



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F10 Kontinuerliga variabler (forts) och CGS

F-fördelningen

Nu vet vi att för oberoende normalfördelad s.v. X_1, X_2, \dots, X_n med $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})} \in N(0,1) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma / \sqrt{n})} \right]^2 \in \chi^2(1)$$
$$\frac{\bar{X} - \mu}{(s / \sqrt{n})} \in t(v) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\bar{X} - \mu}{(s / \sqrt{n})} \right]^2 \in ?$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

2

F-fördelningen

För oberoende normalfördelad s.v. X_1, X_2, \dots, X_n med $X_i \in N(\mu, \sigma^2)$

$$T^2 = \left[\frac{\bar{X} - \mu}{(s / \sqrt{n})} \right]^2 \in F(1, n-1)$$

För oberoende s.v. $U \in \chi^2(v)$ och $V \in \chi^2(m)$

$$\frac{U/v}{V/m} \in F(v, m)$$

liksom för $N(0,1)$, $\chi^2(v)$ och $t(v)$ använder vi tabell.

Lee A6

2005-04-21

3

F-fördelningen: konsekvens

Antag att vi har ober. lika förd. s.v. X_1, X_2, \dots, X_n med $X_i \in N(\mu_X, \sigma_X^2)$

samt ober. lika förd. s.v. Y_1, Y_2, \dots, Y_m med $Y_i \in N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Borde

$$\frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \in \chi^2(n-1)$$

och

$$\frac{(m-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \in \chi^2(m-1)$$

Och eftersom för oberoende s.v. $U \in \chi^2(v)$ och $V \in \chi^2(r)$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

$$\frac{U/v}{V/r} \in F(v, r)$$



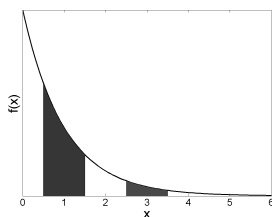
$$\frac{s_X^2 / \sigma_X^2}{s_Y^2 / \sigma_Y^2} \in F(n-1, m-1)$$

2005-04-21

4

Exponentialfördelningen

Antag att vi vill ha en s.v. X som endast antar positiva värden (jfr χ^2)
med sannolikheter (en täthet) som är avtagande



Johannes

2005-04-21

5

Exponentialfördelningen

"Enkelt" sätt skriva sådan täthet för X

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

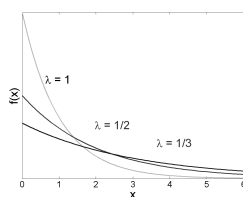
för

$$x > 0$$

och

$$\lambda > 0$$

$$X \in \text{Exp}(\lambda)$$



väntetider i köer
halveringstid
artikel



Johannes Koskinen,

2005-04-21

6

Exponentialfördelningen

Trevliga egenskaper.

Exponentialfördelad s.v. X

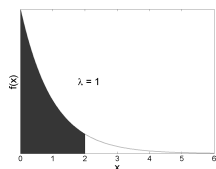
med $X \in \text{Exp}(\lambda)$

Fördelningsfunktion: antag X tid i kön $X \in \text{Exp}(1)$,
slh vänta högst 2 min?

Sökt slh: $P(X \leq 2) = F(2)$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

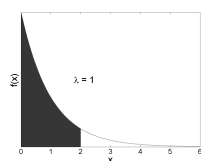


7

Exponentialfördelningen

$X \in \text{Exp}(1)$, slh vänta högst 2 min?

Sökt slh: $P(X \leq 2) = F(2)$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

$$\begin{aligned} F(2) &= \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -e^{-\lambda x} \Big|_0^2 \\ &= -e^{-\lambda 2} - [-e^{-\lambda 0}] \\ &= 1 - e^{-2} \\ &= 0,8647 \end{aligned}$$

2005-04-21

8

Exponentialfördelningen

Fördelningsfunktion:

$X \in \text{Exp}(\lambda)$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$

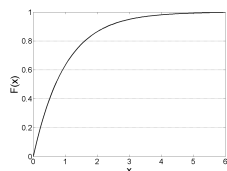
$$= -e^{-\lambda t} \Big|_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x} - [-e^{-\lambda 0}]$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics



2005-04-21

9

Exponentialfördelningen

Stokastisk variabel $X \in \text{Exp}(\lambda)$ med täthetsfunktion

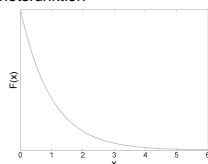
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Är det en täthet?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1?$$

Koll:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-\lambda x}) = 1$$



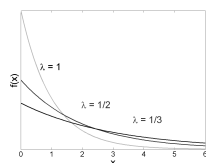
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

10

Exponentialfördelningen

Väntevärde stokastisk variabel $X \in \text{Exp}(\lambda)$?



