



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F7 Kontinuerliga variabler

Kontinuerliga s.v. variabler

- Allmänna begrepp
 - täthetsfunktion
 - fördelningsfunktion
 - väntevärde
 - varians
- Fördelningar
 - Normalfördelningen
 - Uniform
 - t-fördelning, χ^2 -fördelning, F
 - exponentiell fördelning



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

2

Kontinuerliga s.v.

I många fall ej meningsfullt tilldela alla utfall sannolikheter

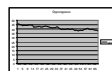
Pilkastning: var hamnar pilen?



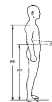
Hur länge brinner lampan?



Vad är aktiekursen?



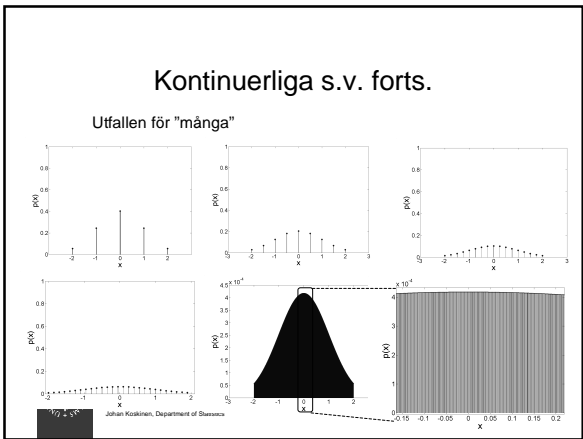
Längd?

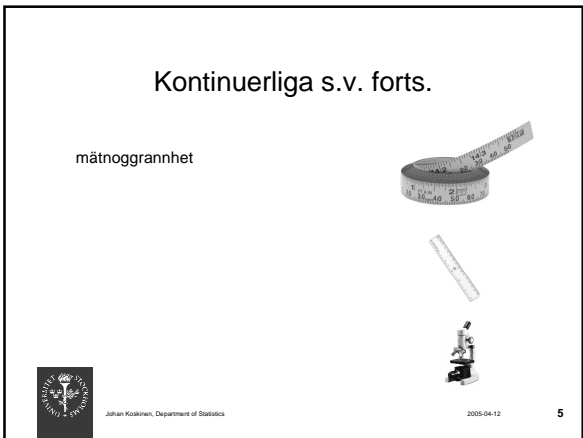


Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

3





Kontinuerliga variabler

För kont. s.v. X
Meningsfullt prata om typen

sls livslängd lampa är mellan 0,1 och 1 timme
 $P(\{X \geq 0,1\} \cap \{X \leq 1\}) = P(0,1 \leq X \leq 1)$

juice i tetran mer än halvliter men mindre än 1 liter
 $P(\{X \geq 0,5\} \cap \{X < 1\}) = P(0,5 \leq X < 1)$

skillnaden i pris på aktien idag-imorgon är mellan 0 och 0,5
 $P(\{X \geq 0\} \cap \{X < 0,5\}) = P(0 \leq X < 0,5)$

†

juice

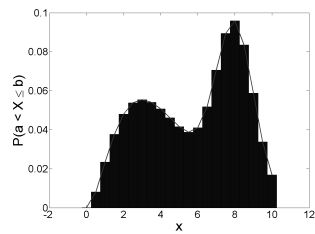
\$

Johan Kotilinen, Department of Statistics

2005-04-12 6

Kontinuerliga variabler

Staplar för slh i intervall



kurva
beskriver
fördelning av
sannolikhet...



Johann Koskinen, Department of Statistics

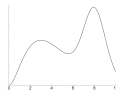
2005-04-12

7

Täthetsfunktion

En kontinuerlig variabel X kan anta

Kontinuerlig slumpvariabel:
kan anta alla värden i ett intervall $a \leq x \leq b$



Har en täthetsfunktion

$f(x) \geq 0$ sådan att ytan under kurvan i intervallet $[a, b]$ är 1

alltså:

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

8

Uniform/rektangulär fördelning

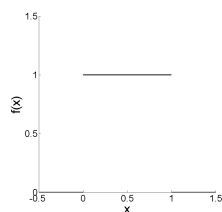
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

alla värden i $0 \leq x \leq 1$

$f(x) \geq 0$

ytan under kurvan är 1

$$P(a \leq X \leq b) = (b-a)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

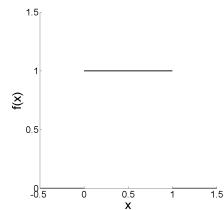
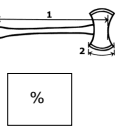
9

