

F4-6

Statistikens grunder, 15p dagtid

HT 2012

Föreläsningar F4-F6

Repetition

Tolkning av sannolikhet

Frekventistisk

$$n_A/n \rightarrow P(A) \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Klassisk

$$\text{antal}(A) / \text{antal}(\Omega) = P(A)$$

$$\text{storlek}(A) / \text{storlek}(\Omega) = P(A)$$

Subjektiv (personlig)

$$\text{insats} / \text{total vinst} = P(A)$$

Repetition

Lite mängdlära

- Låt e_1, e_2 , osv. beteckna **element**
- Låt A, B beteckna **mängder** av element
 - Klamrar brukar användas $\{\cdot\}$
 - Ex. $A = \{1,2\}$
- Om e_i tillhör A skriver vi $e_i \in A$
 - Ex. $1 \in \{1,2\}$
- Om A är en **delmängd** av B skriver vi $A \subseteq B$
 - Ex. $A = \{1,2\} \subset B = \{1,2,3,4,5,6\}$
 - Strikt delmängd betecknas $\subset$
 - Delmängd betecknas $\subseteq$

Repetition

Lite mängdlära, forts.

Antag att $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ och att $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$ och $C = \{3\}$

- **Komplementet** till en mängd är allt som inte ingår i mängden och betecknas med $\bar{A}$ eller A'
 - Ex. $\bar{A} = \{3,4,5,6\}$
- **Unionen** av mängder betecknas med $\cup$
 - Ex. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$
- **Snittet** av mängder betecknas med $\cap$
 - Ex. $A \cap B = \{2\}$

Repetition

Lite mängdlära, forts.

- **Tomma mängden** är delmängden till Ω som inte innehåller några element alls. Betecknas med $\emptyset$.
- Två mängder är **disjunkta** (oförenliga) om snittet är tomt
 - Ex. $A = \{1, 2\}$ och $C = \{3\}$
 $A \cap C = \emptyset$

Övning

Ett kort dras slumpmässigt ur en kortlek bestående av de vanliga 52 korten. Definiera händelserna

- $A =$ "rött kort,
- $B =$ "kung"
- $C =$ "spader"

- (a) Vilka par av A , B och C är disjunkta?
 (b) Tolka följande händelser och rita Venndiagram:

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| i. $\bar{A}$ | iv. $A \cup B$ |
| ii. $A \cap B$ | v. $\overline{A \cup C}$ |
| iii. $A \cap C$ | vi. $(A \cup C)$ |

Repetition

En axiomatisk teori

Kolmogorovs axiom: En sannolikhet är en funktion P som tilldelar varje möjlig händelse A i ett utfallsrum Ω ett tal $P(A)$, så att följande villkor är uppfyllda:

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Om $A_1, A_2, \dots, A_k$ är parvis disjunkta händelser i S , då är

$$\begin{aligned}
 &P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \\
 &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)
 \end{aligned}$$

Repetition

En axiomatisk teori, forts.

- Samtliga tre synsätt (definitioner) på vad en sannolikhet egentligen är, är förenliga med Kolmogorovs axiom.
 - Kom ihåg att vi har en formell definition på vad en sannolikhet är också
- Massor av nya påståenden kan nu härledas ur dessa tre axiom
 - dvs. bevisas vara sanna inom det generella formella systemet

Repetition

En axiomatisk teori, forts.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Om $A \subset B$ så gäller $P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

F4 Matematikrep

- *Summatecknet*
- *Potensräkning*
- *Logaritmer*
- *Kombinatorik*

Summatecken

Säg att vi har n stycken tal $x_1, \dots, x_n$
 Summan av dessa tal (alltså $x_1 + \dots + x_n$)
 skrivs kortfattat med hjälp av
 summa-tecken:

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

”summa x_i då i går fr.o.m. 1 t.o.m. n ”

Summatecken, forts.

Vad betyder följande?

- $\sum_{i=1}^n x_i^2$
- $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$
- $\sum_{i=1}^n c$
- $\sum_{i=1}^n c x_i^2$
- $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$
- $\sum_{i=1}^n x_i y_i$

Summatecken, forts.

Ex. Antag att $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$

Beräkna:

$$\sum_{i=1}^4 x_i; \quad \sum_{k=1}^n x_k^2; \quad \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^2; \quad \sum_{i=1}^4 21; \quad \sum_{i=0}^4 3x_i^2$$

Medelvärde: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$

Varians: $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$

Standardavvikelse: $\sqrt{s^2} = s$

Summatecken, forts.

