkter som man väger ihop



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

18

AR(p) + MA(q) = ARMA(p, q)

Om X_1, X_2, \dots, X_T dels beskrivs av en autoregressiv process av p :te ordningen, $AR(p)$ föregående tidpunkters värden har betydelse för dagens värde

och dels en MA-process av q :te ordningen, $MA(q)$ föregående tidpunkters slumpchocker har betydelse för dagens värde

Har man en ARMA(p, q)

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

(ex.: fig 3.2 i komp.)



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

19

ARIMA(p, d, q)

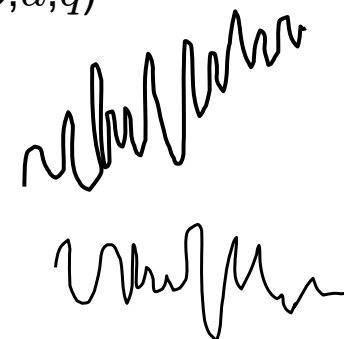
Ibland är X_1, X_2, \dots, X_T inte en stationär process

Men

$X_1 - X_2, X_2 - X_3, \dots, X_T - X_{T-1}$ är en stationär process

eller

$(X_1 - X_2) - (X_2 - X_3), (X_2 - X_3) - (X_3 - X_4), \dots$, är en stationär process



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-25

20

ARIMA(p, d, q)

Ibland är X_1, X_2, \dots, X_T inte en stationär process

men den d gånger differentierade serien är en ARMA(p, q)

säger vi att X_1, X_2, \dots, X_T följer en ARIMA(p, d, q)

