

Läsanvisningar till kapitel 6 i Naturlig matematik

Avsnitt 6.6 ingår *inte*.

Avsnitt 6.1

Detta avsnitt illustrerar hur *sekanten* övergår i en tangent genom att den ena skärningspunkten rör sig mot den andra. Vad en sekant är står i fotnoten sid 168.

Sekantens riktningskoefficient kan vi räkna ut på vanligt sätt. Tangentens riktningskoefficient blir ett gränsvärde. Det är detta gränsvärde som är **derivatan**.

I avsnittet införs också begreppet *differenskvot* som är detsamma som sekantens riktningskoefficient. Om man vill undvika den geometriska tolkningen kan vi då säga att derivatan är gränsvärdet av differenskvoten med ett tillägg om vilka variabler som närmar sig varandra.

Vi kan märka att derivata behandlar *rörelse*. Derivatan vid en viss tidpunkt t är detsamma som (momentan-) *hastigheten* eller den ögonblickliga hastigheten vid denna tidpunkt. Sekantens riktningskoefficient motsvarar då medelhastigheten mellan två tidpunkter.

Derivata kan alltså ges tre olika tolkningar: en geometrisk (riktningskoefficient för sekant-tangent), en fysikalisk (medelhastighet-momentanhastighet) eller en algebraisk (differenskvot-derivata).

RÄKNA: TP (sid 170) 1

FUNDERA: FUN 6.1 (tänk på att tangentens riktningskoefficient påverkar tangentens lutning.)

Avsnitt 6.2

Precis som då vi definierade kontinuitet utgår vi ifrån en punkt när vi nu definierar derivata. Vi menar då att en funktion är *deriverbar* om derivatan existerar i varje punkt där ursprungsfunktionen är definierad. Se definitionsrutan sid 170.

Uttrycket för differenskvoten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

är viktig, men vi hittar ett annat skrivsätt på sid 172 som är likvärdigt bra:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Fördelen med den senare är att med denna kan den allmänna derivatan för en funktion f (i vilken punkt x som helst) definieras enligt:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

De olika derivatasymbolerna i rutan längst ner sid 170 bör du känna igen och kunna använda dig av.

När vi väl har definierat derivata kan vi börja beräkna dess värde i en punkt för olika funktioner. Exempelen 6.2 - 6.4 får du gå igenom. Speciellt intressant är att derivatan av en konstant är 0 (enligt exempel 6.2).

Vi har tidigare sagt att en kurva är ganska vacker då den är graf för en kontinuerlig funktion. Om funktionen är deriverbar blir den ännu mjukare i sin kurvighet. Tänk dig själv att du har en tangent som du för längs en kurva. Då får det minsann inte finnas några hörn (eller veck) på kurvan, för i ett hörn kan du inte placera tangenten. Men förbi ett hörn kan du föra en penna så kurvan är kontinuerlig där.

På grund av detta behöver vi inte förvåna oss över sats 6.1 sid 171.

Om en funktion är deriverbar i en punkt så är den också kontinuerlig i punkten.

Det är "finare" att vara deriverbar än kontinuerlig!

Beviset måste du gå igenom och förstå. Det är alltså två saker du måste bevisa för att veta att satsen är sann. För det första: f är definierad för x_0 . För det andra: Gränsvärdet för f då vi närmar oss x_0 är lika med f :s värde i x_0 .

När detta är bevisat har vi uppfyllt de två villkoren för kontinuitet som vi återfinner i kontinuitetsdefinitionen på sid 154 (kors då! det står sid 153 i boken).

Exempel 6.5 visar att omvändningen av satsen inte gäller, dvs det gäller *inte* att kontinuitet medför deriverbarhet. Ett annat enkelt sätt att inse detta är ju att tänka på hörnet (kontinuerlig men inte deriverbar). Det var ju "tur" att det inte var ekvivalens mellan kontinuitet och deriverbarhet för då skulle det ju vara relativt ointressant att överhuvudtaget diskutera derivata. Och detta är inte fallet! Derivata är bland de viktigaste och mest användbara matematiska begreppen. Mycket beror detta på de tre olika tolkningar vi kan göra av derivata som vi sett i avsnitt 6.1.

RÄKNA: TP (sid 173) 2, 3

FUNDERA: FUN 6.2 (det kan du ju nu. Tänk på en styckvis funktion som har hörn.)

