



Tentamen i matematisk statistik

Sannolikhetsteori A, 5 poäng

Skrivtid: 09.00-15.00.

Tillåtna hjälpmedel: Tabellsamling, egen miniräknare.
Studenterna får behålla tentamensuppgifterna.

1. En komponent förpackas i stora partier med olika kvaliteter, *ordinär* och *prima*. Andelen felaktiga komponenter i ett parti av *ordinär* kvalitet är 5%, medan andelen felaktiga i ett parti av *prima* kvalitet är 1%. En tredjedel av alla partier är av *prima* kvalitet och resten av *ordinär* kvalitet. För att kvalitetsbestämma ett parti av okänd kvalitet tar man ut tre slumpmässigt valda komponenter.
 - a) Bestäm fördelningen för antalet trasiga komponenter av de tre uttagna för ett parti av *ordinär* kvalitet. (1 p)
 - b) Bestäm sannolikheten att få precis en trasig komponent av de tre uttagna från ett slumpmässigt valt parti (1 p)
 - c) Bestäm sannolikheten att ett slumpmässigt valt parti är av *prima* kvalitet, givet att precis en av de tre uttagna komponenterna var felaktig. (1 p)

Lösning:

Inför $P =$ "ett slumpmässigt valt parti är av prima kvalitet" Och $T =$ "en slumpmässigt vald komponent är trasig". Vi har $P(P) = 1/3$, $P(T|P) = 0.01$ och $P(T|P^*) = 0.05$.

a)

$X =$ "antal trasiga komponenter bland tre från ett ordinärt parti" är $\text{Bin}(3, 0.05)$

b)

Inför $E =$ "precis en komponent av tre från ett slumpmässigt parti är trasig". Vi har då att $P(E|P^*) = P(X=1) = 0.1354$. Eftersom $Y =$ "antal trasiga komponenter bland tre från ett prima parti" är $\text{Bin}(3, 0.01)$ gäller att $P(E|P) = P(Y=1) = 0.0294$. vi får då $P(E) = P(E|P)P(P) + P(E|P^*)P(P^*) = 0.1001$

c)

$$P(P | E) = \frac{P(E | P)P(P)}{P(E)} = 0.098$$

2. Låt de två stokastiska variablerna $X \in R(0,2)$ och $Y \in R(0,1)$ vara oberoende och sätt

$$Z = \frac{2X+Y}{2.5} \text{ och } W = \frac{X+2Y}{2}$$

- a) Beräkna $C(Z,W)$ (1.5 p)
b) Beräkna $P(|Z-W|>0.3)$ (1.5 p)

Anm: Att $X \in R(0,2)$ betyder att $f_X(x) = \frac{1}{2}, 0 < x < 2$

Lösning:

a)

$$C(Z,W) = C\left(\frac{2X+Y}{2.5}, \frac{X+2Y}{2}\right) = \frac{1}{5}C(2X+Y, X+2Y) = \frac{1}{5}(2C(X,X) + 4C(X,Y) + C(X,Y) + 2C(Y,Y)) = \frac{1}{5}(2V(X) + 2V(Y)) = \frac{1}{5}\left(2 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}$$

b)

$$P(|Z-W|>0.3) = \dots = P(Y > \frac{X+1}{2} \text{ eller } Y < \frac{X-1}{2}) = \iint_A 1 \cdot \frac{1}{2} dx dy \text{ där arean } A \text{ bestäms av att}$$

$$0 < x < 2, 0 < y < 1 \text{ och } y > (x+1)/2 \text{ eller } 0 < x < 2, 0 < y < 1 \text{ och } y < (x-1)/2. \text{ Vi finner att } A = 2 \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{och att } P(|Z-W|>0.3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- 3 a) Definiera begreppet *konvergens i sannolikhets* (1 p)
b) Antag att $X_1, X_2, \dots$ är en följd av kontinuerliga stokastiska variabler där X_n har frekvensfunktion

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-n(x-a)} & x \geq a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Visa att X_n konvergerar i sannolikhets mot a då $n \rightarrow \infty$ (2 p)

Lösning:

$$a) X_n \xrightarrow{P} X \text{ då } n \rightarrow \infty \text{ om } \forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

b) Tag godtyckligt $\varepsilon > 0$.

$$P(|X_n - a| > \varepsilon) = P(X_n > a + \varepsilon) + P(X_n < a - \varepsilon) = P(X_n > a + \varepsilon) + 0 = \int_a^{a+\varepsilon} ne^{-n(x-a)} dx = e^{-n\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

- 4 Meddelanden anländer till en dator genom två telefonlinjer enligt två oberoende Poisson-processer med intensiteter λ respektive μ .
- Bestäm sannolikheten att ett meddelande anländer först på linje 1. (1 p)
 - Bestäm frekvensfunktionen för väntetiden till första meddelande. (1 p)
 - Antag att det totala antalet meddelanden i $(0, t)$ är tre. Bestäm den betingade sannolikheten att åtminstone ett meddelande har anlänt i första halvan av intervallet och åtminstone ett i det andra. (1 p)

Lösning:

