

F4 Matematikrep

- *Summatecknet*
- *Potensräkning*
- *Logaritmer*
- *Kombinatorik*

Summatecken

Säg att vi har n stycken tal $x_1, \dots, x_n$
Summan av dessa tal (alltså $x_1 + \dots + x_n$)
skrivs kortfattat med hjälp av summatecken:

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

"summa x_i då i går fr.o.m. 1 t.o.m. n "

Summatecken, forts.

Vad betyder följande?

- $\sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$
- $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$
- $\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = nc$
 n gånger
- $\sum_{i=1}^n cx_i^2 = cx_1^2 + \dots + cx_n^2 = c(x_1^2 + \dots + x_n^2) = c \sum_{i=1}^n x_i^2$
- $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$
- $\sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Summatecken, forts.

Ex. Antag att $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 3$
Beräkna:

$$\sum_{i=1}^4 x_i; \quad \sum_{k=1}^n x_k^2; \quad \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2; \quad \sum_{i=1}^4 21; \quad \sum_{i=0}^4 3x_i^2$$

$$\text{Medelvärde: } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$$

$$\text{Varians: } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

$$\text{Standardavvikelse: } \sqrt{s^2} = s$$

Summatecken, forts.

Lösning:

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 3 + (-2) + 5 + 3 = 9$$

Antag att $n = 4$

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = 3^2 + (-2)^2 + 5^2 + 3^2 = 47$$

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2 = [\text{från ovan}] = 9^2 = 81$$

Antag att $n = 4$

$$\sum_{i=1}^4 21 = 21 + 21 + 21 + 21 = 4 \cdot 21 = 84$$

$$\sum_{i=0}^4 3x_i^2 = 3 \sum_{i=0}^4 x_i^2 = [\text{från ovan}] = 3 \cdot 47 = 141$$

x_0 finns inte så antag att $x_0 = 0$

Summatecken, forts.

Medelvärde:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \\ &= [\text{från sidan innan}] = \frac{9}{4} = 2,25 \end{aligned}$$

Varians (del av formeln):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = [\text{från ovan}] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \\ &= [\text{från sidan innan}] = 47 - 4 \cdot \frac{81}{16} = 26,75 \end{aligned}$$

Summatecken, forts.

Övning: Utveckla (dvs. lista termerna)

$$1. \sum_{i=1}^n jx_i^k = jx_1^k + jx_2^k + \dots + jx_n^k = j \sum_{i=1}^n x_i^k$$

$$2. \sum_{k=1}^n jx_i^k = jx_i^1 + jx_i^2 + \dots + jx_i^n = j \sum_{k=1}^n x_i^k$$

$$\begin{aligned} 3. \sum_{j=1}^n jx_i^k &= 1 \cdot x_i^k + 2 \cdot x_i^k + \dots + n \cdot x_i^k \\ &= x_i^k (1 + 2 + \dots + n) = x_i^k \sum_{j=1}^n j \end{aligned}$$

Fotnot: Man kan visa att $(1+2+\dots+n) = n(n+1)/2$

Potensräkning

$$\bullet a^b = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{b \text{ ggr}}$$

$$\bullet a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$$

$$\bullet (a^b)^c = a^{(bc)}$$

$$\bullet a^{-b} = 1 / a^b$$

$$\bullet a^0 = 1$$

$$\bullet a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

En komboövning

Beräkna följande $\sum_{k=0}^n 2^k$
för $n = 0, 1, 2, 3$

Svar:

$$n = 0; \quad 2^0 = 1$$

$$n = 1; \quad 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 2; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$n = 3; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

$$3.6893 \times 10^{19}$$

Logaritmer

Obs! $a, b > 0$ och $a \neq 1$

Antag att vi har följande: $a^b = c$

Vi vet a och c och söker b

$$b = \log_a c$$

*Det tal som vi upphöjer
 a till för att få c*

Ex. $10^x = 10000$

$$x = \log_{10} 10000 = \lg 10000 =$$

$$\lg 10000 = 4 \quad \text{Några olika beteckningar
för 10-logaritmen}$$

Ex. $e^x = 80$

$$x = \ln 80 = \log_e 80 = 4,382027...$$

Naturliga logaritmen

Logaritmer, forts.

e = basen för den naturliga
logaritmen = 2,718281828.....

Räkneregler: ***Obs! $x, y > 0$***

- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

- $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$

- $\ln x^k = k \cdot \ln x$

*Det tal som vi upphöjer
 e till för att få x är $\ln x$*

- $\ln 1 = 0$

- $e^{\ln x} = x$

- $\ln e = 1$

- $\ln(e^x) = x$

Logaritmer, forts.

Ex. Bevisa första räkneregeln:

Vi definierar a , b och c

- $e^a = x \Rightarrow a = \ln x$

- $e^b = y \Rightarrow b = \ln y$

- $e^c = (x \cdot y) \Rightarrow c = \ln(x \cdot y)$

enl. definitionen av logaritmfunktionen.

Vi har alltså

- $x \cdot y = e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

*Enligt regeln
för potenser*

$$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = a + b = \ln x + \ln y$$

*Enligt definitionen för
logaritmfunktionen*

Enligt definitionen ovan

Logaritmer, forts.

