

TENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1

2010-09-28

Skrivtid: 14.00-19.00

Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.

Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)

Antag att priset på en Gamma-aktie är en stokastisk variabel och att priset på en Delta-aktie är en stokastisk variabel. Väntevärdet för priset på Gamma-aktien är 60 kr och standardavvikelsen för priset på Gamma-aktien är 10 kr. För priset på Delta-aktien gäller att väntevärdet är 120 kr och standardavvikelsen är 20 kr. Kovariansen mellan aktiepriserna är -120. En investerare överväger tre aktieportföljer:

1. en portfölj bestående av 20 st Gamma-aktier
2. en portfölj bestående av 20 st Delta-aktier
3. en portfölj bestående av 10 st Gamma-aktier och 10 st Delta-aktier

a) Beräkna väntevärdet för var och en av de tre portföljerna.

b) Beräkna standardavvikelsen för var och en av de tre portföljerna.

Uppgift 2. (20 poäng)

För att få körkort krävs bland annat att man klarar förarprovet. Man kan antingen köra upp via en trafikskola eller som privatist. Antag att sannolikheten att en provtagare kör upp som privatist är 0.15. Antag också att sannolikheten att klara förarprovet om man kör upp som privatist är 0.6 medan sannolikheten att man klarar förarprovet om man kör upp via en trafikskola är 0.85.

a) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald provtagare klarar förarprovet.

b) Är händelserna "klara förarprovet" och "köra upp som privatist" beroende eller oberoende? Motivera svaret.

Uppgift 3. (20 poäng)

På ett företag har man analyserat antalet frånvarodagar per månad på företagets två avdelningar: ekonomiavdelningen och säljavdelningen, och kommit fram till följande betingade fördelningar.

Betingade fördelningar för antal frånvarodagar givet avdelning

Antal frånvarodagar	Avdelning	
	Ekonomi	Sälj
0	0.5	0.4
1	0.35	0.3
2	0.15	0.15
3	0	0.15
Summa	1	1

- Beräkna det förväntade antalet frånvarodagar för ekonomiavdelningen.
- Antag att 40 % är anställda på ekonomiavdelningen. Bestäm den simultana sannolikhetsfördelningen för variablerna "antal frånvarodagar" och "avdelning".
- Vad är sannolikheten att det inte är några frånvarodagar alls en månad?

Uppgift 4. (20 poäng)

På ett förarprovskontor görs 12 uppkörningar varje dag. Sannolikheten att en uppkörning bedöms som godkänd är 0.6 och uppkörningarna är oberoende av varandra.

- Beräkna sannolikheten att exakt hälften av uppkörningarna blivit godkända under en dag.
- Beräkna sannolikheten att minst hälften av uppkörningarna blivit godkända under en dag.
- En arbetsvecka består av 5 dagar. Vad är sannolikheten att minst hälften av uppkörningarna blivit godkända under en arbetsvecka?

Uppgift 5. (20 poäng)

Den som ringer till vårdcentralen möts av en automatisk telefonsvarare och blir ombedd att lämna sitt telefonnummer för att sedan bli uppringd efter en stund. Antag att tiden i minuter tills man blir uppringd är en exponentialfördelad stokastisk variabel med parametern $\lambda = 0.2$. Fördelningsfunktionen för en exponentialfördelning ges av

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Beräkna sannolikheten att bli uppringd inom 5 minuter.
- Beräkna sannolikheten att bli uppringd inom 5 minuter om man redan har väntat 5 minuter.
- Antag nu istället att sannolikheten att bli uppringd inom 5 minuter är 0.3935. Bestäm värdet på parametern λ .

Formler

Additionssatsen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Multiplikationssatsen:

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B) = P(B | A) P(A)$$

Väntevärde för en diskret stokastisk variabel X :

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

Varians för en diskret stokastisk variabel X :

$$V(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - [E(X)]^2$$

Kovarians och korrelation mellan två diskreta stokastiska variabler X och Y :

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \sum_x \sum_y [x - E(X)][y - E(Y)] f_{X,Y}(x, y) = \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}(x, y) - E(X) E(Y) \\ \rho &= Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}} \end{aligned}$$

Räkneregler för väntevärden och varianser (a , b och c är konstanter, X och Y är stokastiska variabler):

$$\begin{aligned} E(c) &= c \\ E(cX) &= cE(X) \\ E(c + X) &= c + E(X) \\ E(aX + bY) &= aE(X) + bE(Y) \\ V(c) &= 0 \\ V(cX) &= c^2 V(X) \\ V(c + X) &= V(X) \\ V(aX + bY) &= a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab Cov(X, Y) \end{aligned}$$

Binomialfördelningen:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$