



Tentamen i matematisk statistik

Sannolikhetsteori A, 5 poäng

Skrivtid: 14.00-20.00.

Tillåtna hjälpmedel: Tabellsamling, egen miniräknare.
Studenterna får behålla tentamensuppgifterna.

1. En maskin som tillverkar tärningar har blivit felprogrammerad på så sätt att den på varje tärningssida målar något av talen 1, 2, ..., 6 helt slumpmässigt, dvs den målar de olika talen med samma sannolikhet och oberoende av vad den målat på tärningens övriga sidor.
- a) Vad är sannolikheten att man får en sexa i ett kast med en sådan tärning? (1 p)
- b) Vad är sannolikheten att man får två sexor i två kast? (2 p)

Lösning: Låt X beteckna antalet sexor på tärningen. Då gäller att X är $\text{Bin}(6, 1/6)$.

a) Genom att utnyttja satsen om total sannolikhet finner vi att

$$P(\text{sexa}) = \sum_{k=0}^6 P(\text{sexa} | X = k)P(X = k) = \sum_{k=0}^6 \frac{k}{6} P(X = k) = \frac{1}{6} E(X) = \frac{1}{6}$$

$$P(2 \text{ sexor}) = \sum_{k=0}^6 P(2 \text{ sexor} | X = k)P(X = k) = \sum_{k=0}^6 \left(\frac{k}{6}\right)^2 P(X = k) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 E(X^2) =$$

b)

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 (V(X) + E(X)^2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6} + 1\right) = \frac{11}{216} = 0.05093$$

2. Låt (X, Y) vara en 2-dimensionell stokastisk variabel med simultan frekvensfunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x^2 & \text{om } 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm korrelationen mellan X och Y .

(3 p)

Lösning: Vi måste bestämma de marginella fördelningarna för att kunna beräkna $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$. Dessutom måste vi bestämma $E(XY)$.

$$f_X(x) = \int_0^x 4x^2 dy = \left[4x^2 y \right]_0^x = 4x^3, 0 \leq x \leq 1. \text{ Vi får } E(X) = 4/5 \text{ och } V(X) = 2/75$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 4x^2 dx = \left[\frac{4x^3}{3} \right]_y^1 = \frac{4}{3}(1 - y^3), 0 \leq y \leq 1. \text{ Vi får } E(Y) = 2/5 \text{ och}$$

$$V(Y) = 14/225.$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^x xyf(x, y)dydx = \int_0^1 \int_0^x 4yx^3dydx = \int_0^1 \left[2y^2x^3 \right]_0^x dx = \int_0^1 2x^5 dx = 1/3$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/75$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\sqrt{21}}{14} = 0,327$$

3. Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara stokastiska variabler och låt $\hat{\theta}_n$ vara en funktion av dessa variabler sådan att $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$. Visa att $\hat{\theta}_n$ konvergerar i sannolikhet mot θ .

(3 p)

Lösning: Tchebycheff's olikhet används. $P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$.

$\hat{\theta}_n$ konvergerar i sannolikhet mot θ då $n \rightarrow \infty$ om $P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) \rightarrow 1$. Sätt

$X = \hat{\theta}_n, \mu = E(\hat{\theta}_n) = \theta$ och $k\sigma = k\sqrt{V(\hat{\theta}_n)} = \varepsilon$ i olikheten ovan. Det innebär att

$k^2 = \frac{\varepsilon^2}{V(\hat{\theta}_n)}$ och $P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2}$ vilket går mot 1 då $n \rightarrow \infty$ eftersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0.$$

4. Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara oberoende stokastiska variabler med frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & \text{om } x > a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och låt $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

a) Bestäm $E(Y)$.

(2 p)

b) Bilda en funktion $h(Y)$ sådan att $E(h(Y)) = a$.

(1 p)

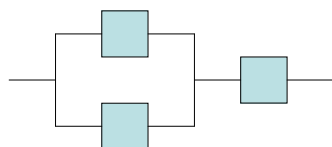
Lösning: $1 - F_Y(y) = P(Y > y) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > y) = P(X_1 > y)^n$ eftersom alla X -variablerna har samma fördelning och är oberoende. Men $P(X_1 > y) = e^{-(y-a)}, y > a$.

Vi får $F_Y(y) = 1 - e^{-n(y-a)}, f_Y(y) = ne^{-n(y-a)}, y > a$ och

$$\text{a) } E(Y) = \int_a^\infty yne^{-n(y-a)} dy = a + \frac{1}{n}$$

$$\text{b) } h(Y) = Y - 1/n$$

5. Ett system består av två parallellkopplade enheter och en seriekopplad enheter enligt figur nedan. Livslängderna för de tre komponenterna är alla oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 2 timmar.



