

F4 Matematikrep

- *Summatecknet*
- *Potensräkning*
- *Logaritmer*
- *Kombinatorik*

Summatecken

Säg att vi har n stycken tal $x_1, \dots, x_n$
Summan av dessa tal (alltså $x_1 + \dots + x_n$)
skrivs kortfattat med hjälp av summatecken:

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

"summa x_i då i går fr.o.m. 1 t.o.m. n "

Summatecken, forts.

Vad betyder följande?

- $\sum_{i=1}^n x_i^2$
- $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$
- $\sum_{i=1}^n c$
- $\sum_{i=1}^n c x_i^2$
- $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$
- $\sum_{i=1}^n x_i y_i$

Summatecken, forts.

Ex. Antag att $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 3$
Beräkna:

$$\sum_{i=1}^4 x_i; \quad \sum_{k=1}^n x_k^2; \quad \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2; \quad \sum_{i=1}^4 21; \quad \sum_{i=0}^4 3x_i^2$$

Medelvärde: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$

Varians: $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$

Standardavvikelse: $\sqrt{s^2} = s$

Summatecken, forts.

Övning: Utveckla (dvs. lista termerna)

$$1. \sum_{i=1}^n jx_i^k$$

$$2. \sum_{k=1}^n jx_i^k$$

$$3. \sum_{j=1}^n jx_i^k$$

Potensräkning

$$\bullet a^b = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{b \text{ ggr}}$$

$$\bullet a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$$

$$\bullet (a^b)^c = a^{(bc)}$$

$$\bullet a^{-b} = 1 / a^b$$

$$\bullet a^0 = 1$$

$$\bullet a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

En komboövning

Beräkna följande $\sum_{k=0}^n 2^k$
för $n = 0, 1, 2, 3$

Svar:

$$n = 0; \quad 2^0 = 1$$

$$n = 1; \quad 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 2; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$n = 3; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

3. 6893×10¹⁹

Logaritmer

Obs! $a, b > 0$ och $a \neq 1$

Antag att vi har följande: $a^b = c$

Vi vet a och c och söker b

$$b = \log_a c$$

*Det tal som vi upphöjer
a till för att få c*

$$\text{Ex. } 10^x = 10000$$

$$x = \log_{10} 10000 = \log 10000 =$$

$$\lg 10000 = 4 \quad \text{Några olika beteckningar
för 10-logaritmen}$$

$$\text{Ex. } e^x = 80$$

$$x = \ln 80 = \log_e 80 = 4,382027...$$

Naturliga logaritmen

Logaritmer, forts.

e = basen för den naturliga
logaritmen = 2,718281828.....

Räkneregler: **Obs! $x, y > 0$**

- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
- $\ln x^k = k \cdot \ln x$
- $\ln 1 = 0$ • $e^{\ln x} = x$
- $\ln e = 1$ • $\ln(e^x) = x$

Logaritmer, forts.

Ex. Bevisa första räkneregeln:

Vi definierar a , b och c

1. $e^a = x \Rightarrow a = \ln x$
2. $e^b = y \Rightarrow b = \ln y$
3. $e^c = (x \cdot y) \Rightarrow c = \ln(x \cdot y)$

enl. definitionen av logaritmfunktionen.

Vi har alltså

$$\bullet \quad x \cdot y = e^a \cdot e^b = e^{a+b} \quad \begin{array}{l} \text{Enligt regeln} \\ \text{för potenser} \end{array}$$

$$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = a + b = \ln x + \ln y$$

Enligt definitionen för
logaritmfunktionen

Enligt definitionen ovan

Logaritmer, forts.

Övningar:

- $\ln 12 = \ln 3 + \ln 4$
- $\ln 0,25 = \ln(1/4) = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$
- $\ln 64 = \ln 2^6 = 6 \cdot \ln 2$
- $\ln(32/9) = \ln 32 - \ln 9 = \ln 2^5 - \ln 3^2$
 $= 5\ln 2 - 2\ln 3$

Kombinatorik

Att räkna ut hur många sätt något
kan göras.

Ex. Matsedel med tre förrätter, fyra
huvudrätter och två efterrätter.

På hur många olika sätt kan en
trerätters måltid komponeras?

Svar:

Illustration: Träddiagram

Kombinatorik, forts.

Multiplikationsprincipen

- Ett experiment har m_1 möjliga utfall
- Ett annat efterföljande experiment har m_2 möjliga utfall
- Vi gör först det ena sedan det andra experimentet
- Totalt finns det $m_1 \times m_2$ möjliga utfall.

Kombinatorik, forts.