Övning: Utveckla (dvs. lista termerna)

1. $\sum_{i=1}^n jx_i^k$

2. $\sum_{k=1}^n jx_i^k$

3. $\sum_{j=1}^n jx_i^k$

Potensräkning

• $a^b = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{b \text{ ggr}}$

• $a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$

• $(a^b)^c = a^{(bc)}$

• $a^{-b} = 1 / a^b$

• $a^0 = 1$

• $a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$

En komboövning

Beräkna följande $\sum_{k=0}^n 2^k$
för $n = 0, 1, 2, 3$

Svar:

$n = 0; \quad 2^0 = 1$

$n = 1; \quad 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$

$n = 2; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$

$n = 3; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Logaritmer

Obs! $a, b > 0$ och $a \neq 1$

Antag att vi har följande: $a^b = c$

Vi vet a och c och söker b

$$b = \log_a c \quad \text{Det tal som vi upphöjer } a \text{ till för att få } c$$

Ex. $10^x = 10000$

$$x = \log_{10} 10000 = \log 10000 =$$

$$\lg 10000 = 4 \quad \text{Några olika beteckningar för 10-logaritm}$$

Ex. $e^x = 80$

$$x = \ln 80 = 4,3820266\dots$$

Naturliga logaritm

Logaritmer, forts.

e = basen för den naturliga
logaritmen = 2,718281828.....

Räkneregler: *Obs! $x, y > 0$*

- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
- $\ln x^k = k \cdot \ln x$
- $\ln 1 = 0$
- $e^{\ln x} = x$
- $\ln e = 1$
- $\ln(e^x) = x$

Logaritmer, forts.

Ex. Bevisa första räkneregeln:

Vi definierar a , b och c

1. $e^a = x \Rightarrow a = \ln x$

2. $e^b = y \Rightarrow b = \ln y$

3. $e^c = (x \cdot y) \Rightarrow c = \ln(x \cdot y)$

enl. definitionen av logaritmfunktionen.

Vi har alltså

$$\bullet \quad x \cdot y = e^a \cdot e^b = e^{a+b} \quad \text{Enligt regeln för potenser}$$

$$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = a + b = \ln x + \ln y$$

Enligt definitionen för logaritmfunktionen

Enligt definitionen ovan

Logaritmer, forts.

Övningar:

- $\ln 12 = \ln 3 + \ln 4$
- $\ln 0,25 = \ln(1/4) = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$
- $\ln 64 = \ln 2^6 = 6 \cdot \ln 2$
- $\ln(32/9) = \ln 32 - \ln 9 = \ln 2^5 - \ln 3^2 = 5 \ln 2 - 2 \ln 3$

Kombinatorik

Att räkna ut hur många sätt något kan göras.

Ex. Matsedel med tre förrätter, fyra huvudrätter och två efterrätter.

På hur många olika sätt kan en trerätters måltid komponeras?

Svar:

Illustration: Träddiagram

Kombinatorik, forts.

Multiplikationsprincipen

- Ett experiment har m_1 möjliga utfall
- Ett annat efterföljande experiment har m_2 möjliga utfall
- Vi gör först det ena sedan det andra experimentet
- Totalt finns det

$m_1 \times m_2$
möjliga utfall.

Kombinatorik, forts.

Exempel

Påse med numrerade kuler 1, ..., n

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer

Hur många möjliga utfall?

- Vi drar en kula till slumpmässigt och noterar dess nummer

Hur många möjliga utfall?

Kombinatorik, forts.

Exempel, forts

Samma påse med kuler 1, ..., n

- Vi har den totala händelsen
(kula 1's nummer, kula 2's nummer)

• ***Hur många möjliga utfall?***

- Utan återläggning:

- Med återläggning:

Kombinatorik, forts.

Exempel, forts

- Spelar ordningen någon roll?
- Dvs. skiljer vi t.ex. på
(1,3) och (3,1)
eller betraktar vi det som samma sak? Två fall som uppstår:
- Ordningen spelar roll
- Ordningen spelar ingen roll

Kombinatorik, forts.