$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} h(x) g'(x) dx \\ &= h(x)g(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} h'(x)g(x) dx \\ &= x(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x}) dx \\ &= 0 - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

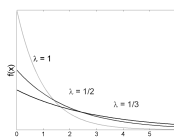
2005-04-21

11

Exponentialfördelningen

Varians stokastisk variabel $X \in \text{Exp}(\lambda)$?

för svar sätt in



$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} h(x) g'(x) dx \\ &= h(x)g(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} h'(x)g(x) dx \\ &= x^2(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x(-e^{-\lambda x}) dx \end{aligned}$$

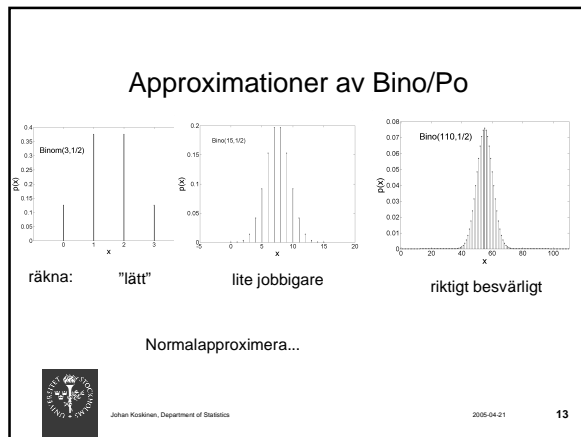
$$\frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} E(X)$$

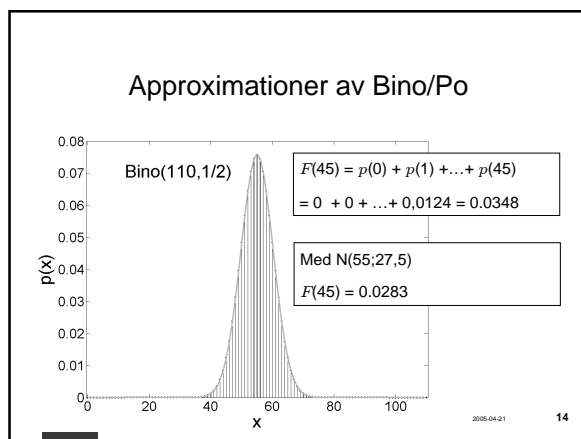


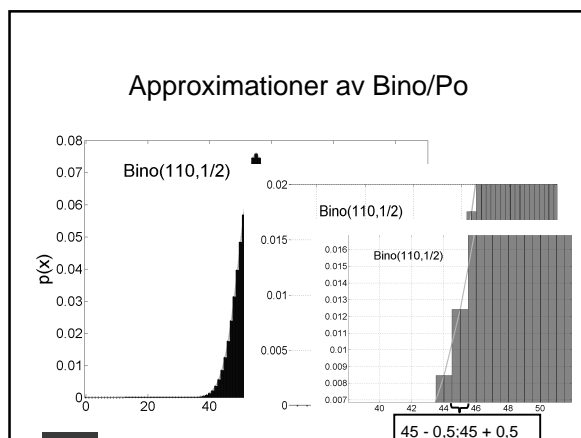
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

12







Approximationer av Bino/Po

Om $X \in \text{Binomial}(n, p)$ kan fördelningsfunktionen

$$F(x) = \sum_{j=0}^x p(j) = \sum_{j=0}^x \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

approximeras med normalfördelningen

$$X \text{ approximativt } \in N(\mu, \sigma^2)$$

där $\mu = E(X) = np$ och $\sigma^2 = \text{Var}(X) = npq$

men med halvkorrektion blir det bättre...



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

16

Approximationer av Bino/Po

Med halvkorrektion blir det bättre:

isf beräkna $F(x) = P(X \leq x)$

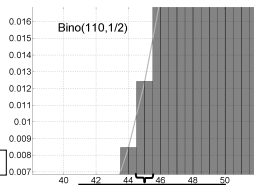
beräkna: $P(X \leq x + 0,5)$

Ex: $X \in \text{Binomial}(110, 1/2)$

$$P(X \leq 45) = P(X \leq 45,5)$$

$$\approx P\left(\frac{X - E(X)}{SD(X)} \leq \frac{45,5 - E(X)}{SD(X)}\right)$$

$$= \Phi(-1,8116) = 0.035$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

17

Centrala gränsvärdessatsen (CGS)

För oberoende likafördelade s.v. X_1, X_2, \dots, X_n fördelade som X med väntevärde $E(X)$ och varians $\text{Var}(X)$

gäller

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = E(X)$$

och

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} \text{Var}(X)$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

18

Centrala gränsvärdessatsen (CGS)

samt under ganska generösa förhållanden
CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN:

$$\bar{X} \text{ approximativt } \in N(E(X), \text{Var}(X))$$

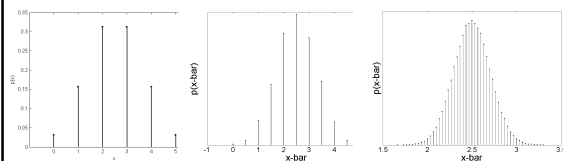


Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

19

Exempel CGS, binomial



Ex: $X \in \text{Binomial}(5, 1/2)$

oberoende
likafördelade s.v.

X_1, X_2
fördelade som X

oberoende
likafördelade s.v.

X_1, X_2, \dots, X_{30}
fördelade som X

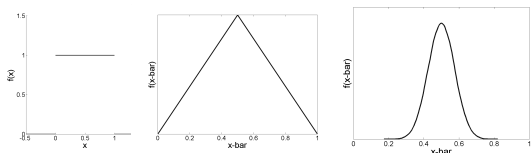


Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

20

Exempel CGS, uniform



Ex: $X \in \text{Unif}(0, 1)$

oberoende
likafördelade s.v.

X_1, X_2
fördelade som X

oberoende
likafördelade s.v.

X_1, X_2, \dots, X_{15}
fördelade som X



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-21

21
