



Johan Koskinen, Statistiska institutionen, Stockholms universitet

Finansiell statistik, vt-05

F3 Sannolikhets teori

Bayes sats

Exempel: antag att vi har tre skålar

$$P(G|A) = 0$$

$$P(G|B) = 2/5$$

$$P(G|C) = 4/5$$



A

B

C

och någon väljer skål m slh:

$$P(A) = 1/3$$

$$P(B) = 1/6$$

$$P(C) = 1/2$$



Johan Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

2

Bayes sats; forts

marginalsannolikheten, slh dra grön marker
enligt lagen om total sannolikhet

$$P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B) + P(G \cap C)$$

$$= P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{4}{10}$$

$$= 7/15$$



Johan Koskinen, Department of Statistics



3

Bayes sats; forts

antag vi drar G

vilken skål har vi dragit ur?

sannolikheten att vi dragit från A ?

1: betingning
$$P(B|G) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)}$$

2: enligt multiplikationsregeln $P(G \cap B) = P(G|B) P(B)$

3: vi har beräknat $P(G)$ så...



Johannes Koskinen, Department of Statistics



4

Bayes sats; forts

enligt 1:

$$P(B|G) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{7}$$

Vad vi gjort är att vända på betingningen

$$P(B|G) = \frac{P(G|B)P(B)}{P(G)}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics



5

Bayes sats:

Om A_1, A_2, \dots, A_n är disjunkta händelser så att

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

och vi känner $P(A_1|B), \dots, P(A_n|B)$, och

$P(A_1), \dots, P(A_n)$, ges för varje i

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics



6

Elementär kombinatorik

För att kunna forma sannolikheter (oavsett subjektiv, klassisk eller frekventistisk) måste vi veta "hur många utfall vi kan få" ("uppenbart" i t.ex. tävningsspelande)



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

7

Elementär kombinatorik



Samsonite med treställigt kodlås:
hur många kombinationer?



Svar: lika många som alla tal mellan 0
och 999 (inklusive 0 och 999)

Antag mitten trasig, går bara till 8



hur många kombinationer?



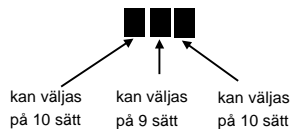
Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

8

Multiplikationsregeln

Med mitten trasig



träddiagram

för varje val på första finns 9 val
för andra

för varje val på andra finns 10 val
för tredje



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

9

Multiplikationsregeln

Antal möjliga sätt att utföra r operationer där operationerna kan utföras på n_1, n_2, \dots, n_r olika sätt ges av

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$$



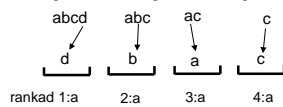
Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

10

Permutationer

Exempel: en expert skall rangordna företagen a, b, c och d utifrån kvalitén på deras FOU
Hur många randordningar kan han göra?



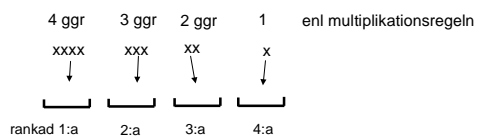
Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

11

Permutationer: exempel ranking

Schematiskt kan experten ranka på



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

12

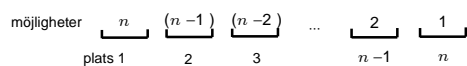
Permutationer

Generellt: antal permutationer av n objekt

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-2))(1) = n!$$

och där

$$0! = 1$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

13

Permutationer av obj valda ngr i taget

Antag vi inte skall permutera alla n objekten
endast r av dem.

Av $n = 10$ valbara styrelsemedlemmar skall vi utse
ordförande, 1:e vice ordförande samt 2:e vice
ordförande
Hur många konfigurationer?

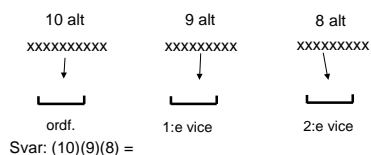


Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

14

Perm: styrelseledning



$$\frac{(10)(9)(8)(7)\cdots(3)(2)(1)}{(7)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{10!}{7!} = 720$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

15

Permutationer av obj valda ngr i taget

Antal permutationer av n objekten
valda r i taget

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

möjligheter $\underbrace{n}_{\text{plats 1}} \underbrace{(n-1)}_2 \underbrace{(n-2)}_3 \dots \underbrace{(n-r+2)}_{r-1} \underbrace{(n-r+1)}_r$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

16

Val utan avseende på ordning

Får man det
här är man
glad



Exempel: hur många pokerhänder kan man få (52 kort)?

