

Lösningar till tentamen i Tidsserieanalys 050603

Uppgift 1:

a) Ja modellen verkar lämplig.

Skattningarna är signifikanta, modellen som helhet är signifikant.

Durbin-Watson's test:

H_0 : Residualerna är inte autokorrelerade (oberoende)

H_1 : Residualerna är positivt autokorrelerade (beroende)

Testvariabel:

$$D = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Förkasta H_0 om $D_{obs} < d_{L,\alpha}$, acceptera H_0 om $D_{obs} > d_{U,\alpha}$

$D_{obs} = 1.77643 > d_{U,0.05} = 1.53 \Rightarrow H_0$ accepteras, residualerna är oberoende.

Är residualerna normalfördelade? Avgörs med Anderson-Darlings test:

H_0 : Residualerna är normalfördelade

H_1 : Residualerna är inte normalfördelade

Observerat p-värde: 0,444 $\Rightarrow$ Acceptera H_0 .

b) Prognos för y_{19} : $e^{2.213+0,2025 \times 19+0,003604 \times 19^2} = 1574.265$.

c) Skattning av r_1 : Använd att $D_{obs} \approx 2(1 - r_1)$:

$$1.77643 \approx 2 - 2r_1 \Rightarrow r_1 \approx 0,111785$$

d) Om $r_k < 0$, gäller att höga värden vid tidpunkt t ofta efterföljs av låga värden vid tidpunkt $t + k$, och vice versa.

Uppgift 2:

a) Den additiva modellen används vid additiv säsongvariation.

b) Se boken, eller föreläsningssanteckningar kap. 7.

Uppgift 3:

Tydlig positiv trend - använd Holt's metod.

Skatta först en linjär regressionsmodell till materialet för erhålla startvärden:

$$b_1 = \frac{\sum y_i t - \frac{\sum t \sum y_i}{n}}{\sum t^2 - \frac{(\sum t)^2}{n}} = \frac{2009 - \frac{10 \times 780}{4}}{30 - \frac{(10)^2}{4}} = 11.8$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t} = \frac{780}{4} - 11.8 \times \frac{10}{4} = 165.5$$

Så skattningen $l_0 = 165.5$, och $b_0 = 11.8$.

Utgjämningsekvationer:

$$\begin{aligned}l_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \gamma(l_t - l_{t-1}) + (1 - \gamma)b_{t-1}\end{aligned}$$

Utgjämna värden blir ($\alpha = \gamma = 0.2$):

$$\begin{aligned}l_{2001} &= 0.2 \times 178 + 0.8(165.5 + 11.8) = 177.44 \\ b_{2001} &= 0.2(177.44 - 165.5) + 0.8 \times 11.8 = 11.828\end{aligned}$$

På samma sätt blir utgjämna värden för 2002-2004:

$$\begin{aligned}l_{2002} &= \dots = 188.614 \\ b_{2002} &= \dots = 11.697 \\ l_{2003} &= \dots = 201.249 \\ b_{2003} &= \dots = 11.885 \\ l_{2004} &= \dots = 212.707 \\ b_{2004} &= \dots = 11.799\end{aligned}$$

Prognos för 2005 är: $\hat{y}_{2005} = l_{2004} + b_{2004} = 212.707 + 11.799 = 224.506$

Prognos för 2006 är: $\hat{y}_{2006} = l_{2004} + 2 \times b_{2004} = 212.707 + 2 \times 11.799 = 236.305$

Uppgift 4:

a) Tidsserien görs förmodligen stationär genom att först logaritmera, och sedan i tur och ordning beräkna 1:a differenser och 12:e differenser. Dvs.

$$z_t = (\ln y_t - \ln y_{t-1}) - (\ln y_{t-12} - \ln y_{t-13})$$

b) Konstant väntevärde och konstant varians.

c) Ja, modellen verkar lämplig.

Parameterskattningarna är signifikanta.

