

TENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1

2011-02-15

Skrivtid: 9.00-14.00

Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.

Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)

Vid en tingsrätt är 80 % av alla som åtalas i ett brottsmål skyldiga till brottet. Sannolikheten att ett åtal leder till en fällande dom om den åtalade är skyldig är 0.92 och sannolikheten att ett åtal leder till en fällande dom om den åtalade är oskyldig är 0.02.

- a) Hur stor andel av åtalen leder till en fällande dom?
- b) Vad är sannolikheten att en åtalad som har fällts för ett brott är oskyldigt dömd?

Uppgift 2. (20 poäng)

I ett mycket stort lotteri fördelar sig X = lottvinsten i kronor på en lott enligt följande:

x	0	25	50	100	500
$f(x)$	0.7	0.2	0.06	0.025	0.015

- a) Beräkna väntevärde och varians för lottvinsten.
- b) Antag nu att man drar fem lotter och är intresserad av den totala vinsten, dvs summan av de fem lottvinsterna $Y = \sum_{i=1}^5 X_i$. Beräkna väntevärde och varians för den totala vinsten. Eftersom det är ett mycket stort lotteri kan lottvinsterna antas vara oberoende.

Uppgift 3. (20 poäng)

En biluthyrningsfirma uppskattar att den månatliga underhållskostnaden följer en normalfördelning med väntevärde 8000 kr och standardavvikelse 800 kr.

- a) Beräkna sannolikheten att underhållskostnaden hamnar i intervallet 7000-9000 kr.
- b) Vid planeringen av budgeten vill man ta reda på ett värde för underhållskostnaden som är sådant att sannolikheten att underhållskostnaden överstiger detta värde är 0.01. Vilket belopp motsvarar det?

Uppgift 4. (20 poäng)

Frisörkedjan X:et analyserar regelbundet olika aspekter av sin verksamhet, bland annat hur lång tid en klippning tar. Man har då kommit fram till att en lämplig modell för klippningstiden i minuter är en normalfördelning med väntevärde 47 minuter och standardavvikelse 6.5 minuter. Man har också konstaterat att 23 % av kunderna köper någon hårprodukt i samband med klippningen.

- a) Beräkna sannolikheten att en klippning tar kortare tid än 50 minuter.
- b) Om man slumpmässigt väljer ut och observerar klippningstiden för 25 kunder, vad är sannolikheten att minst 10 av 25 klippningar tar längre tid än 50 minuter?
- c) Beräkna sannolikheten att minst en av de 25 kunderna köper någon hårprodukt.

Uppgift 5. (20 poäng)

En byggherre behöver hyra in entreprenörer för två projekt. Valet står mellan tre likvärdiga entreprenörer: A, B och C. Byggherren bestämmer sig för att slumpmässigt tilldela de två projekten till entreprenörerna. Varje entreprenör kan alltså få utföra 0, 1 eller 2 projekt. Låt X = antal projekt som går till entreprenör A och Y = antal projekt som går till entreprenör B.

- a) Definiera simultan sannolikhetsfördelning och marginalfördelning med ord och/eller med formler.
- b) Bestäm den simultana sannolikhetsfördelningen för X och Y .
- c) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y .

Formler

Additionssatsen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Multiplikationssatsen:

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B) = P(B | A) P(A)$$

Väntevärde för en diskret stokastisk variabel X :

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

Varians för en diskret stokastisk variabel X :

$$V(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - [E(X)]^2$$

Kovarians och korrelation mellan två diskreta stokastiska variabler X och Y :

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \sum_x \sum_y [x - E(X)][y - E(Y)] f_{X,Y}(x, y) = \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}(x, y) - E(X) E(Y) \\ \rho &= Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}} \end{aligned}$$

Räkneregler för väntevärden och varianser (a , b och c är konstanter, X och Y är stokastiska variabler):

$$\begin{aligned} E(c) &= c \\ E(cX) &= cE(X) \\ E(c + X) &= c + E(X) \\ E(aX + bY) &= aE(X) + bE(Y) \\ V(c) &= 0 \\ V(cX) &= c^2 V(X) \\ V(c + X) &= V(X) \\ V(aX + bY) &= a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab Cov(X, Y) \end{aligned}$$

Binomialfördelningen:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$