Exempel

- Påse med numrerade kulor 1, ..., n
- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer

Hur många möjliga utfall?

- Vi drar en kula till slumpmässigt och noterar dess nummer

Hur många möjliga utfall?

Kombinatorik, forts.

Exempel, forts

Samma påse med kulor 1, ..., n

- Vi har den totala händelsen (kula 1's nummer, kula 2's nummer)
- *Hur många möjliga utfall?*
- Utan återläggning:
- Med återläggning:

Kombinatorik, forts.

Exempel, forts

- Spelar ordningen någon roll?
- Dvs. skiljer vi t.ex. på (1,3) och (3,1) eller betraktar vi det som samma sak? Två fall som uppstår:
- Ordningen spelar roll
- Ordningen spelar ingen roll

Kombinatorik, forts.

• Ordnad

- Vi drar ett antal kulor slumpmässigt och noterar deras nummer
- Ordningen spelar roll, dvs. vi skiljer t.ex. på (1,2,5), (1,5,2), (2,1,5), (2,5,1), (5,1,2) och (5,2,1)

• Ej ordnad

- Vi drar ett antal kulor slumpmässigt och noterar deras nummer
- Ordningen spelar ingen roll, utfallen ovan betraktas som samma utfall

Om vi har dragit k olika nummer av n möjliga, hur många sätt kan de ordnas på?

Kombinatorik, forts.

Permutationer

- Ett arrangemang av n olika objekt i en bestämd ordning kallas för en **permutation** av objekten.
- Hur många olika permutationer kan man bilda av n olika objekt?
- Antalet olika permutationer av n olika objekt är:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

- **n -fakultet;** (eng. n factorial)

Kombinatorik, forts.

Permutationer

Ex. På hur många olika sätt kan vi permutera de tre objekten A , B , C ?

Svar: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ olika sätt, nämligen

$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

OBS! Vi definierar $0! = 1$

Kombinatorik, forts.

• Dragning utan återläggning

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger inte tillbaks den inför nästa dragning
- Vi kan bara få ett nummer en gång

• Dragning med återläggning

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger tillbaks den inför nästa dragning
- Vi kan dra samma nummer flera gånger i en sekvens av dragningar

Kombinatorik, forts.

- På hur många sätt kan vi välja ut k objekt från n objekt ($k \leq n$), ifall vi bryr oss om ordningen? Och utan återläggning?

- Svar: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Ex. $n = 5, k = 2$

$$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- På hur många sätt kan vi välja ut k objekt från n objekt ($k \leq n$), ifall vi inte bryr oss om ordningen? Utan återläggning?

- Svar: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- " n över k ", **binomialkoefficient**

- Obs! Vi definierar $\binom{0}{0} = 1$

Kombinatorik, forts.

Ordnat med återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan n möjligheter, osv. ...
- Multiplikationsprincipen ger

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Kombinatorik, forts.

Ordnat utan återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan $(n-1)$ möjligheter, osv. ...
- Multiplikationsprincipen ger

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

k stycken faktorer

$$= \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinatorik, forts.

- Antag att vi har $n = 5$ objekt A, B, C, D, E och att vi slumpmässigt väljer $k = 3$.
- Vi kan få $n!/(n-k)! = 5! / (5-3)! = 60$ olika utfall om vi tar hänsyn till ordningen.
- Av alla dessa 60 utfall, hur många innehåller objekten A, B och C ?
- Svar: Vi kan lista dem: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$; 6 utfall

Eller inse att de k objekten kan ordnas på $k! = 3! = 6$ sätt

Kombinatorik, forts.

Ej ordnat utan återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan $(n-1)$ möjligheter, osv. ... Ger

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Justera sedan för att ordningen inte spelar roll genom att dela med antal möjliga permutationer av k objekt

$$\rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- Välja ut k objekt från n objekt där $k \leq n$, och strunta i ordningen

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- "n över k", **binomialkoefficient**
- *Pascals triangel*
- *k:te koefficienten i $(a+b)^n$*

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- Några särskilda resultat:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Ex. På hur många sätt kan man dra fem kort ur en vanlig kortlek?

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

Kombinatorik, forts.

Sammanfattning

	Ordnad	Ej ordnad
Med återläggning	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Utan återläggning	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Intressant samband?

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \dots$$

Exempel

- Hur många olika urval av storlek $k = 4$ kan vi dra från $n = 10$ personer?

	Ej ordnad
Utan återl.	$\binom{10}{4} = 210$
Med återl.	$\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715$
	Ordnad
Utan återl.	$\frac{10!}{(10-4)!} = 5040$
Med återl.	$10^4 = 10000$