Permutationer

- Ett arrangemang av n olika objekt i en bestämd ordning kallas för en **permutation** av objekten.
- Hur många olika permutationer kan man bilda av n olika objekt?
- Antalet olika permutationer av n olika objekt är:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

- **n -fakultet**; (eng. n factorial)

Kombinatorik, forts.

Permutationer

Ex. På hur många olika sätt kan vi permutera de tre objekten A, B, C ?

Svar: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ olika sätt, nämligen

$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

OBS! Vi definierar $0! = 1$

Kombinatorik, forts.

• **Dragning utan återläggning**

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger inte tillbaks den inför nästa dragning
- Vi kan bara få ett nummer en gång

• **Dragning med återläggning**

- Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger tillbaks den inför nästa dragning
- Vi kan dra samma nummer flera gånger i en sekvens av dragningar

Kombinatorik, forts.

- På hur många sätt kan vi välja ut k objekt från n objekt ($k \leq n$), ifall vi bryr oss om ordningen? Och utan återläggning?

- Svar: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Ex. $n = 5, k = 2$

$$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- På hur många sätt kan vi välja ut k objekt från n objekt ($k \leq n$), ifall vi inte bryr oss om ordningen? Utan återläggning?

- Svar: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- " n över k ", **binomialkoefficient**

- Obs! Vi definierar $\binom{0}{0} = 1$

F5 Sannolikheter

- *Framförallt Nyquist Kap 5*
- *Men först lite repetition och lite mer kombinatorik*

Repetition

Kombinatorik, forts.

Multiplikationsprincipen

- Ett experiment har m_1 möjliga utfall
- Ett annat efterföljande experiment har m_2 möjliga utfall

- Vi gör först det ena sedan det andra experimentet

- Totalt finns det

$$m_1 \times m_2$$

möjliga utfall.

Repetition

Kombinatorik, forts.

- **Dragning utan återläggning**
 - Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger inte tillbaks den inför nästa dragning
 - Vi kan bara få ett nummer en gång
- **Dragning med återläggning**
 - Vi drar en kula slumpmässigt och noterar dess nummer och lägger tillbaks den inför nästa dragning
 - Vi kan dra samma nummer flera gånger i en sekvens av dragningar

Repetition

Kombinatorik, forts.

- **Ordnad**
 - Vi drar ett antal kulor slumpmässigt och noterar deras nummer
 - Ordningen spelar roll, dvs. vi skiljer t.ex. på (1,2,5), (1,5,2), (2,1,5), (2,5,1), (5,1,2) och (5,2,1)
- **Ej ordnad**
 - Vi drar ett antal kulor slumpmässigt och noterar deras nummer
 - Ordningen spelar ingen roll, utfallen ovan betraktas som samma utfall

Om vi har dragit k olika nummer av n möjliga, hur många sätt kan de ordnas på?

Repetition

Kombinatorik, forts.

Permutationer

- Ett arrangemang av k olika objekt i en bestämd ordning kallas för en permutation av objekten.
- Hur många olika permutationer kan man bilda av k olika objekt?
- Antalet olika permutationer av k olika objekt är:

$$k! = k \times (k-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

- **k -fakultet;** (eng. k factorial)

Repetition

Kombinatorik, forts.

Ordnat med återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan n möjligheter, osv. ...
- Multiplikationsprincipen ger

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Repetition

Kombinatorik, forts.

Ordnat utan återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan $(n-1)$ möjligheter, osv. ...
- Multiplikationsprincipen ger

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}_{k \text{ stycken faktorer}} \\
 &= \frac{n \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!}
 \end{aligned}$$

Kombinatorik, forts.

- Antag att vi har $n = 5$ objekt A, B, C, D, E och att vi slumpmässigt väljer $k = 3$.
- Vi kan få $n!/(n-k)! = 5! / (5-3)! = 60$ olika utfall om vi tar hänsyn till ordningen.
- Av alla dessa 60 utfall, hur många innehåller objekten A, B och C ?
- Svar: Vi kan lista dem: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$; 6 utfall

Eller inse att de k objekten kan ordnas på $k! = 3! = 6$ sätt

Kombinatorik, forts.

Ej ordnat utan återläggning

- Dra k stycken ur n möjliga.
- 1:a kulan n möjligheter, 2:a kulan $(n-1)$ möjligheter, osv. ... Ger

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- Justera sedan för att ordningen inte spelar roll genom att dela med antal möjliga permutationer av k objekt

$$\rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- Välja ut k objekt från n objekt där $k \leq n$, och strunta i ordningen

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- " n över k ", **binomialkoefficient**
- *Pascals triangel*
- k :te koefficienten i $(a+b)^n$

Kombinatorik, forts.

