

Statistikens grunder 1

2013 HT, dagtid

Statistiska institutionen

Vad vi ska gå igenom

- Mängdlära ✓
- Absolutbelopp
- Summatecknet
- Potensräkning
- Logaritmer och exponentialfunktionen
- Kombinatorik

Absolutbelopp

- "Storleken" av ett tal, man bortser ifrån tecknet, + el. -
- Avstånd mellan två tal
- Ex.

$$|2| = 2$$

$$|-2| = 2$$

$$|7-2| = 5$$

$$|2-7| = 5$$

- Det gäller att

$$|x| = x \text{ om } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ om } x < 0$$

Övning

Rita funktionslinjerna för

a. $f(x) = |x|$

b. $f(x) = |-x|$

c. $f(x) = -|x|$

d. $f(x) = |x-2|$

e. $f(x) = |4-x^2|$

Summatecken

Istället för att skriva

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$$

används summatecknet

$$\sum_{k=1}^{10} k$$

- k kallas summationsindex;
- startvärde är värdet under summatecknet (här 1)
- öka k med ett (1) i varje steg
- slutvärde är värdet ovanför summatecknet (här 10)

Summatecken, forts.

- Summanden kan uttryckas som en ***funktion*** av k

$$\sum_{k=1}^3 (2k - 1) = (2 - 1) + (4 - 1) + (6 - 1) = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$\sum_{k=0}^3 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \quad \text{"summa } 2^k \text{ då } k \text{ går från 0 till 3"}$$

- Eller användas som ***index***; anta n stycken tal $x_1, \dots, x_n$

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$$

"summa x_i då i går från 1 till n "

Övning

1.

2.

3.

4.

5.

Övning

6.

7.

8.

9.

Övning

10.

Potenser

- Ett tal a gånger sig självt b gånger; $a^b = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$
- b är positivt tal kallas **exponent**; a kallas **basen**
- Självk klart(?) att $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- Utvidga till negativa tal $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ $a^0 = 1$
- b behöver inte vara ett heltal; ex. roten till ett tal kan skrivas som en potens

$$a^{1/2} = \sqrt{a}; \quad a^{1/3} = \sqrt[3]{a}; \quad a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

Övning

11.

15.

12.

16.

13.

17.

18.

14.

Övning

$$19. \quad n = 1; \quad (2 \cdot 1 - 1) = 1$$

$$n = 2; \quad (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) = 1 + 3 = 4$$

$$n = 3; \quad (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$n = 4; \quad (2 \cdot 1 - 1) + \dots + (2 \cdot 4 - 1) = 16$$

Gissning:

Övning

$$20. \quad n = 0; \quad 2^0 = 1$$

$$n = 1; \quad 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$$

$$n = 2; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$n = 3; \quad 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Gissning:

Logaritmer

- Antag att vi har följande: $a^x = y$ *Obs! $a, y > 0$ och $a \neq 1$*
- Vi vet vad a och y är men söker x :

$$x = \log_a y$$

Det tal som vi upphöjer a till för att få y

Ex. $10^x = 10000$

$$x = \log_{10} 10000 = \log 10000 = 4 ; 10^4 = 10000$$

Ex. $e^x = 80$

$$x = \log_e 80 = \ln 80 = 4,382027... \quad \text{Naturliga logaritmen}$$

Logaritmer, forts.

- Oftast används naturliga logaritmfunktionen $\ln x$
- e = basen för den naturliga logaritmen $\approx 2,7182818\dots$

Räkneregler : ($x, y > 0$)

- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
- $\ln x^k = k \cdot \ln x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln(e^x) = e^{\ln x} = x$

Jämför ovanstående med potensräkningsreglerna!

Övning

21.

22.

23.

24.

25.

Övning

26.

27.

28.

29.

30.

Exponentialfunktion

Allmänt:

- Basen a upphöjs till x : $f(x) = a^x$
- $a > 0$
- Då $a > 0$ följer att $a^x > 0$ oavsett värde på x

Naturliga logaritm:

- Oftast använt är basen $e \approx 2,7182818.....$
- Skrivs även som

$$\exp(x) = e^x$$

Kombinatorik

Att räkna ut hur många sätt något kan göras

Antal kombinationer

Ex. Matsedel med *tre förrätter*, *fyra huvudrätter* och *två efterrätter*. På hur många olika sätt kan en trerätters måltid komponeras?

Svar:

Illustration med trädidiagram

Multiplikationsprincipen

- Ett experiment har m_1 möjliga utfall
- Ett annat efterföljande experiment har m_2 möjliga utfall
- Vi gör först det ena sedan det andra experimentet
- Totalt finns det

$$m_1 \times m_2$$

möjliga kombinationer av utfall

Kombinatorik, forts.

Exempel

Påse med numrerade kulor 1, ..., n

- Dra en kula slumpmässigt och notera dess nummer

Hur många möjliga utfall?

- Dra en kula till slumpmässigt och notera dess nummer

Hur många möjliga utfall?

(m_2 kanske beror på utfallet i första dragningen?)

