



Tentamen i matematisk statistik

Sannolikheteori A, 5 poäng

Skrivtid: 9.00-15.00.

Tillåtna hjälpmedel: Tabellsamling, egen miniräknare.
Studenterna får behålla tentamensuppgifterna.

(Ni kan fråga Peter Anton om det är något ni inte förstår eller ringa 070-3747940)

1. Kasta ett just mynt upprepade gånger. Vad är sannolikheten att antalet "krona" blir sex st innan antalet "klave" blir fyra? (3 p)

Lösning:

Det minsta antalet kast som krävs för lyckat resultat är 6 och det maximala antalet är 9. Vid sex kast måste utfallet vara en serie av fem kronor och en avslutning med krona. Bland de fem första kasten är det ingen klave. Sannolikheten för detta utfall är

$\binom{5}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^6$. Vid sju kast skall fem krona inträffa bland de sex första kasten och avslutas

med en krona. Sannolikheten för detta är $\binom{6}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^7$ o s v. Vi får svaret

$$\binom{5}{0} * \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{7}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{3} * \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 * (8 + 24 + 42 + 56) = \frac{65}{256} = 0,2539$$

Alternativ 1: X=antal krona vid 9 kast. X är då Bin(9,0.5) och $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,74609 = 0,25391$

Alternativ 2: X=väntetiden till 6:e krona. X är då negativt binomialfördelad. $P(6 \text{ krona för } 4$

$$\text{klave}) = P(X \leq 9) = \sum_{i=6}^9 \binom{i-1}{5} 0.5^i = \frac{65}{256}$$

2. Antag att X är en exponentialfördelat slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Låt Y vara heltalsdelen av X, d v s alla decimalerna från talet X är borttagna.

- a) Bestäm sannolikhetsfunktionen till Y (1 p)
b) Bestäm väntevärde för Y (1 p)

- c) Bestäm variansen för Y (1 p)

Lösning:

- a) $Y=[X]$. Då kan Y anta värden $0, 1, \dots$ och $P(Y=k)=P(k \leq X < k+1)=F(k+1)-F(k)=1 - e^{-(k+1)/\mu} - (1 - e^{-k/\mu}) = e^{-k/\mu}(1 - e^{-1/\mu})$

- b) Låt $p = (1 - e^{-1/\mu})$. Då $P(Y=k)=q^k p$, $k=0, 1, \dots$

$$M(X, t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} q^k p = \sum_{k=0}^{\infty} (qe^t)^k p = \frac{p}{1 - qe^t} \cdot E(X) = M'(X, 0) = \frac{q}{p} = \frac{e^{-1/\mu}}{1 - e^{-1/\mu}}$$

- c) $E(X^2) = M''(X, 0)$ vilket ger att $V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{e^{-1/\mu}}{(1 - e^{-1/\mu})^2}$

3. Kalle leker med en tärning. Han börjar med att kasta tärningen en gång och får resultatet X. Därefter kastar han tärningen X gånger och beräknar summan Y av dessa kast.

- a) Bestäm väntevärdet $E(Y)$ (1 p)
b) Bestäm variansen $V(Y)$ (2 p)

Lösning:

$Y = \sum_{i=1}^X Z_i$ där Z_i =resultatet vid kast nr i. Eftersom X är en slumpvariabel får vi

- a) $E(Y) = E(E(Y|X))$ och $E(Y|X=x) = E\left(\sum_{i=1}^x Z_i\right) = \sum_{i=1}^x E(Z_i) = 3.5x$

Därför blir $E(Y) = E(3.5X) = 3.5 \cdot 2 = 7$

- b) $V(Y) = E(V(Y|X)) + V(E(Y|X)) = E(3.5X/12) + V(3.5X) = 35E(X)/12 + 12.25V(X) = 45.9375$

4. Anropen till polisen från automatiska inbrottslarm kan antas komma enligt en Poissonprocess med intensiteten 2 larm per timme. Varje sådant larm är med sannolikheten 0.8 falskt. Vi antar oberoende mellan larmen.

- a) Vad är sannolikheten att det sjunde larmet är falskt? (1 p)
b) Bestäm sannolikheten att det kommer 2 riktiga och 6 falska larm under en 3-timmarsperiod (1 p)
c) Antag att det under 8 timmar kom 10 larm. Vad är sannolikheten att 8 av dessa kom under de tre första timmarna? (2 p)

Lösning:

$X(t)$ =antal larm under tiden $(0, t)$. $\{X(t), t \geq 0\}$ är en Poissonprocess med intensitet 2 larm per timme. Låt $Y(t)$ =antal falska larm under tiden $(0, t)$. Då utgör $\{Y(t), t \geq 0\}$ är en uttunnad Poissonprocess med intensitet $2 \cdot 0.8 = 1.6$ larm per timme. Låt vidare $Z(t)$ =antal riktiga larm under tiden $(0, t)$. Då utgör $\{Z(t), t \geq 0\}$ är en uttunnad Poissonprocess med

intensitet $2 \cdot 0.2 = 0.4$ larm per timme. Observera att processerna $\{Y(t), t > 0\}$ och $\{Z(t), t > 0\}$ är oberoende.

a) Eftersom varje larm kommer oberoende av varandra är sannolikheten 0.8 att det sjunde larmet är falskt.

