

## Deriveringregler för rotfunktioner och sammansatta funktioner

### Funktioner med rationella exponenter

Det går att visa man kan använda samma regler som för polynom. Vi hoppar över beviset och går direkt på ett exempel.

|                                                                                                                                                                               |                |                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Exempel 1</b><br><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">                     Derivera funktionen<br/> <math>y = \sqrt{x}</math> </div> | <b>Lösning</b> | Skriv först om funktionen på formen $y = x^{1/2}$<br>Använd samma deriveringsregler som för polynom.<br>$y' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

1) Derivera:    a)  $y = x^{3/2}$     b)  $y = 0,4x^{5/2}$     c)  $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$     d)  $y = \frac{10x - x^2}{\sqrt{x}}$

### Sammansatta funktioner

Med sammansatt funktion menas en "funktion av en funktion". Sammansatta funktioner deriveras enligt följande:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Exempel</b><br><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">                     Derivera funktionen<br/> <math>y = (4x^2 + 5x)^2</math> </div><br><br><b>"Bevis"</b><br><div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>y = f(u(x))</math><br/> <math display="block">y'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)</math> </div> | <b>Lösning</b> | Funktionen kan skrivas som $y = u^2$<br>där $u = 4x^2 + 5x$<br>1) Bestäm "yttre derivata" $y'(u) = 2u$<br>2) Bestäm "inre derivata" $u'(x) = 8x + 5$<br>3) Ställ upp produkten $y'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot (8x + 5)$<br>4) Sätt in uttrycket för u $2(4x^2 + 5x) \cdot (8x + 5)$<br>5) Klart!    Svar: <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>y'(x) = 2(4x^2 + 5x) \cdot (8x + 5)</math></span> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

2) Derivera:    a)  $y = (5x + 3)^2$     b)  $y = (2x + 3)^5$     c)  $y = (3x^3 + 5x^4)^3$

3) Derivera:    a)  $y = (\sqrt{x} + x)^2$     b)  $y = (\sqrt{x} + 0,8x^3)^2$     c)  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right)^5$

4) Derivera:    a)  $y = \sqrt{3x}$     b)  $y = \sqrt{3x + x^2}$     c)  $y = \sqrt{3x + x^2 - \frac{1}{x}} + 5$

5) Derivera:    a)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$     b)  $y = \sqrt{\sqrt{x}}$     c)  $y = \sqrt{x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$

### Facit

1) a)  $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$     b)  $y' = x^{3/2}$     c)  $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$     d)  $y' = \frac{10-3x}{2\sqrt{x}}$

2) a)  $y' = 10(5x + 3)$     b)  $y' = 10(2x + 3)$     c)  $y' = 3(3x^3 + 5x^4)^2(9x^2 + 20x^3)$

3) a)  $y' = 2x + 3\sqrt{x} + 1$     b)  $y' = 2(\sqrt{x} + 0,8x^3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2,4x^2\right)$     c)  $y' = 5\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right)^4\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1\right)$

4) a)  $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{x}}$     b)  $y' = \frac{(3+2x)}{2\sqrt{3x+x^2}}$     c)  $y' = \frac{(3+2x+1/x^2)}{2\sqrt{3x+x^2-1/x}+5}$

5) a)  $y' = \frac{(1+1/2\sqrt{x})}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$     b)  $y' = \frac{1}{4x^{3/4}}$     c)  $y' = \frac{3x^2+1/(2x\sqrt{x})}{2\sqrt{x^3-1/\sqrt{x}}}$