

Hemtentamen i Sannolikhetssteori, 7,5 poäng.

LÖSNINGAR.

Uppgift 1.

Redogör för begreppet Edgeworth utveckling (Edgeworth expansion). Ge ett exempel när Edgeworth utveckling används.

Se till exempel Feller, W. (1971). *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics, Volume 2.

Uppgift 2.

Antag att stokastisk variabel X har täthetsfunktionen $f_X(x)$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-(\ln x)^2/2}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

- (a) Visa att $E(X^r) = e^{r^2/2}$, $r = 0, 1, 2, \dots$
(b) Visa att den momentgenererande funktionen $M_X(t)$ existerar inte.

Lösning.

(a)

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^\infty x^r \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-(\ln(x))^2/2} dx && (X \text{ har lognomalfördelningen med } E(X) = 0 \text{ och } D(X) = 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{y(r-1)} e^{-y^2/2} e^y dy && (\text{använd } y = \ln(x), \quad dy = \frac{dx}{x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2 + ry} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(y^2 - 2ry + r^2)/2} e^{r^2/2} dy \\ &= e^{r^2/2}. \end{aligned}$$

(b) Man kan visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx - (\ln(x))^2} = \infty.$$

Enligt L'Hôpitals regel

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{tx - (\ln(x))^2}{tx} &= 1, \\ \text{alltså} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (tx - (\ln(x))^2) &= \lim_{x \rightarrow \infty} tx = \infty. \end{aligned}$$

För godtyckligt $k > 0$, det finns en konstant c sådan att,

$$\int_k^\infty \frac{1}{x} e^{tx} e^{(\ln(x))^2/2} dx \geq c \int_k^\infty \frac{1}{x} dx = c \cdot \ln(x)|_k^\infty = \infty.$$

Uppgift 3.

(a) Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende stokastiska variabler och $X_i \sim \text{Exp}(1)$, $i = 1, 2, \dots$. Visa att för varje x gäller att

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow P(Z \leq x), \quad (1)$$

där $Z \sim N(0, 1)$.

Lösning.

Eftersom $X_i \sim \text{Exp}(1)$, $E(X) = 1$ och $D(X) = 1$. Enligt Centrala gränsvärdessatsen

$$\bar{X}_n \underset{\text{appr.}}{\sim} N(1, 1/n).$$

Alltså,

$$\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \rightarrow Z \sim N(0, 1) \text{ och } P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow P(Z \leq x).$$

(b) I formel (1) derivera båda sidor med avseende på x .

$$\frac{d}{dx} P(Z \leq x) = \frac{d}{dx} F_Z(x) = f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x \right) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\sqrt{n} + n \right) && \left(W = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, 1) \right) \\ &= \frac{d}{dx} F_W(x\sqrt{n} + n) = f_W(x\sqrt{n} + n) \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\Gamma(n)} (x\sqrt{n} + n)^{n-1} e^{-(x\sqrt{n} + n)} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Uppgift 4.

Redogör för begreppet karakteristisk funktion. Gemför karakteristisk funktion och momentgenererande funktion med avseende på egenskaper.

Se Casella G., och Berger, R.L. (2007). *Statistical Inference*. Duxbury Press. Andra upplagan. S. 84. Andra källor:

1. Feller, W. (1968). *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics, Volume 1.
2. Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. New York: Wiley, 3rd ed.

Uppgift 5.

Vad är en martingal? Vad används martingaler till?

Se Kapitel 10 i Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*. Springer-Verlag, New York.