Kombinationer

- Några särskilda resultat:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Ex. På hur många sätt kan man dra fem kort ur en vanlig kortlek?

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

Kombinatorik, forts.

Sammanfattning

	Ordnad	Ej ordnad
Med återläggning	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Utan återläggning	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Intressant samband?

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \dots$$

Exempel

- Hur många olika urval kan vi dra från Sveriges befolkning ($n = \text{ca } 9 \text{ miljoner}$) av storlek $k = 1000$?

	Ej ordnad
Utan återl.	$\binom{9000000}{1000} = 41092 \dots 4382 \text{ siffror till}$
Med återl.	$\binom{9000999}{1000} = 45916 \dots 4382 \text{ siffror till}$
	Ordnad
Utan återl.	$\frac{9000000!}{8999000!} = 16535 \dots 6950 \text{ siffror till}$
Med återl.	$9000000^{1000} = 17479 \dots 6950 \text{ siffror till}$

Sannolikheter

Att beräkna sannolikheter

- Händelser; A, B, C osv.
- Sannolikheten för att A ska inträffa; $P(A)$
- Alla händelser; $0 \leq P(A) \leq 1$
- Omöjlig händelse; $P(\emptyset) = 0$
- Säker händelse; $P(\Omega) = 1$
- A och/eller B (union); $P(A \cup B)$
- A och B (snitt); $P(A \cap B)$
- Inte A (komplement); $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatsen

Sannolikheten att A eller B eller både A och B inträffar.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Specialfall om A och B disjunkta dvs. $A \cap B = \emptyset$ vilket ger

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(\emptyset) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Jmfr med Kolmogorovs axiom

Exempel

Dra ett kort ur en kortlek och låt $A =$ Hjärter, $B =$ Klätt, $C =$ Spader Kung

- $P(A) = 13/52 = 1/4$
 $P(B) = 12/52 = 3/13$
 $P(C) = 1/52$
- $P(A \cap B) = P(\text{"Klätt hjärter"}) = 3/52$
- $P(A \cup B) = P(\text{"Hjärter och/eller Klätt"})$
 $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= 1/4 + 3/13 - 3/52 = (13+12-3)/52$
 $= 22/52 = 11/26$
- $P(A \cup C) = P(\text{"hj och/eller spK"})$
 $= P(A) + P(C) - P(A \cap C) = (13+1)/52$

Addera mera

Tre händelser A, B och C

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
 $- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
 $+ P(A \cap B \cap C)$
- Rita ett Venndiagram!

Övning: $A =$ Hjärter, $B =$ Klätt, $C =$ jämnt (dam = 12, ess = 1). Beräkna varje term i additionssatsen ovan!

Betingade sannolikheter

Sannolikheten att A inträffar givet att B inträffar eller har inträffat.

Exempel:

- Sannolikheten att det blev 6 givet att det blev jämnt?
- Sannolikheten att det blev 6 givet att det blev udda?
- Sannolikheten att det blev 6 givet att det inte blev 5?

Vad är det som händer med utfallsrummet?

Betingning

- Genom att händelsen B har inträffat så kan vi säga att utfallsrummet Ω har påverkats.
- $\bar{B}$ har inte hänt, dvs. vi kan stryka bort den delen av Ω .
- Sannolikheten för A beräknas genom att titta på den del av A som sammanfaller med B dvs. **snittet** och jämföra med B

Betingning

Dvs. istället för att titta på

$$\text{stlk}(A) / \text{stlk}(\Omega) = P(A) \quad (\text{Klassiska tolkningen})$$

tittar vi på

$$\text{stlk}(A \cap B) / \text{stlk}(B) = P(A | B)$$

$P(A | B)$ utläses

"sannolikheten för A givet B "

och beräknas enligt

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Betingning, forts.

Vi kan även uttrycka det som

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Vi kan även vända på betingningen och se på sannolikheten att B har inträffat givet A :

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

eller

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

och därmed att

$$P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

Exempel

Ibland är faktiskt de betingade sannolikheterna kända snarare än snittet.

T.ex. Man har två modeller av en produkt i lager, 30 % av en gammal modell M_1 och 70 % av en nyare M_2 .