Residualernas oberoende testas med Ljung-Box:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$$

$$H_1 : \text{minst en av } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k \neq 0$$

Testvariabel:

$$Q^* = n' (n' + 2) \sum_{l=1}^K \frac{r_l^2(\hat{a})}{(n' - l)}$$

Observerade p-värden alla höga, dvs vi accepterar H_0 .

d) TAC dör ut på icke-säsongsnivån, men har en spik på säsongsnivå (lag 12), annars noll. TPAC har två spikar på icke-säsongsnivå (lag 1 och lag 2), säsongsnivån dör ut.

e) Vi har modellen:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) z_t = (1 - \theta_{1,12} B^{12}) a_t$$

Dvs.

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t - \theta_{1,12} a_{t-12}$$

Ta förväntat värde på båda sidor:

$$E(z_t) = \phi_1 E(z_{t-1}) + \phi_2 E(z_{t-2}) + E(a_t) - \theta_{1,12} E(a_{t-12})$$

Eftersom z_t är stationär (har konstant väntevärde), och a_t är vitt brus gäller att $E(z_t) = E(z_{t-1}) = E(z_{t-2}) = \mu$, och att $E(a_t) = E(a_{t-12}) = 0$. Detta ger att μ också är lika med 0.

f) Ja, den är invertibel eftersom $|\theta_{1,12}| < 1$.

g) Modellen är

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) z_t = (1 - \theta_{1,12} B^{12}) a_t$$

där $z_t = \nabla \nabla_{12} \ln y_t = (1 - B)(1 - B^{12}) \ln y_t$ så att:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) (1 - B)(1 - B^{12}) \ln y_t &= (1 - \theta_{1,12} B^{12}) a_t \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) (1 - B - B^{12} + B^{13}) \ln y_t &= (1 - \theta_{1,12} B^{12}) a_t \end{aligned}$$

Vi får att:

$$\begin{aligned} &(1 - B - B^{12} + B^{13} - \phi_1 B + \phi_1 B^2 + \phi_1 B^{13} - \phi_1 B^{14} - \phi_2 B^2 + \phi_2 B^3 + \phi_2 B^{14} - \phi_2 B^{15}) \ln y_t \\ &= (1 - \theta_{1,12} B^{12}) a_t \end{aligned}$$

Multiplicera nu in $\ln y_t$ i vänsterledet, och flytta över allt annat till högerledet:

$$\begin{aligned} \ln y_t &= \ln y_{t-1} + \ln y_{t-12} - \ln y_{t-13} + \phi_1 \ln y_{t-1} - \phi_1 \ln y_{t-2} - \phi_1 \ln y_{t-13} + \phi_1 \ln y_{t-14} \\ &\quad + \phi_2 \ln y_{t-2} - \phi_2 \ln y_{t-3} - \phi_2 \ln y_{t-14} + \phi_2 \ln y_{t-15} + a_t - \theta_{1,12} a_{t-12} \end{aligned}$$

Och slutligen gäller att $e^{\ln y_t} = y_t$:

$$\hat{y}_{169} = \exp \left[\begin{aligned} &\ln y_{168} + \ln y_{157} - \ln y_{156} + \phi_1 \ln y_{168} - \phi_1 \ln y_{167} - \phi_1 \ln y_{156} + \phi_1 \ln y_{155} \\ &\quad + \phi_2 \ln y_{167} - \phi_2 \ln y_{166} - \phi_2 \ln y_{155} + \phi_2 \ln y_{154} + \hat{a}_{169} - \theta_{1,12} a_{157} \end{aligned} \right]$$

Uppgift 5:

a) Det är en MA(2)-modell.

b)

$$E(Y_t) = 8 + E(a_t) + 0.3E(a_{t-1}) - 0.4E(a_{t-2}) = 8 + 0 + 0 + 0 = 8$$

och

$$Var(Y_t) = Var(8 + a_t + 0.3a_{t-1} - 0.4a_{t-2}) = 0 + Var(a_t) + 0.3^2 Var(a_{t-1}) + 0.4^2 Var(a_{t-2})$$

där $Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = Var(a_{t-2}) = 0.2$. Så vi får:

$$Var(Y_t) = 0.2(1 + 0.3^2 + 0.4^2) = 0.25$$