Med eller utan återläggning

- Utan återläggning (eng. *without replacement*)
 - Dvs. kula dragen i första kan inte dras i nästa
 - Hur många möjliga kombinationer?

$$m_1 \cdot m_2 = n \cdot (n-1)$$

- Med återläggning (eng. *with replacement*)
 - Dvs. kula dragen i första kan dras i nästa
 - Hur många möjliga kombinationer?

$$m_1 \cdot m_2 = n \cdot n = n^2$$

Flera dragningar, dra k gånger

- Utan återläggning

- Dvs. kula dragen kan inte dras i efterföljande
- Hur många möjliga kombinationer?

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{k-1} \cdot m_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

- Med återläggning

- Dvs. kula dragen kan dras flera gånger i efterföljande
- Hur många möjliga kombinationer?

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{k-1} \cdot m_k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Kombinatorik, forts.

Spelar **ordningen** någon roll?

Två fall:

- Ordningen spelar roll
- Ordningen spelar ingen roll

Ordnat – Ej ordnat 1

Från en mängd bestående av sex tal $\{1,2,3,4,5,6\}$ dras tre *utan återläggning*

- Ordnad - vi skiljer t.ex. på utfallen
 $(1,2,5), (1,5,2), (2,1,5), (2,5,1), (5,1,2)$ och $(5,2,1)$
- Ej ordnad - utfallen ovan betraktas som samma utfall
ex. $\{1,2,5\} = \{1,5,2\} = \dots\{5,2,1\}$

Ordnat – Ej ordnat 2

Från en mängd bestående av sex tal $\{1,2,3,4,5,6\}$ dras tre
med återläggning

- Ordnat - vi skiljer t.ex. på utfallen
 $(1,1,5), (1,5,1), (5,1,1)$
- Ej ordnat - utfallen ovan betraktas som samma utfall
ex. $\{1,1,5\} = \{1,5,1\} = \{5,1,1\}$

Dra k ur n – Hur många sätt?

- Fyra fall:

	Ordnat	Ej ordnat
Med återläggning		
Utan återläggning		

Övning

- Dra två tal ur mängden $\{1,2,3,4,5\}$
 - med återläggning och med hänsyn till ordningen
 - utan återläggning och med hänsyn till ordningen
 - med återläggning och utan hänsyn till ordningen
 - utan återläggning och utan hänsyn till ordningen

Lista i vart och ett av fallen alla tänkbara utfall!

Här: $k = 2$ och $n = 5$

Övning, forts.

- Börja med samtliga tänkbara kombinationer:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

- Och stryk sedan de som är irrelevanta för vardera fall och gruppera de som är ekvivalenta

Övning, forts.

- Med återläggning och med hänsyn till ordningen

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

- Samtliga $n \cdot n = 5^2 = 25$ är unika utfall
- *Är alla lika sannolika?*

Övning, forts.

- Utan återläggning och med hänsyn till ordningen

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

- Samtliga $n(n-1) = 5 \cdot 4 = 20$ är unika utfall
- *Är alla lika sannolika?*

Övning, forts.

- Med återläggning och utan hänsyn till ordningen

(1,1)				
(1,2),(2,1)	(2,2)			
(1,3),(3,1)	(2,3),(3,2)	(3,3)		
(1,4),(4,1)	(2,4),(4,2)	(3,4),(4,3)	(4,4)	
(5,1),(1,5)	(2,5),(5,2)	(3,5),(5,3)	(4,5),(5,4)	(5,5)

- Finns 15 unika utfall
- *Är alla lika sannolika?*

Övning, forts.

- Utan återläggning och utan hänsyn till ordningen

(1,1)				
(1,2),(2,1)	(2,2)			
(1,3),(3,1)	(2,3),(3,2)	(3,3)		
(1,4),(4,1)	(2,4),(4,2)	(3,4),(4,3)	(4,4)	
(5,1),(1,5)	(2,5),(5,2)	(3,5),(5,3)	(4,5),(5,4)	(5,5)

- Finns 10 unika utfall
- *Är alla lika sannolika?*

Permutationer

- Ett arrangemang av n olika objekt i en **bestämd ordning** kallas för en **permutation** av objekten.
- Hur många unika permutationer kan man bilda av k **olika** objekt?
- Första väljs på k sätt, nästa på $(k-1)$ sätt osv. Multiplikationsprincipen ger

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- **k fakultet** (eng. *n factorial*)

Permutationer, forts.

Ex. På hur många olika sätt kan vi permutera de tre objekten A, B, C?

Svar: $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ olika sätt, nämligen
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- Rita ett träd diagram!
- OBS! Man definierar **$0! = 1$**

Dra k ur n – Hur många sätt?

- Fyra fall:

	Ordnat	Ej ordnat
Med återläggning	1. n^k	4. $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Utan återläggning	2. $\frac{n!}{(n-k)!}$	3. $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

- 1 och 2 ovan torde vara lätta att förstå nu (även 2?)
- 3 och särskilt 4 är lite svårare
- 4 behöver ni inte kunna men däremot 1, 2 och 3