Av M_1 brukar 8 % vara behäftade med fel (händelse F) av den M_2 brukar 3 % vara fel.

Om man tar en enhet på måfå ur lagret, vad är sannolikheten att

- det är fel på den?
- det är M_1 givet att det är fel på den?

Exempel, forts.

- a) $P(F)$ *Obs! $\overline{M_1} = M_2$*
- $$= P(F \cap M_1) + P(F \cap M_2)$$
- $$= P(F|M_1) \cdot P(M_1) + P(F|M_2) \cdot P(M_2)$$
- $$= 0,08 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,7 = 0,045$$
- dvs. 4,5 %
- b) $P(M_1|F)$
- $$= P(F|M_1) \cdot P(M_1) / P(F)$$
- $$= 0,08 \cdot 0,3 / 0,045$$
- $$= 0,53333$$
- dvs. ca 53 %

Är detta vettiga svar?

Oberoende: Exempel 2

Slumpmässigt urval av $n = 2$ ur en grupp av $N = 10$ objekt.

Vi drar först en (experiment 1) och sedan en till (experiment 2)

Är experimenten oberoende?

- om det sker med återläggning
- om det sker utan återläggning

Oberoende: Exempel 1

Vi fångar en fisk i en sjö. Vi noterar kön, mäter vikt och längd, bedömer eventuella skador etc. Vi kastar sedan tillbaks den. Vi upprepar detta k gånger.

- Är fångsterna oberoende?
- Hur kan våra mätresultat och observationer eventuellt påverkas om det finns ett beroende?

Oberoende: Exempel 3

Ex) Du är i Stockholm och en kompis i Las Vegas och ni kastar samtidigt varsin rättvis tärning. Vi vet (antar) att

$$P(X_{du} = 6) = P(X_{kompis} = 6) = 1/6$$

- Vad är sannolikheten att ni båda får en sexa? Dvs.

$$P(X_{du} = 6 \cap X_{kompis} = 6)$$

- Vad är sannolikheten att din kompis fick en sexa givet att du fick det? Dvs.

$$P(X_{kompis} = 6 \mid X_{du} = 6)$$

Oberoende

Två händelser / experiment är oberoende om

$$P(A | B) = P(A)$$

Och omvänt om man kan visa att de är oberoende så är $P(A | B) = P(A)$.

Om A och B är oberoende så inses att följande gäller:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Oberoende

Hur ser vi det sista? Jo,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Om A och B är oberoende, så är de även oberoende av varandras komplement och komplementen är också oberoende av varandra. Dvs. varje par

$$(A, B); (\bar{A}, B); (A, \bar{B}); (\bar{A}, \bar{B})$$

är också oberoende

F6 Nyquist kap 6

- Vad är en **stokastisk variabel**
- Diskreta och kontinuerliga sv
- Frekvensfunktion (diskr.)
- Täthetsfunktion (kont.)
- Fördelningsfunktion
- Men först lite repetition
 - Additionssatsen
 - Betingade sannolikheter
 - Oberoende

Repetition

Additionssatsen

Sannolikheten att A eller B eller både A och B inträffar.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Specialfall om A och B **disjunkta** dvs. $A \cap B = \emptyset$ vilket ger

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(\emptyset) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Jmfr med Kolmogorovs axiom

Exempel

Vi vet vad $P(A \cap B)$ är, beräkna

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Additionssatsen

$$= [1 - P(A)] + [1 - P(B)] - [1 - P(A \cup B)]$$

*Sannolikheter
för komplement*

*Kräver lite
tankearbete...*

$$= 1 - P(A) + 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 1 - P(A \cap B) = \overline{P(A \cap B)}$$

Betingning

Repetition

Dvs. istället för att titta på

$$\text{stlk}(A) / \text{stlk}(\Omega) = P(A) \quad (\text{Klassiska tolkningen})$$

tittar vi på

$$\text{stlk}(A \cap B) / \text{stlk}(B) = P(A | B)$$

$P(A | B)$ utläses

"sannolikheten för A givet B"

och beräknas enligt

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Betingning, forts.

Repetition

Vi kan även uttrycka det som

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Vi kan även vända på betingningen och se på sannolikheten att B har inträffat givet A:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

eller

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

och därmed att

$$P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

Oberoende

Repetition

Två händelser / experiment är oberoende om

$$P(A | B) = P(A)$$

Och omvänt, om de är oberoende gäller att $P(A | B) = P(A)$.