Om ordningen de kommer upp i räknas



$${}_{52}P_5 = \frac{52!}{(52-5)!} = (52)(51)(50)(49)(48) = 311875200$$

Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

17

Val utan avseende på ordning

Men då har vi räknat t.ex.



$(5)(4)(3)(2)(1) = 5! = 120$ ggr
t.ex.



etc ...



hämtat från www.itv.se/~va241/Lek01.htm

18

Val utan avseende på ordning

Eftersom detta gäller för alla kombinationer av kort:

$${}_{52}P_5 / 5! = \frac{52!}{47!5!} = \frac{311875200}{120} = 2598960$$

Antalet pokerhänder är alltså runt 2 och en halv miljon.



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

19

Val utan avseende på ordning

Generellt när vi skall välja r objekten
av totalt n utan avseende på ordning:

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Betecknas vanligtvis:

$${}_nC_r = \binom{n}{r}$$

Och kallas för binomialkoefficienten



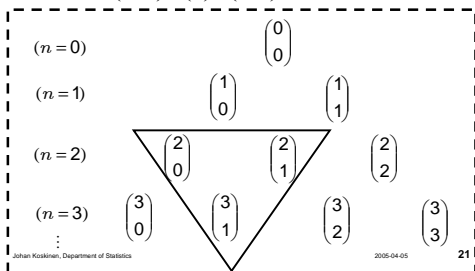
Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

20

Val utan avseende på ordning; div

Rekursion: $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$

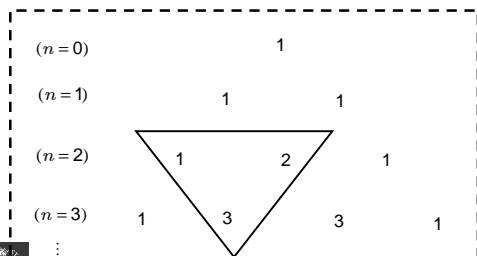


Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

21

Val utan ordning; Pascals triangel



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

22

Val utan avseende på ordning; SCB

I SCB's Företagsdatabas nov 2003 fanns 146 029 företag med 1-4 anställda
 på hur många sätt kan SCB välja ut
 13779 företag med 1-4 anställda?

$$\binom{146029}{13779}$$

(så stora tal att vi måste approximera)



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

23

Val utan avseende på ordning; Binomial koeff.

Om man utvecklar

$$(x + y)^2$$

får man

$$x^2 + 2xy + y^2$$

men hur många termer

$$x^3 y^2$$

finns det i $(x + y)^5$?

Alt. formulering: på hur många sätt kan man välja ut tre faktorer x

ur $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$?

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(2)(1)} = \frac{(5)(4)}{(2)(1)} = 10$$



Johannes Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

24

Inte alla element distinkta

Exempel: MASSASAUGA är en nordamerikansk skallerorm

På hur många sätt kan man felstava ormens namn givet att man kommer ihåg alla och hur många bokstäver det skall vara?



Vi kan skriva $M_1 A_1 S_1 S_2 A_2 S_3 A_3 U_1 G_1 A_4$
så antalet permutationer $n! = 10!$

Bryr oss ej om ordningen på ex

$M_1 A_1 S_1 S_2 A_2 S_3 A_3 U_1 G_1 A_4$

$M_1 A_2 S_1 S_2 A_1 S_3 A_3 U_1 G_1 A_4$

etc



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

25

Inte alla element distinkta

Svaret ges av: antalet permutationer

$M_1 A_1 S_1 S_2 A_2 S_3 A_3 U_1 G_1 A_4$

$n! = 10!$

delat med antalet permutationer

M_1

gånger

$A_1 A_2 A_3 A_4$

gånger

$S_1 S_2 S_3$

gånger

U_1

gånger

G_1

$$\frac{10!}{1!4!3!1!1!} = 25200$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

26

Några sammanfattande formler

Antal sätt ta k element av n :

med återläggning

utan återläggning

Med hänsyn till ordning

$$n^k$$

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

utan hänsyn till ordning

$$\binom{n+k-1}{k}$$

$$\binom{n}{k}$$



Johann Koskinen, Department of Statistics

2005-04-05

27