



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F20 icke-parametriska test

Icke-parametriska/fördelningsfria test

Vi gör observationer för $i = 1, \dots, n$ på variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

eller

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ och } Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

Utan att anta fördelningar för var. X eller X och Y

ställer vi upp en nollhypotes H_0

och undersöker hur någon teststatistika uppför sig om det vore så att H_0 var sann



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

2

Teckentest

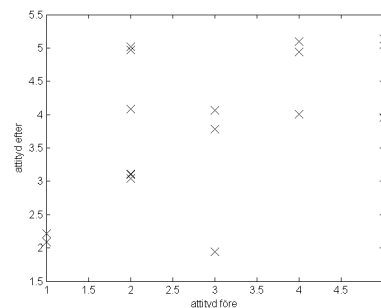
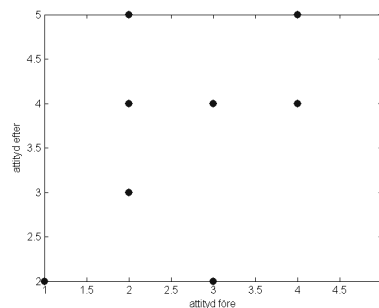
VD tar examen

Inställning till VD före examen

Inställning till VD efter examen

Har examen gjort att inställningen förändrats?

VD (CEO)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
attityd före	3	5	2	2	4	2	1	5	4	5	3	2	2	2	1	3	4
attityd efter	4	5	3	4	4	3	2	4	5	4	4	5	5	3	2	2	5



Teckentest

Förändringar

VD (CEO)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
attityd före	3	5	2	2	4	2	1	5	4	5	3	2	2	2	1	3	4
attityd efter	4	5	3	4	4	3	2	4	5	4	4	5	5	3	2	2	5

förändring	+	±	+	+	±	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+
------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

H_0 : ändrad inställning har inget med utbildning att göra



Johan Koskinen, Department of Statistics



2005-05-23

4

Teckentest

Under H_0 : ändrad inställning har inget med utbildning att göra

är varje förändring ett Bernoulliförsök med slh lyckas (+) p

Vi har $n = 15$ förändringar

antal plus $Y \in \text{Binomial}(15, 1/2)$

när H_0 är sann

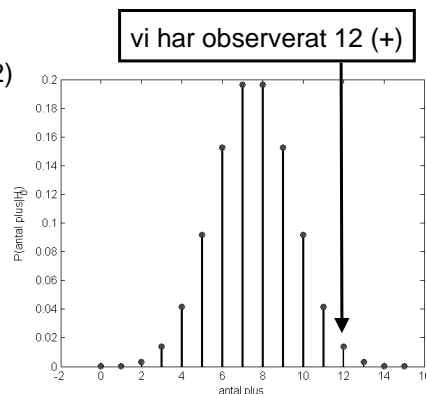
p -värdet:

slh

$$P(Y \geq 12) + P(Y \leq 3)$$

$$= 2(0,0176) = 0,0352$$

Johan Koskinen, Department of Statistics



Teckentest

En marknadsanalytiker vill undersöka om avkastningen skiljer sig för två fonder

H_0 : skillnaden i avkastning är helt slumpmässig

Slumpvis valda mättillfällen

Månad	avkastning fond A (%)	avkastning fond B (%)	skillnad
1	12	14	+
2	11	15	+
3	14	16	+
4	10	9	-
5	12	10	-
6	8	8	±
7	16	18	+
8	13	12	-
9	12	17	+
10	10	13	+
11	6	10	+
12	9	12	+
13	16	15	-
14	13	19	+
15	10	14	+

under H_0 tecknet på varje differens ett Bernoulliförsök med slh lyckas (+) $p = 1/2$

Vi har $n = 14$ förändringar

antal plus

$Y \in \text{Binomial}(14, 1/2)$

när H_0 är sann



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

6

Teckentest

p -värdet:

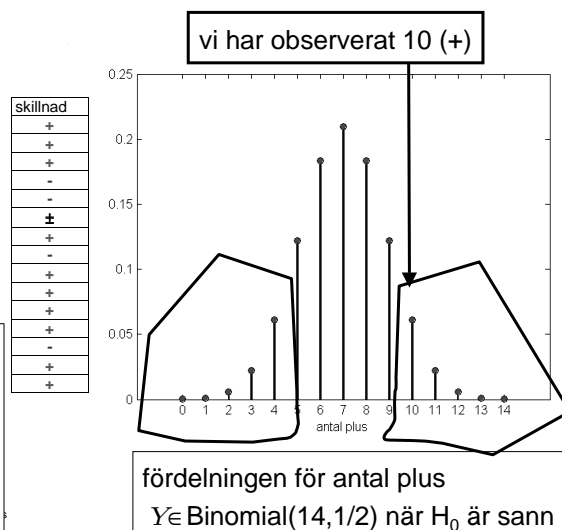
slh att observera något så "extremt" som 9 (+) givet att H_0 är sann