Avsnitt 6.3

Det skulle bli väldigt krångligt om man varje gång man vill finna en funktions derivata måste använda sig av definitionen med differenskvot. De deriveringsregler som du finner i avsnitt 6.3 är därför mycket viktiga för användbarheten av derivator. Reglerna gör att konsten att derivera i många fall blir ett enkelt hantverk.

Sats 6.2 ger en bra början. Det kommer att visa sig att alla elementära funktioner har relativt enkla derivator. De är samlade i appendix C som standardderivator. För bevisen används standardgränsvärden från kapitel 5. För att du enklare ska kunna jobba med derivator i framtiden är det bäst att du lär dig standardderivatorna utantill. Det är ingen mening att bevisa dem för varje gång.

Deriveringsreglerna i sats 6.3 är synnerligen viktiga. Med dessa kan du bestämma derivator av lite mer komplicerade sammansättningar av elementära funktioner.

Det kan vara lättare att komma ihåg reglerna uttryckta i ord. Så här får du ett förslag:

I. En konstant faktor kan alltid brytas ut oförändrad ur en derivata.

Likheten kan förenklat skrivas som

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

II. Derivatan av en summa av funktioner är lika med summan av funktionernas derivator. Likheten kan förenklat skrivas som

$$(f + g)' = f' + g'$$

III. Derivatan av en produkt av två funktioner är lika med summan av den ena funktionen deriverad multiplicerat med den andra funktionen oförändrad **och** den andra funktionen deriverad multiplicerat med den första funktionen oförändrad. Likheten kan förenklat skrivas som

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

IV. (Svårast att komma ihåg!) Derivatan av en kvot mellan två funktioner (som vi just nu kallar täljaren och nämnaren) är lika med kvoten mellan (differensen av nämnaren oförändrad multiplicerad med täljaren deriverad **och** täljaren oförändrad multiplicerad med nämnaren deriverad) **och** nämnaren i kvadrat. Likheten kan förenklat skrivas som

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

Bevisen för dessa regler (sid 176) behöver du inte läsa igenom så noga om du inte vill. För att matematikboken inte ska bara kännas som en kokbok i konsten att räkna kan det ju emellertid vara trevligt att få lite förståelse av **varför** saker är som det är.

Exemplen 6.6 - 6.13 visar hur man kan använda reglerna. Men vi kommer att se många ytterligare exempel i fortsättningen där vi använder reglerna.

Vi ger ett exempel till som visar hur vi kan bestämma tangenten.

EXEMPEL: Grafen till funktionen $y = 2x - x^2$ har två skärningspunkter med x -axeln. Bestäm ekvationerna för grafens tangenter i dessa punkter.

Lösning: Skärningspunkterna får vi genom att lösa ekvationen $2x - x^2 = 0$, dvs. $x = 0$ och $x = 2$.

Skärningspunkterna är alltså $(0, 0)$ och $(2, 0)$.

Tangenternas riktningskoefficienter får vi genom att derivera funktionen:

$$y' = 2 - 2x$$

Riktningskoefficienterna är alltså:

$$\text{För tangenten i } (0, 0): \quad y'(0) = 2 - 2 \cdot 0 = 2$$

$$\text{För tangenten i } (2, 0): \quad y'(2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2$$

Tangenternas ekvationer är (enligt enpunktsformeln sid 44) $y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$ eller i våra fall:

$$\text{För tangenten i } (0, 0): \quad y - 0 = 2 \cdot (x - 0) \text{ förenklat } y = 2x$$

$$\text{För tangenten i } (2, 0): \quad y - 0 = -2 \cdot (x - 2) \text{ förenklat } y = 4 - 2x$$

□

Att $De^x = e^x$ visar vilket bra val e är som bas till exponentialfunktionen. Ingen annan bas kan ge samma funktion som derivata som ursprungsfunktionen. Vi ger en extra uppgift som för ihop den reflexionen med vad vi sa i kapitel 4 sid 116.

UPPGIFT: Bestäm tangenten till funktionen $y = e^x$ i punkten $x = 0$. (Observera att "punkten" i detta fall avser endast x -koordinaten.)

