



Tentamen i matematisk statistik

Sannolikhetsteori A, 5 poäng

Skrivtid: 09.00-15.00.

Tillåtna hjälpmedel: Tabellsamling, egen miniräknare.
Studenterna får behålla tentamensuppgifterna.

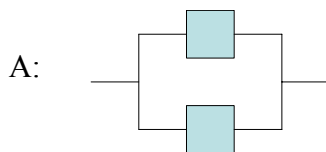
1. Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion $f(x) = 3(1 - \sqrt{x})$ $0 \leq x \leq 1$. Inför $Y = \sqrt{X}$.
- a) Bestäm täthetsfunktionen till Y (1.5 p)
 - b) Bestäm $E(Y)$ och $V(Y)$ (1.5 p)

Svar: a) $f_Y(y) = 6y(1 - y)$, $0 \leq y \leq 1$
b) $E(Y) = 6/12$, $V(Y) = 1/20$

2. För att kunna komma fram med ett telefonsamtal till en speciell myndighet måste man passera två telefonväxlar. Väntetiden i den första växeln antas vara exponentialfördelad med väntevärde 10 sek och väntetiden i den andra antas vara exponentialfördelad med väntevärde 5 sek. Väntetiderna antas vara oberoende av varandra. Bestäm sannolikheten att man måste vänta längre än 20 sekunder. (3 p)

Svar: 0.252

3. I ett system kan vi välja mellan kopplingsalternativen



I det parallellkopplade systemet A är felintensiteten 1 för varje komponent medan den är λ för varje komponent i det seriekopplade systemet B. Alla komponenterna antas fungera oberoende av varandra.

Hur stor måste felintensiteten λ vara för att medianlivslängden för det parallellkopplade systemet skall vara dubbelt så stor som medianlivslängden för det seriekopplade systemet? (3 p)

Svar: $\lambda = \frac{2 \ln(\sqrt{2})}{-\ln(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \approx 0.2822$

- 4 Ett stort mekaniskt företag köper in stora mängder kullager till sin tillverkning och har höga krav på dess kvalitet. Varje parti om 40 kullager kontrolleras på följande sätt. Först väljs 5 st slumpmässigt och om alla dessa är felfria accepteras partiet. Om minst två defekta hittas avvisas partiet. Om exakt ett lager är defekt väljs ytterligare 5 lager slumpmässigt och partiet accepteras om och endast om samtliga dessa visar sig vara felfria. Beräkna sannolikheten att ett parti med 4 defekta kullager accepteras. (4 p)

Svar: 0.7951

- 5 Låt X vara geometriskt fördelad med sannolikhetsfunktionen $P(X=k)=q^{k-1}p$, $k=1,2,\dots$
- a) Bestäm momentgenererande funktion till X (1 p)
 - b) Bestäm $E(X)$ och $V(X)$ (1 p)
 - c) Utnyttja dina kunskaper om negativ binomialfördelning och bestäm väntevärde och varians för en sådan. (2 p)

- 6 Låt (X,Y) vara en bivariat slumpvariabel med täthetsfunktion $f(x,y) = 3y$, $0 < x < y < 1$.
- a) Bestäm korrelationen mellan X och Y (2 p)
 - b) Är det sant att $E\left[\frac{X}{Y}\right] = \frac{E[X]}{E[Y]}$? (2 p)

Svar: a) $\rho(X,Y) = \frac{\sqrt{57}}{19} \approx 0,397$

b) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)} = 1/2$

7. Till ett försäkringsbolag inkommer skadeanmälningar enligt en Poissonprocess med intensiteten 5 anmälningar per dag. Med 50% chans leder en skadeanmälan till att bolaget måste betala ut en summa pengar. Det belopp som bolaget då måste betala är i genomsnitt 88 tusen kronor, med en standardavvikelse på 50 tusen kronor. Kostnaderna för skador är sinsemellan oberoende och oberoende av antalet inrapporterade skador. Bestäm väntevärde och standardavvikelse för bolagets totala utbetalningar under en period om 30 dagar. (3 p)

Svar: Väntevärde=6600 kkr, Standardavvikelse=876.53 kkr

UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för matematisk statistik
MSTA30 Sannolikhetsteori A, 5 p
Lennart Nilsson

TENTAMEN
2004-01-09