$$P(Y \geq 10) + P(Y \leq 4)$$

$$= 2(0,0898) = 0,1796$$

p -värdet stort jämfört med alla vanliga signifikansnivåer:

vi kan ej förkasta H_0 : avkastningen lika för A & B



Teckentest

När vi gjort observationer för $i = 1, \dots, n$ på variablerna

X_1, X_2, \dots, X_n och Y_1, Y_2, \dots, Y_n

H_0 : skillnaden mellan X och Y är helt slumpmässig

Bilda differenserna $D_i = Y_i - X_i$

låt n^* vara antal $D_i \neq 0$, och T vara antal $D_i > 0$

$T \in \text{Binomial}(n^*, 1/2)$ när H_0 är sann

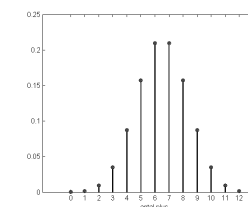
Förkasta när T , antal (+), är stort eller litet

om n^* stort normalapproximera

$$\frac{T/n^* - n^*/2}{\sqrt{(1/2)^2/n^*}} \approx N(0,1)$$



Johan



2005-05-23

8

Wilcoxon's parvisa tecken-rangtest

När vi gjort (parvisa) observationer för $i=1, \dots, n$ på variablerna

X_1, X_2, \dots, X_n och Y_1, Y_2, \dots, Y_n

Wilcoxon'in eşli
çiftler sıra testi

H_0 : medianskillnaden mellan var. X och Y är 0

H_1 : medianskillnaden mellan var. X och Y är skilld från 0

Bilda differenserna $D_i = Y_i - X_i$

+ om $D_i > 0$

utifrån absolutbeloppen $|D_i|$

rangordna observationerna R_i

X	Y	D	+/-	$ D $	R
X_1	Y_1	$D_1 = Y_1 - X_1$	+/-	$ D_1 $	R_1
X_2	Y_2	$D_2 = Y_2 - X_2$	+/-	$ D_2 $	R_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_n	Y_n	$D_n = Y_n - X_n$	+/-	$ D_n $	R_n

Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

9

Wilcoxon's parvisa tecken-rangtest

Vi förkastar H_0 : medianskillnaden mellan var. X och Y är 0

om teststatistikan

$$W = \min(W^-, W^+)$$

är liten

där

$$W^- = \text{summan av rangerna för } (-) = \sum_{i \text{ för vilka } D_i < 0} R_i$$

och

$$W^+ = \text{summan av rangerna för } (+) = \sum_{i \text{ för vilka } D_i > 0} R_i$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

10

Wilcoxon's parvisa tecken-rangtest

Utan att anta fördelningar för X och Y

(andra än att fördelningen för $Y - X$ är symmetrisk runt 0
och egentligen kontinuerlig)

kan man härleda fördelningen för W när H_0 är sann

Kritiska värden ges i tabel A11



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

11

Wilcoxon's parvisa tecken-rangtest

0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
				2				5,5		8,5		11	13	14

Månad	avkastning fond A (%)	avkastning fond B (%)	D	$ D $	R	skillnad
1	12	14	14-12	2	5,5	+
2	11	15	15-11	4	11	+
3	14	16	16-14	2	5,5	+
4	10	9	9-10	1	2	-
5	12	10	10-12	2	5,5	-
6	8	8	8-8	0	0	±
7	16	18	18-16	2	5,5	+
8	13	12	12-13	1	2	-
9	12	17	17-12	5	13	+
10	10	13	13-10	3	8,5	+
11	6	10	10-6	4	11	+
12	9	12	12-9	3	8,5	+
13	16	15	15-16	1	2	-
14	13	19	19-13	6	14	+
15	10	14	14-10	4	11	+

2005-05-23

12

Wilcoxon's parvisa tecken-rangtest

Är de ranger där A har högra avkastning signifikant lägre?