RÄKNA: TP (sid 180) 4 (c verkar svår! men använd logaritmlagarna!), 5

FUNDERA: FUN 6.3

Avsnitt 6.4

Kedjeregeln ger oss möjlighet att derivera sammansatta funktioner. Vi har tidigare beskrivit yttre och inre funktion. Båda dessa funktioner kan deriveras. Kedjeregeln säger att derivatorna ska multipliceras för att få derivatan av den sammansatta funktionen. Det vanligaste felet som görs vid derivering är att man glömmer att derivera inre funktionen, den s.k. *inre derivatan*. Ett känt citat från en annan lärobok säger: Aj, som satan! Jag glömde inre derivatan!

Och det kan verkligen göra "ont"!

Vi tar ett enkelt exempel.

EXEMPEL: Bestäm derivatan av funktionen $y = e^{2x}$.

Lösning: Yttre funktion är "e upphöjt till" och inre funktion är $2x$. Inre derivatan är $D(2x) = 2$. Derivatan kan då bestämmas i två steg där vi först bestämmer derivatan av yttre funktionen

$$D(e^{2x}) = D(e^{(\cdot)}) = e^{(\cdot)} \cdot (\cdot)' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

De tomma parenteserna vill förstärka att det viktigaste är vad funktionen gör och inte variabelbeteckningen. $\square$

Det svåraste med kedjeregeln är ofta att identifiera vad som är yttre och vad som är inre funktion. Exempelen 6.15 och 6.20 demonstrerar lite ytterligare.

Ibland finner man att funktionen är sammansatt av många funktioner. Då multipliceras alla ingående funktioners derivator. Se exempel 6.21.

Exempel 6.16 ger den slutliga standardderivatan $Dx^a = ax^{a-1}$. Lagg märke till hur den sammansatta funktionen påträffas i detta fall.

Beviset av kedjeregeln är ju ganska kul användning av derivatadefinitionen, men som det står i texten, är beviset ju inte helt korrekt. Så läs det om du vill.

Exempelen 6.18 och 6.19 är mycket *viktiga*.

RÄKNA: TP (sid 184) 6, 7

FUNDERA: FUN 6.4 (Lös *den* om du kan!)

Avsnitt 6.5

(Endast t.o.m. exempel 6.23 sid 186.)

Derivatan av inversen till en funktion kan vara lite omständigt att bestämma. Det gäller att hålla reda på vad som är oberoende och beroende variabel.

Likheten i sats 6.5

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

är ju mycket slående. Observera att det står y_0 som oberoende variabel för inversfunktionen och x_0 för den ursprungliga funktionen. Om vi jämför med bilden fig 3.11 sid 99 så kan vi inse att vi studerar riktningskoefficienten för samma tangent! Tangeringspunkten är (x_0, y_0) . Det är bara så att när y är oberoende variabel (alltså för f^{-1}) så får vi vrida på huvudet (och kanske vända det ut och in också) så att y -axeln blir liggande axel. Men observera att i slutändan blir ekvationerna för tangenterna till f^{-1} och f lika. De är ju samma tangent!

Beviset för sats 6.5 utgår ifrån derivaddefinitionen. Gå igenom det noga. Det innehåller algebraisk omskrivning, kontinuitetsdefinition och användning av gränsvärdesregler.

Gå igenom exemplen 6.22 och 6.23. I och med det sista exemplet har vi funnit alla standardderivator vi behöver för närvarande.

Resten av avsnittet och avsnitt 6.6 hoppar du över.

RÄKNA: TP (sid 187) 8

Avsnitt 6.7

Avsnittet ska handla om s.k. högre derivator som innebär att vi bestämmer de funktioner som bildas då vi deriverar den ursprungliga två eller flera gånger. Beteckningar på sid 191 och sid 192 är bra att spara på. Fysikaliskt sett betyder andraderivatan hastigheten av hastighetsförändringen, dvs accelerationen.

Avsnittet börjar med exemplen 6.29 och 6.30 som ytterligare exemplifierar hastighetsbegreppet då det gäller förstaderivatan.

RÄKNA: TP (sid 193) 11, 12

RÄKNA HELA KAPITLET: ÖV 6.1, 6.2bcf, 6.3adef, 6.4ab (varför blir svaret som det blir i b?), 6.5cd, 6.6cd, 6.7, 6.8, 6.10, 6.11, 6.14, 6.17, 6.20, 6.21, 6.28abc