



STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Tatjana Nahtman

HT 2007

Tentamen i Sannolikhetsteori, 7,5 poäng.

Skrivtid: 5 timmar

Tentamensgenomgång och återlämning: info kommer senare (se kursens hemsida).

Därefter kan skrivningarna hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset.

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 50 poäng. För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.

Lycka till!

Uppgift 1. (10p)

Låt X och Y vara oberoende likafördelade stokastiska variabler, $X \sim N(0, 1)$ och $Y \sim N(0, 1)$. Låt $Z = \min(X, Y)$. Bevisa att $Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Uppgift 2. (10p)

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med fördelningsfunktion $F_X(x)$. Definera en ny stokastisk variabel Y som $Y = F_X(X)$. Visa att $Y \sim U(0, 1)$, $0 < y < 1$.

Uppgift 3. Bevisa att om $P(Y \geq 0) = 1$ och $P(Y = 0) < 1$, då gäller för godtyckligt $r > 0$,

$$P(Y \geq r) \leq \frac{E(Y)}{r}$$

och

$$P(Y \geq r) = \frac{E(Y)}{r} \text{ om och endast om } P(Y = r) = p = 1 - P(Y = 0), \quad 0 < p \leq 1.$$

Uppgift 4. (10p)

- (a) Definera den momentgenererande funktionen för en stokastisk variabel X .
- (b) Bestäm den momentgenererande funktionen till en lognormalfördelad stokastisk variabel.
- (c) Vilken familj av täthetsfunktioner (sannolikhetsfunktioner) kallas för exponentialfamilj?

Ge två exempel på täthetsfunktioner som tillhör exponentialfamiljen.

Uppgift 5. (10p)

Låt U och V vara oberoende stokastiska variabler sådana att $U \sim N(0, 1)$ och $V \sim \chi^2(n)$. Låt $Z = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$. Härled $f_Z(z)$. Bevisa att

$$Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1).$$

LÖSNINGAR.

Uppgift 1.

Bevis. Fördelningsfunktionen för Z är följande

$$\begin{aligned} F_{Z^2}(z) &= P((\min(X, Y))^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq \min(X, Y) \leq \sqrt{z}) \\ &= P(\min(X, Y) \leq \sqrt{z}) - P(\min(X, Y) \leq -\sqrt{z}) \\ &= [1 - P(\min(X, Y) > \sqrt{z})] - [1 - P(\min(X, Y) > -\sqrt{z})] \\ &= P(\min(X, Y) > -\sqrt{z}) - P(\min(X, Y) > \sqrt{z}) \\ &= P(X > -\sqrt{z}) \cdot P(Y > -\sqrt{z}) - P(X > \sqrt{z}) \cdot P(Y > \sqrt{z}). \end{aligned}$$

Därför att X och Y är likafördelade, gäller att

$$P(X > a) = P(Y > a) = 1 - F_X(a)$$

och

$$F_{Z^2}(z) = (1 - F_X(-\sqrt{z}))^2 - (1 - F_X(\sqrt{z}))^2 = 1 - 2F_X(-\sqrt{z}),$$

därför att

$$1 - F_X(\sqrt{z}) = F_X(-\sqrt{z}).$$

Täthetsfunktionen för Z^2 är följande

$$f_{Z^2}(z) = \frac{d}{dz} F_{Z^2}(z) = f_X(-\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} z^{-1/2},$$

som är täthetsfunktion för en $\chi^2(1)$ -stokastisk variabel.

Uppgift 2.

Se Teorem 2.1.10 i Casella G., och Berger, R.L. (2007). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Andra upplagan. S. 54.

Uppgift 3.

Lösning. (Kontinuerliga fallet)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = \int_0^{\infty} yf(y)dy \geq \int_r^{\infty} yf(y)dy \geq r \int_r^{\infty} f(y)dy = rP(Y \geq r).$$

Uppgift 4.

(a) Se Definition 2.3.6 i Casella G., och Berger, R.L. (2007). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Andra upplagan. S. 62.

(b) Se lösningar till hemtentamen Uppgift 2 (a).

(c) Se Del 3.4 i Casella G., och Berger, R.L. (2007). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Andra upplagan. S. 111.

Uppgift 5.

Se Del 5.3.2 (The Derived Distributions: Student's t and Snedecor's F) i Casella G., och Berger, R.L. (2007). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Andra upplagan. S. 222-224.

Låt U och V vara oberoende stokastiska variabler sådana att $U \sim N(0, 1)$ och $V \sim \chi^2(n)$. Låt

$Z = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$. Bevisa att $Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1)$.

Bevis. Täthetsfunktionen för Z är följande

$$f_Z(z) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \right] \cdot \frac{1}{(1 + x^2/n)^{(n+1)/2}}.$$

Låt

$$C_n = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \right].$$

Med hjälp av Stirlings formel (Uppgift 1.28 i Casella G., och Berger, R.L. (2007). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Andra upplagan. S. 40)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+(1/2)} e^{-n}$$

får vi att

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{n-2}{2}\right)^{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \\ &= \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)^{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} \quad (\text{Lemma 2.3.14}) \\ &= \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

För varje x gäller att (Lemma 2.3.14),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2} = e^{x^2/2}.$$