Övningar:

- $\ln 12 = \ln 3 + \ln 4$
- $\ln 0,25 = \ln(1/4) = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$
- $\ln 64 = \ln 2^6 = 6 \cdot \ln 2$
- $\ln(32/9) = \ln 32 - \ln 9 = \ln 2^5 - \ln 3^2 = 5\ln 2 - 2\ln 3$

Kombinatorik

Att räkna ut hur många sätt något kan göras.

Ex. Matsedel med tre förrätter, fyra huvudrätter och två efterrätter.

På hur många olika sätt kan en trerätters måltid komponeras?

Svar:

Illustration: Träddiagram

Kombinatorik, forts.

Multiplikationsprincipen

- Ett experiment har m_1 möjliga utfall
- Ett annat efterföljande experiment har m_2 möjliga utfall
- Vi gör först det ena sedan det andra experimentet
- Totalt finns det $m_1 \times m_2$ möjliga utfall.

Kombinatorik, forts.

Exempel

Påse med numrerade kulor 1, ..., n

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer

Hur många möjliga utfall?

- Vi drar en kula till slumpmässigt och noterar dess nummer

Hur många möjliga utfall?

Kombinatorik, forts.

Exempel, forts

Samma påse med kulor 1, ..., n

- Vi har den totala händelsen
(kula 1's nummer, kula 2's nummer)
- **Hur många möjliga utfall?**
- Utan återläggning:
- Med återläggning:

Kombinatorik, forts.

• Dragning utan återläggning

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger inte tillbaks den inför nästa dragning
- Vi kan bara få ett nummer en gång

• Dragning med återläggning

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger tillbaks den inför nästa dragning
- Vi kan dra samma nummer flera gånger i en sekvens av dragningar

Kombinatorik, forts.

Exempel, forts

- Spelar **ordningen** någon roll?
- Dvs. skiljer vi t.ex. på
(1,3) och (3,1)
eller betraktar vi det som samma sak? Två fall som uppstår:
- Ordningen spelar roll
- Ordningen spelar ingen roll

Kombinatorik, forts.

• **Ordnad**

- Vi drar ett antal kulor slumpmässigt och noterar deras nummer
- Ordningen spelar roll, dvs. vi skiljer t.ex. på (1,2,5), (1,5,2), (2,1,5), (2,5,1), (5,1,2) och (5,2,1)

• **Ej ordnad**

- Vi drar ett antal kulor slumpmässigt och noterar deras nummer
- Ordningen spelar ingen roll, utfallen ovan betraktas som samma utfall

Om vi har dragit k olika nummer av n möjliga, hur många sätt kan de ordnas på?

Kombinatorik, forts.

Permutationer

- Ett arrangemang av n olika objekt i en bestämd ordning kallas för en **permutation** av objekten.
- Hur många olika permutationer kan man bilda av n olika objekt?
- Antalet olika permutationer av n olika objekt är:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

- **n -fakultet**; (eng. n factorial)

Kombinatorik, forts.

Permutationer

Ex. På hur många olika sätt kan vi permutera de tre objekten A, B, C ?

Svar: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ olika sätt, nämligen

$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

OBS! Vi definierar $0! = 1$

Kombinatorik, forts.

- På hur många sätt kan vi välja ut k objekt från n objekt ($k \leq n$), ifall vi bryr oss om ordningen? Och utan återläggning?

- Svar: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Tänk multiplikationsprincipen

Ex. $n = 5, k = 2$

$$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

Kombinatorik, forts.

Ordnat med återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan n möjligheter, osv. ...
- Multiplikationsprincipen ger

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Tänk multiplikationsprincipen

Kombinatorik, forts.

Ordnat utan återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan $(n-1)$ möjligheter, osv. ...
- Multiplikationsprincipen ger

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}_{k \text{ stycken faktorer}} \\
 &= \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{Tänk multiplikationsprincipen}
 \end{aligned}$$

Kombinatorik, forts.

- Antag att vi har $n = 5$ objekt A, B, C, D, E och att vi slumpmässigt väljer $k = 3$.
- Vi kan få $n!/(n-k)! = 5! / (5-3)! = 60$ olika utfall om vi tar hänsyn till ordningen.
- Av alla dessa 60 utfall, hur många innehåller objekten A, B och C ?
- Svar: Vi kan lista dem: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$; 6 utfall

Eller inse att de k valda objekten kan ordnas på $k! = 3! = 6$ sätt

Kombinatorik, forts.

Ej ordnat utan återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan $(n-1)$ möjligheter, osv. ... Ger

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Justera sedan för att ordningen inte spelar roll genom att dela med antal möjliga permutationer av k objekt

$$\rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- Välja ut k objekt från n objekt där $k \leq n$, och strunta i ordningen

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- " n över k ", **binomialkoefficient**
- *Pascals triangel*
- k :te koefficienten i $(a+b)^n$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- Några särskilda resultat:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Ex. På hur många sätt kan man dra fem kort ur en vanlig kortlek?

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

Kombinatorik, forts.

Sammanfattning: fyra fall

Ej viktigt nu

	Ordnad	Ej ordnad
Med återläggning	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Utan återläggning	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Intressant samband?

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \dots$$

Exempel

- Hur många olika urval av storlek $k = 4$ kan vi dra från $n = 10$ personer?

	Ordnad
Med återl.	$10^4 = 10000$
Utan återl.	$\frac{10!}{(10-4)!} = 5040$
	Ej ordnad
Med återl.	$\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715$
Utan återl.	$\binom{10}{4} = 210$