Uniform/rektangulär fördelning

m.a.o. alla intervall (av viss längd)
lika troliga

Kasta yxa

Index



Visa $P(a \leq X \leq b) = (b-a)$
geometriskt



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

10

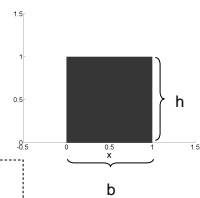
Uniform/rektangulär fördelning

Visa att $\int_0^1 f(x)dx = 1$

$\int_0^1 f(x)dx$ är arean av ytan

Integralen:

$$\int_0^1 1dx =$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

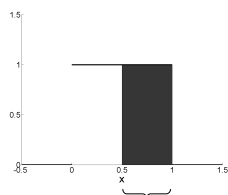
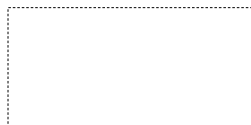
2005-04-12

11

Uniform/rektangulär fördelning

Vad är sannolikheten att X ligget
t.hö. om $1/2$?

$P(1/2 \leq X \leq 1) =$



Johann Koskinen, Department of Statistics

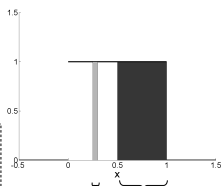
2005-04-12

12

Uniform/rektangulär fördelning

Vad är sannolikheten att X är mellan 1/4 och .3 eller är större än 1/2?

$$P(\{1/4 \leq X \leq 0,3\} \cup \{1/2 \leq X \leq 1\}) =$$



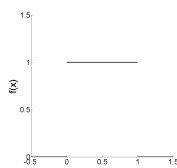
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

13

Uniform/rektangulär fördelning

- Avrundningsfel: antag att man avrundar sina mätningar till närmaste heltal
- Väntetiden för t-banan (10-min trafik; ignorera "tåget står inne")



$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{om } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{0 annars} \end{cases}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

14

Kontinuerliga s.v.

För X en kontinuerlig s.v. är sannolikheten i en punkt 0 d.v.s.



för alla x

$$P(X = x) = 0$$

följd

$$P(X \leq x) = P(X < x)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

15

Fördelningsfunktion

För kontinuerlig s.v. X

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Hur räkna ut?

Analog m. diskreta s.v.:

Antag ordnad följd av n tal

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x$$

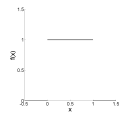
$$P(X \leq x) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) + \dots + P(x_{n-1} < X \leq x)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

16



Fördelningsfunktion

För kontinuerlig s.v. X med täthetsfunktion $f(x)$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

17

Exempel fördelningsfunktion

För s.v. X uniformt fördelad över intervallet $[0,1]$

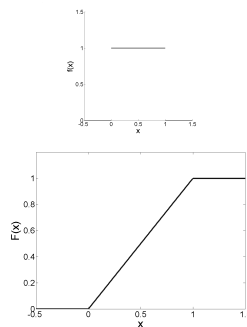
$$X \in \text{Uniform}(0,1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 1 dt = [t]_{-\infty}^x = x$$



Johann Koskinen, Department of Statistics



18

Exempel fördelningsfunktion

Antag tid till t-bana X uniformt fördelad över intervallet $[0,10]$

$X \in \text{Uniform}(0,10)$

täthetsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & \text{om } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vad är sannolikheten att vi får vänta 2 min eller mindre?

$$P(X \leq 2) = F(2)$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

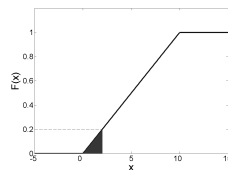
2005-04-12

19

Exempel fördelningsfunktion

Sökt sannolikhet $P(X \leq 2) = F(2)$

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_{-\infty}^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{10} dx \\ &= \left[\frac{x}{10} \right]_0^2 = 0,2 \end{aligned}$$



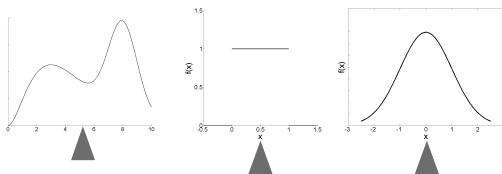
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

20

Väntevärde

Kontinuerlig s.v. X ; $E(X) = ?$



Balansera fördelningarna - väga ihop värdena...



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

21

Väntevärde

Kontinuerlig s.v. X med täthetsfunktion $f(x)$
Väntevärdet för X , $E(X)$ ges av

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

22

Väntevärde exempel

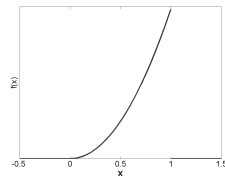
Kontinuerlig s.v. X med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Är $f(x)$ en täthetsfunktion?

$$f(x) \geq 0$$

ytan under kurvan är 1?