Om A och B är oberoende så inses att följande gäller:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exempel

Antag att vi har följande sannolikheter:

$$P(A) = 0,8; P(B) = 0,2; P(A \cap B) = 0,16$$

- a) Beräkna den betingade sannolikheten för A givet B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,16}{0,2} = 0,8$$

- b) Är A och B oberoende?

- a) Beräkna $P(\bar{A} \cap B)$

Övning

Antag att vi har följande sannolikheter:

	E_1	E_2	E_3
A	0,12	0,48	0,19
$\bar{A}$	0,07	0,06	0,08

- Beräkna $P(A \cap E_1)$
- Beräkna $P(A|E_3)$
- Är A och E_3 oberoende?
- Beräkna $P(E_1|\bar{A})$
- Är E_1 och $\bar{A}$ oberoende?
- Beräkna $P(A)$
- Beräkna $P(E_3)$

Övning, forts.

- $P(A \cap E_1) = [\text{avläst från tabellen}] = 0,12$
- $$P(A|E_3) = P(A \cap E_3) / P(E_3)$$

$$= P(A \cap E_3) / [P(A \cap E_3) + P(\bar{A} \cap E_3)]$$

$$= 0,19 / (0,19 + 0,08) \approx 0,704$$
- $$P(A) = [P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3)]$$

$$= 0,12 + 0,48 + 0,19 = 0,79 \neq 0,704 \text{ (från b)}$$

$$\Rightarrow A \text{ och } E_3 \text{ är beroende.}$$
- $$P(E_1|\bar{A}) = P(\bar{A} \cap E_1) / P(\bar{A})$$

$$= P(\bar{A} \cap E_1) / [P(\bar{A} \cap E_1) + P(\bar{A} \cap E_3) + P(\bar{A} \cap E_2)]$$

$$= 0,07 / (0,07 + 0,06 + 0,08) \approx 0,333$$
- $P(E_1) = [\text{analogt med c}] = 0,19 \neq 0,333$
- $P(A) = [\text{från c}] = 0,79$
- $P(E_3) = [\text{från b}] = 0,27$

Stokastiska variabler 1

- Utfall av ett experiment och som resulterar i en **siffra**
 - "hur mycket", "hur länge" osv.
- Variables**: något som varierar, typiskt ett tal
- Stokastiska variabler**: något som varierar slumpmässigt
- Kallas även **slumpvariabel** (s.v.)
- Betecknas typiskt med stor bokstav: X, Y, Z osv.

Stokastiska variabler 2

Ett utfall eller händelse beskrivs med den valda bokstaven, t.ex.

$$X = 2, X = 10, X = -0,25$$

$$X \leq 3, X > 40, X \neq 0,4$$

eller allmänt $X = x, X \leq x$, osv.

" $X = x$ " och liknande betecknar alltså en händelse/utfall.

Sedan vill vi veta $P(X = x)$ för olika x

Stokastiska variabler 3

Sannolikhetsmodell

- Ett utfallsrum Ω
- Sannolikheter $P(A)$ för alla händelser $A \subseteq \Omega$

På motsvarande sätt kan vi formulera en modell när vi har en stokastisk variabel

- Utfallsrum Ω : $x = \dots$ *Alla tillåtna tal för x*
- Sannolikheter $P(A)$:
 $P(X = x), P(X \leq x)$, osv.

Exempel

Vi kastar en tärning tre gånger och noterar hur många ettor vi får.

Beteckna med A_i att det blev en etta i kast nr $i = 1, 2, 3$.

Är kasten oberoende?

Möjliga utfall (Ω):

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$	$\bar{A}_1, A_2, A_3$
$\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$	$A_1, \bar{A}_2, A_3$
$\bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3$	$A_1, A_2, \bar{A}_3$
$A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$	A_1, A_2, A_3

Exempel, forts.

Möjliga utfall som den stokastiska variabeln X kan anta:

$$\Omega_x = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{el.} \quad x = 0, 1, 2, 3$$

Sannolikheterna för alla $A \subseteq \Omega_x$ beräknas genom att summera alla utfall för de utfall som leder till A .

- Vad är sannolikheten för $X = 0$?
- För $X > 2$? $= P(X=3)$
- För $X \geq 2$?
- För $X = 4$?