Den observerade teststatistikan

$$W = \min(W^-, W^+) = W^-$$

$$= 2 + 5,5 + 2 + 2 = 11,5$$

R	skillnad
5,5	+
11	+
5,5	+
2	-
5,5	-
0	±
5,5	+
2	-
13	+
8,5	+
11	+
8,5	+
2	-
14	+
11	+

Vi förkastar H_0 när det observerade värdet

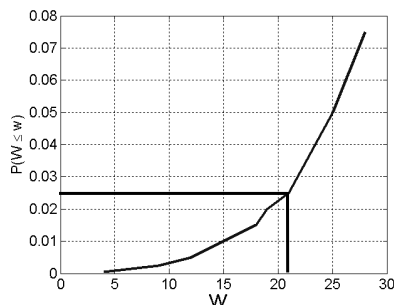
$$W \leq W_{\alpha/2}$$

med det kritiska värdet från A11 för $n = 14$

$$W = 11,5 < 22 = W_{0,05/2} = W_{0,025}$$

vi förkastar H_0 på 5%-nivån

13



Mann-Whitney U-test

När vi gjort observationer för

$$i = 1, \dots, n$$

och

$$j = 1, \dots, m$$

på variablerna

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ och } Y_1, Y_2, \dots, Y_m$$

H_0 : fördelningarna för X och Y är identiska

H_1 : fördelningarna för X och Y är inte identiska

1

rangordna det sammanslagna materialet

2

beräkna rangsummorna för stickproven från X respektive Y

3

Beräkna U-statistikan U , från den största av rangsummorna



Johan Koskinen, Department of Statistics

Mann-Whitney U-test

Exempel: Flygtid för tilt-propellerplan A:

$$X_1, X_2, \dots, X_6$$

Flygtid för tilt-propellerplan B:

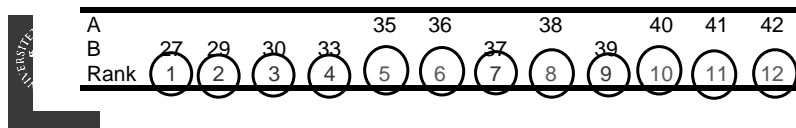
$$Y_1, Y_2, \dots, Y_6$$

$$R_A = 5 + 6 + 8 + 10 + 11 + 12$$

$$= 52$$

$$R_B = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 9 = 26$$

Flygtid modell A	Flygtid modell B
35	29
38	27
40	30
42	33
41	39
36	37



15

Mann-Whitney U-test

Vi förkastar H_0 : fördelningarna för X och Y är identiska

alltså, flygtiderna lika för modell A och B

om teststatistikan

$$U = nm + \frac{n(n+1)}{2} - R_A$$

$$U = nm + \frac{m(m+1)}{2} - R_B$$

är liten



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-05-23

16

Mann-Whitney U-test

I tabell A12 ges kritiska värden för rangsummorna

Vi förkastar H_0 när det
mindre av de
observerade värdena

$$R_B \leq R_{m,\alpha}$$

med det kritiska värdet från
A12 för $n = 6$

$$R_B = 26 \leq 26$$

vi förkastar H_0 på 5%-nivån

Vi förkastar H_0 när det
större av de
observerade värdena

$$R_A \geq R_{n,\alpha}$$

med det kritiska värdet från
A12 för $n = 6$

$$R_A = 52 \geq 52$$

vi förkastar H_0 på 5%-nivån

Kruskal-Wallis test för oberoende stickprov

När vi gjort n_1, n_2, \dots, n_k

observationer från k populationer

H_0 : fördelningarna för alla k
populationer identiska

H_1 : fördelningarna är inte identiska
för alla k populationer

X	Y		V
X_1	Y_1	...	V_1
X_2	Y_2	...	V_2
...
X_{n_1}	Y_{n_2}	...	V_{n_k}

- 1 rangordna det
sammanslagna
materialet
- 2 beräkna
rangsummorna
för stickproven
separat
- 3 Beräkna K-
statistikan K

Kruskal-Wallis test för oberoende stickprov

När rangsummorna är beräknade för de k stickproven

X	X	Y	Y		V	V
X_1	rang för X_1	Y_1	rang för Y_1	...	V_1	rang för V_1
X_2	rang för X_2	Y_2	rang för Y_2	...	V_2	rang för V_2
...
X_{n_1}	rang för X_{n_1}	Y_{n_2}	rang för Y_{n_2}	...	V_{n_k}	rang för V_{n_k}
	R_1		R_2			R_k

Ges K av

$$K = \frac{12}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} \right) - 3(n+1)$$

Där $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Kruskal-Wallis test för oberoende stickprov

Exempel: exekveringstid för tre olika program

45	30	22
38	40	19
56	28	15
60	44	31
47	25	27
65	42	17

I Minitab:

Kruskal-Wallis Test: Tid versus program

Kruskal-Wallis Test on Tid

program	N	Median	Ave Rank	Z
1	6	51.50	15.0	3.09
2	6	35.00	9.3	-0.09
3	6	20.50	4.2	-3.00
Overall	18		9.5	

H = 12.36 DF = 2 P = 0.002

Tid	program	rank
45	1	14
38	1	10
56	1	16
60	1	17
47	1	15
65	1	18
30	2	8
40	2	11
28	2	7
44	2	13
25	2	5
42	2	12
22	3	4
19	3	3
15	3	1
31	3	9
27	3	6
17	3	2