$$b) P(Y(3)=6, Z(3)=2) = P(Y(3)=6) \cdot P(Z(3)=2) = \frac{e^{-4.8} 4.8^6}{6!} \cdot \frac{e^{-1.2} 1.2^2}{2!} = .03031660274$$

$$c) P(X(3)=8 | X(8)=10) = \frac{P(X(3)=8, X(8)=10)}{P(X(8)=10)} = \frac{P(X(3)=8, X(8)-X(3)=2)}{P(X(8)=10)} =$$

$$\frac{P(X(3)=8) \cdot P(X(8)-X(3)=2)}{P(X(8)=10)} = \frac{\frac{e^{-6} 6^8}{8!} \cdot \frac{e^{-10} 10^2}{2!}}{\frac{e^{-16} 16^{10}}{10!}} = .006874208338$$

5. En belysningsanordning består av två glödlampor som går sönder oberoende av varandra med intensiteten

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

Beräkna intensitets-funktionen för den tid det tar till dess båda lamporna har gått sönder.

(3 p)

Lösning:

Låt X_i = livslängden hos lampa nr i , $i=1,2$. Då ges fördelningsfunktionen för X_i av

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u) du} = 1 - e^{-[u - \ln(1+u)]_0^t} = 1 - e^{-(t - \ln(1+t))} = 1 - (1+t)e^{-t} \text{ och frekvensfunktionen av}$$

$$f(t) = (1+t)e^{-t} - e^{-t} = te^{-t}, t > 0.1 :=$$

Låt $Y = \max(X_1, X_2)$ = Tiden det tar till dess båda lamporna slocknat. Vi får

$$F_Y(t) = P(\max(X_1, X_2) \leq t) = P(X_1 \leq t) \cdot P(X_2 \leq t) = F(t)^2,$$

$$f_Y(t) = 2f(t)F(t) \text{ och } \lambda_Y(t) = \frac{f_Y(t)}{1 - F_Y(t)} = \frac{2f(t)F(t)}{1 - F(t)^2} = \frac{2t(1 - (1+t)e^{-t})}{(1+t)^2 e^{-t} - 2(1+t)}$$

6. Den två-dimensionella slumpvariabeln (X, Y) har följande sannolikhetsfunktion, där $0 < p < 1$ och $q = 1 - p$,

$$p(i, j) = \begin{cases} e^{-q} - p & \text{för } (i, j) = (0, 0) \\ p & \text{för } (i, j) = (1, 0) \\ \frac{e^{-q} q^j}{j!} & \text{för } i = 0 \text{ och } j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Bestäm de marginella sannolikhetsfördelningarna för X och Y

(1 p)

b) Beräkna korrelationskoefficienten $\rho(X, Y)$ mellan X och Y

(3 p)

Lösning:

- a) X är en slumpvariabel som endast antar värdena 0 och 1 och

$$P(X=0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=0, Y=j) = p(0,0) + \sum_{j=1}^{\infty} p(0,j) = e^{-q} - p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-q} q^j}{j!} =$$

$$e^{-q} - p + (1 - e^{-q}) = 1 - p = q$$

$$P(X=1) = p(1,0) = p \text{ och } X \text{ är Bin}(1,p) \text{ med } E(X)=p \text{ och } V(X)=pq.$$

Y är en slumpvariabel med

$$P(Y=0) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j, Y=0) = p(0,0) + p(1,0) = e^{-q} - p + p = e^{-q}$$

$$P(Y=k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j, Y=k) = p(0,k) = \frac{e^{-q} q^k}{k!}, k=1,2,\dots$$

Vi har att Y är Po(q) med $E(Y)=q$ och $V(Y)=q$.

- b) Eftersom $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ återstår att beräkna

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ijP(X=i, Y=j) = 0 \cdot 0 \cdot p(0,0) + 1 \cdot 0 \cdot p(1,0) + \sum_{j=1}^{\infty} 0 \cdot j \cdot \frac{e^{-q} q^j}{j!} = 0.$$

$$\text{Vi får } \rho(X, Y) = \frac{0 - pq}{\sqrt{pqq}} = -\sqrt{p}$$

7. Låt X vara en exponentialfördelad slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- a) Bestäm momentgenererande funktion $M(X,t)$ till X (1 p)
b) Bestäm momentgenererande funktion till summan Y av n st sådana oberoende exponentialfördelade variabler. (1 p)
c) Bestäm väntevärdet μ och standardavvikelsen σ av Y (1 p)
d) Vilken fördelning antar $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ då $n \rightarrow \infty$? (1 p)

Lösning:

$$a) M(X, t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x/(1-\mu t)} dx = \frac{1}{\mu} \frac{\mu}{1-\mu t} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\frac{\mu}{1-\mu t})} e^{-x/(\frac{\mu}{1-\mu t})} dx = \frac{1}{1-\mu t}$$

$$b) M(Y, t) = E(e^{tY}) = E(e^{t \sum_{i=1}^n X_i}) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) = E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) = \left(\frac{1}{1-\mu t} \right)^n$$

$$c) E(Y) = M'(Y, 0) = n\mu, V(Y) = M''(Y, 0) - M'(Y, 0)^2 = n\mu^2$$

- d) Centrala gränsvärdessatsen medför att $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ konvergerar mot en $N(0,1)$ då $n \rightarrow \infty$?

UMEÅ UNIVERSITET
Institutionen för matematisk statistik
MSTA30 Sannolikhetsteori A, 5 p
Lennart Nilsson

TENTAMEN
2003-11-15

Lycka till!