Låt T_1 vara väntetiden till första samtal på linje 1 och låt T_2 vara motsvarande för linje 2. Då gäller att T_1 och T_2 är exponentialfördelade med väntevärden $1/\lambda$ respektive $1/\mu$.

a)

$$P(T_1 < T_2) = \int_0^{\infty} P(T_1 < T_2 \mid T_2 = x) f_{T_2}(x) dx = \dots = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

b)

Väntetiden till första meddelande är $T = \min(T_1, T_2)$.

$$P(T \leq t) = 1 - P(\min(T_1, T_2) > t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) = 1 - e^{-(\lambda + \mu)t}$$

Frekvensfunktionen blir då $f_T(t) = (\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)t}$, $t > 0$.

c) Låt $N(t)$ vara totala antalet meddelanden i $(0, t)$. Då är $\{N(t)\}$ en Poissonprocess med intensitet $(\lambda + \mu)$. Vi får

$$P(N(t/2) \geq 1, N(t) - N(t/2) \geq 1 \mid N(t) = 3) = P(N(t/2) = 1, N(t) - N(t/2) = 1 \mid N(t) = 3) +$$

$$P(N(t/2) = 2, N(t) - N(t/2) = 1 \mid N(t) = 3) = \frac{P(N(t/2) = 2)P(N(t) - N(t/2) = 1)}{P(N(t) = 3)} +$$

$$\frac{P(N(t/2) = 1)P(N(t) - N(t/2) = 2)}{P(N(t) = 3)} = \frac{\frac{e^{-(\lambda + \mu)t/2} ((\lambda + \mu)t/2)^1}{1!} \frac{e^{-(\lambda + \mu)t/2} ((\lambda + \mu)t/2)^2}{2!}}{\frac{e^{-(\lambda + \mu)t} ((\lambda + \mu)t)^3}{3!}} +$$

$$\frac{\frac{e^{-(\lambda + \mu)t/2} ((\lambda + \mu)t/2)^2}{2!} \frac{e^{-(\lambda + \mu)t/2} ((\lambda + \mu)t/2)^1}{1!}}{\frac{e^{-(\lambda + \mu)t} ((\lambda + \mu)t)^3}{3!}} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

- 5 Låt X vara en kontinuerlig slumpvariabel med frekvensfunktion $f_X(x) = xe^{-x}$, $x > 0$.
- a) Bestäm momentgenererande funktion till X (1.5 p)
- b) Utnyttja momentgenererande funktionen för att bestämma $E(X)$ och $V(X)$ (1.5 p)

Lösning:

a)

$$M(X, t) = \int_0^{\infty} e^{tx} x e^{-x} dx = \frac{1}{1-t} \int_0^{\infty} x(1-t)e^{-x(1-t)} dx = \frac{1}{(1-t)^2}$$

b)

$$M'(X, t) = \frac{2}{(1-t)^3} \Rightarrow E(X) = M'(X, 0) = 2$$

$$M''(X, t) = \frac{6}{(1-t)^4} \Rightarrow E(X^2) = M''(X, 0) = 6$$

Vi får $V(X) = 6 - 4 = 2$

- 6 Låt T beteckna livslängden för en enhet. Hazard rate för T är $h(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$, $t > 0$.

- a) Bestäm överlevnadsfunktion och frekvensfunktion till T (1.5 p)
- b) Bestäm Mean-Time-To-Failure, dvs $E(T)$. (1.5 p)

Lösning:

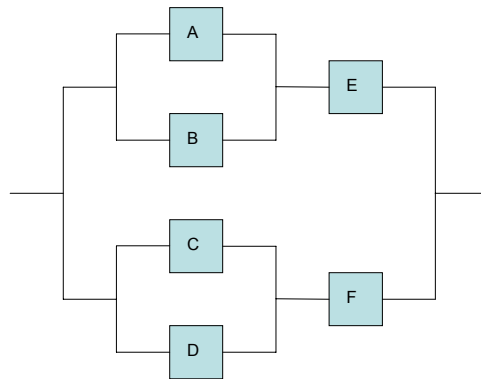
a)

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t (1 - \frac{1}{1+s}) ds} = 1 - e^{-t + \ln(1+t)} = 1 - (1+t)e^{-t} \text{ vilket ger att } f(t) = te^{-t}, t > 0.$$

b)

$$E(T) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = 2$$

7. Ett icke-underhållet system består av 6 oberoende enheter (A-F) kopplade enligt nedanstående schema. Om alla enheterna har samma funktionssannolikhet vid tiden t , $R(t) = e^{-t/4}$, $t > 0$, bestäm systemets förväntade livslängd. (3 p)



Lösning:

Genom att kombinera regler för seriekoppling och parallellkoppling erhålls

$$R_{\text{SYS}}(t) = 4e^{-2t/4} - 2e^{-3t/4} - 4e^{-4t/4} + 4e^{-5t/4} - e^{-6t/4}$$

$$\text{Förväntad livslängd blir då } \int_0^{\infty} R_{\text{SYS}}(t) dt = \frac{116}{30} = 3.87$$

Lycka till