- a) Bestäm systemets överlevnadsfunktion, $R(t)$. (1 p)
b) Bestäm systemets förväntade livslängd. (1 p)
c) Bestäm systemets intensitetsfunktion, $\lambda(t)$. (1 p)

Lösning: Låt X_1 , X_2 och X_3 beteckna livslängderna för komponenterna. Om vi först studerar livslängden Y hos de två parallellkopplade enheterna finner vi att

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max(X_1, X_2) \leq y) = P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) = (1 - e^{-y/2})^2 = 1 - 2e^{-y/2} + e^{-y}$$

a) Systemets livslängd $Z = \min(Y, X_3)$ har överlevnadsfunktionen

$$R(t) = P(Z > t) = P(\min(Y, X_3) > t) = P(Y > t)P(X_3 > t) = (2e^{-y/2} - e^{-y})(e^{-y/2}) = 2e^{-y} - e^{-3y/2}$$

$$b) E(Z) = \int_0^{\infty} (2e^{-y} - e^{-3y/2}) dy = \frac{4}{3}$$

$$c) \lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{2e^{-y} - 3/2 e^{-3y/2}}{2e^{-y} - e^{-3y/2}} = \frac{4 - 3e^{-y/2}}{4 - 2e^{-y/2}}$$

6. Låt U vara ett slumptal mellan 0 och 1 och låt $X = \sqrt{-a \ln(1 - U)}$, $a > 0$.

- a) Bestäm fördelnings- och frekvensfunktionen till X . (1 p)
b) Bestäm väntevärde för X (1 p)

Lösning: a)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\sqrt{-a \ln(1 - U)} \leq x) = P(-a \ln(1 - U) \leq x^2) =$$

$$P(\ln(1 - U) \geq -\frac{x^2}{a}) = P(1 - U \geq e^{-x^2/a}) = P(U \leq 1 - e^{-x^2/a}) = 1 - e^{-x^2/a}, x > 0$$

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = \frac{2x}{a} e^{-x^2/a}, x > 0$$

b)

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2/a} dx = \sqrt{2\pi} \sqrt{a/2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{a/2}} e^{-1/2 (\frac{x-0}{\sqrt{a/2}})^2} dx =$$

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{a/2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi a}}{2}$$

7. Till en butik anländer män och kvinnor enligt två oberoende Poissonprocesser med intensiteterna λ_1 respektive λ_2 . Låt X beteckna antalet kvinnor som hinner anlända innan förste man anländer. Bestäm fördelningen för X . (3 p)

Lösning: Låt τ_X =tiden till ankomst av första man och τ_Y =tiden till ankomst av första kvinna. Eftersom exponentialfördelningen saknar minne följer att vi kan betrakta detta som ett försök som startar om varje gång en kvinna anländer. Vi lyckas i varje försök om $\tau_Y < \tau_X$ och misslyckas annars.

Vi finner då att $P(X=k) = P(\tau_Y < \tau_X)^k (1 - P(\tau_Y < \tau_X)) = q^k p$ där

$$q = P(\tau_Y < \tau_X) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau_Y < \tau_X \mid \tau_X = x) f_{\tau_X}(x) dx = \int_0^{\infty} P(\tau_Y < x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_2 x}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx - \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

8. Låt X vara en Poissonfördelad slumpvariabel med väntevärde λ .

- Bestäm momentgenererande funktion till $M(X, t)$ till X (1 p)
- Bestäm momentgenererande funktion $M(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}, t)$ till $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ (1 p)
- Bestäm $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}, t)$. Vilken fördelning antar $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ då $\lambda \rightarrow \infty$? (2 p)

Lösning: a) $M(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (\lambda e^t)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda e^t} (\lambda e^t)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}$

b) $M(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}, t) = e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} t} M(X, \frac{t}{\sqrt{\lambda}}) = e^{-t\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(e^{t/\sqrt{\lambda}} - 1)}$

Exponenten i detta uttryck blir $\lambda e^{t/\sqrt{\lambda}} - \lambda - t\sqrt{\lambda}$. När $\lambda \rightarrow \infty$ går $t/\sqrt{\lambda} \rightarrow 0$. En Taylorutveckling av $e^{t/\sqrt{\lambda}}$ resulterar i $e^{t/\sqrt{\lambda}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} + \frac{t^3}{3!\lambda^{3/2}} + \frac{t^4}{4!\lambda^2} + \dots$ och att exponenten ovan blir

$$\lambda(1 + \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} + \frac{t^3}{3!\lambda^{3/2}} + \frac{t^4}{4!\lambda^2} + \dots) - \lambda - t\sqrt{\lambda} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!\lambda^{1/2}} + \frac{t^4}{4!\lambda} + \dots$$

När $\lambda \rightarrow \infty$ får vi att $M(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}, t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ vilken är mgf för en $N(0,1)$ -variabel.

Lycka till!