Exempel, forts.

$$\begin{aligned} a) \quad P(X=0) &= P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \\ &= [\text{ty oberoende}] = \\ &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (5/6)^3 = \\ &= 125/216 \approx 0,579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad P(X=3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= [\text{ty oberoende}] = \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = (1/6)^3 = \\ &= 1/216 \approx 0,00463 \end{aligned}$$

$$c) \quad P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 16/216$$

$$d) \quad P(X=4) = 0, \text{ ty } 4 \notin \Omega_x$$

Diskreta mängder

Diskreta mängder kan ses som en "lista" av värden. Består av **enstaka** värden, oftast **heltal**. T.ex.

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5\}$$

Även **oändliga** diskreta mängder kan förekomma. T.ex.

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

Kontinuerliga mängder

Kontinuerliga mängder kan typiskt beskrivas med intervall. Består av **samtliga** värden inom ett väldefinierat område.

$$[0,1] \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Slutna intervall } [...,...] \\ \text{inkluderar ändpunkterna} \end{array}$$

$$(0,5) \cup (10,15) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Öppna intervall } (...,...) \\ \text{exkluderar ändpunkterna} \end{array}$$

$$(1,2]$$

Intervallgränserna kan vara oändliga (då anges gränsen som öppet). T.ex.

$$[0, \infty), (-\infty, \infty)$$

Frekvensfunktionen 1

Om Ω_x för en s.v. X är diskret, kallas X en diskret s.v.

Frekvensfunktionen för en diskret s.v. definieras som sannolikheten att X blir x och betecknas ofta med $f(x)$

$$f(x) = P(X=x)$$

Exempel:

$$\Omega_x = \{0,1\} \text{ och}$$

$$f(x) = \begin{cases} (0,6)^x \cdot (0,4)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Frekvensfunktionen 2

Frekvensfunktionen tillsammans med en tydlig beskrivning av utfallsrummet sammanfattar allt vi behöver veta om X .

Frekvensfunktionen kallas även **sannolikhetsfunktionen** ty den ger oss just sannolikheterna för samtliga x som ligger i Ω_x

Eng. frequency or probability mass function.

Frekvensfunktionen illustreras ofta i **stolpdiagram** där höjden på varje stolpe är lika med sannolikheten för motsvarande värde på x .

Exempel

Antag följande frekvensfunktion:

x	$f(x)$	$F(x)$
0	0,5787	0,5787
1	0,3472	0,9259
2	0,06944	0,9953
3	0,00463	1

- Rita $f(x)$ i ett lämpligt diagram!
- Vad är $F(x)$ för något?

Om vi summerar $f(x)$ för alla värden på $x \in \Omega_x$, vad blir summan?

Täthetsfunktionen 1

Om Ω_x för en s.v. X är kontinuerlig, kallas X en kontinuerlig s.v.

Täthetsfunktionen för en kontinuerlig s.v. definieras inte som sannolikheten att X blir x . Betecknas också ofta med $f(x)$.

Täthetsfunktionen är en beskrivning av hur sannolikt det är att X hamnar i ett delintervall till Ω_x

(Se Figur 6.2, sid 7 Kap 6 i Nyquist)

Täthetsfunktionen 2

För att beräkna en sannolikhet att X ska ligga i intervallet mellan säg a och b , beräknas arenan under $f(x)$ och över x -axeln och mellan a och b .

Detta kan skrivas som en integral:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Vi kan lämna ena sidan odefinierad också och skriver

$$P(X \leq c) = \int_{-\infty}^c f(x) dx$$

← Notera gränsen. Vad betyder det?

Täthetsfunktionen 3

Vi definierar en täthetsfunktion för en kontinuerlig s.v. i stil med

$$f(x) = \begin{cases} \text{någonfunktion} & x \in \Omega_x \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Det finns vissa krav på hur funktionen får se ut:

- $f(x)$ ska vara kontinuerlig (betyder?)
- $f(x) > 0$ för alla $x \in \Omega_x$ och $= 0$ annars
- Arean under $f(x)$ mellan $\pm\infty$ ska vara $= ?$

Fördelningsfunktionen

För både diskreta och kontinuerliga s.v. definieras **fördelningsfunktionen** enligt

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Diskreta fallet:

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^x f(k)$$

Kontinuerliga fallet:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$