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

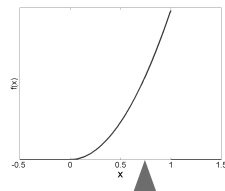
23

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

Väntevärde exempel

Väntevärdet för X , $E(X)$ ges av

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^1 xf(x)dx \\ &= \int_0^1 x3x^2 dx \\ &= \int_0^1 3x^3 dx = \end{aligned}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

24

$$= \left[\frac{3}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4} 1^4 - \frac{3}{4} 0^4 = \frac{3}{4}$$

Varians

Kontinuerlig s.v. X med täthetsfunktion $f(x)$
 Variansen för X , $\text{Var}(X)$ ges av

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Med alternativ form

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

25

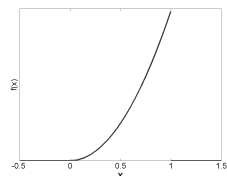
Varians: exempel

Kontinuerlig s.v. X med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Väntevärdet för X , $E(X) = 3/4$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 3x^4 dx = \left[\frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

26

Varians: exempel

Väntevärdet för X , $E(X) = 3/4$

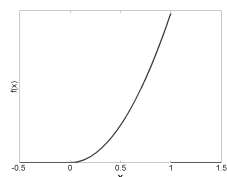
och $E(X^2) = 3/5$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{3}{5} - \left[\frac{3}{4} \right]^2$$

$$= \frac{3}{80}$$

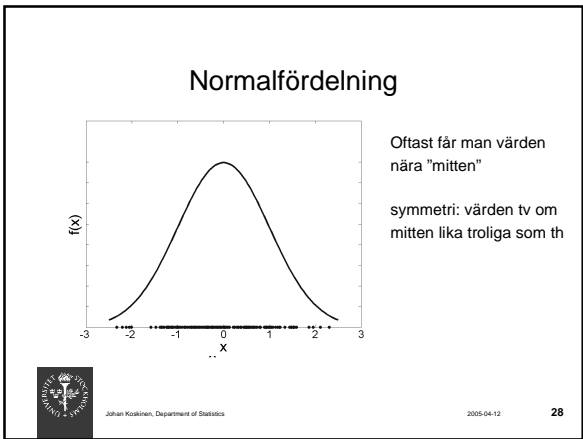
Standardavvikelsen för X ,
 $SD(X) = 0,194$

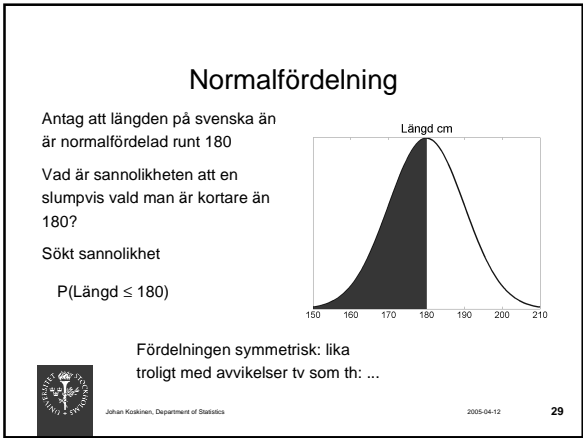


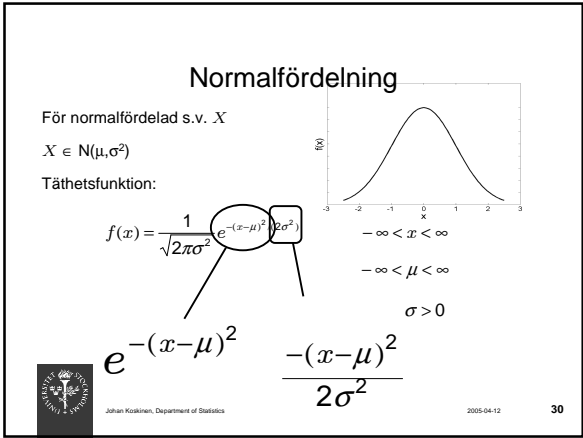
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

27







Normalfördelningen

För normalfördelad s.v. X

$X \in N(\mu, \sigma^2)$

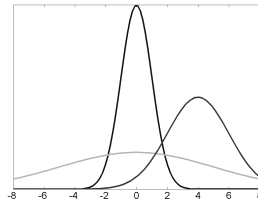
Väntevärde: $E(X) = \mu$

Varians: $\text{Var}(X) = \sigma^2$

Standardavvikelse: $\text{SD}(X) = \sigma$

Median: $P(X \leq \text{Md}) = 1/2$

$\Rightarrow \text{Md} = \mu$



Johari Koskinen, Department of Statistics

2005-04-12

31
