Föreläsning 6: Spelteori II

Litteratur:
Resnik, Choices, kap. 5

1# Viktiga begrepp

Först lite allmänt om spelteori: Spelteorin har främst utvecklats inom matematiken och nationalekonomin, och är fortfarande en viktig del av t.ex. mikroteori och industriell organisation (där den används för att teoretiskt härleda jämviktspriser och jämviktskvantiteter på marknader för olika varor och tjänster), men även psykologer, statsvetare och biologer har uppmärksammat området och använt spelteorin för att förklara företeelser inom t.ex. krig och evolution. De namn som främst förknippas med spelteorins ursprungliga formulering på 1950-talet är John von Neumann och Oskar Morgenstern (som även formulerade *Expected Utility Theorem*, från föreläsning 5) samt John Nash (populärt känd bl.a. från filmen *A Beautiful Mind*). På senare tid har även Robert Aumann och Thomas Schelling (Riksbankens ekonomipris 2005) varit uppmärksammade spelteoretiker. För filosofer ligger intresset för spelteori främst i områdets betydelse för rationalitetsbegreppet (Derek Parfit och Amartya Sen) och etik (Peter Singer) samt politisk filosofi (Den klassiska referensen är här Thomas Hobbes statslära, som ofta påstås ha föregått spelteorin med 300 år); i synnerhet fångarnas dilemma och kooperationsproblematik har fångat filosofers intresse, men det bör naturligtvis påpekas att spelteorin är betydligt bredare än så.

Jämvikt. ”Ingen spelare kan få det bättre genom att ensidigt byta strategi.” Vad menas? Om spelet är i jämvikt, så finns det ingen alternativ strategi sådan att någon spelare får det bättre genom att byta strategi *samtidigt som de övriga spelarnas strategier hålls konstanta* (i fallet med två spelare: *samtidigt som den andre spelarens strategi hålls konstant*). Spelet är i jämvikt om detta gäller för *varje* spelare (i fallet med två spelare: *båda* spelare).

Exempel med två spelare: Antag att radspelaren kan välja mellan strategierna R = $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ och att kolumspelaren kan välja mellan strategierna C = $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. Låt $u_R(R_i, C_j)$ och $u_C(R_i, C_j)$ beteckna den nytta som rad- respektive kolumnspelaren erhåller när radspelaren spelar R_i och kolumnspelaren spelar C_j. Spelet befinner sig i jämvikt i punkten (R_i, C_j) om och endast om (a) det inte finns någon strategi C^* i mängden C sådan att $u_C(R_i, C_j) < u_C(R_i, C^*)$ *och* (b) det inte finns någon strategi R^* i mängden R sådan att $u_R(R_i, C_j) < u_R(R^*, C_j)$.

Paretooptimalitet. Ett utfall *X* är paretooptimalt om och endast om det inte finns något annat möjligt utfall där följande gäller: varje spelare får det minst lika bra som hon skulle få i *X* och där någon får det bättre än vad hon skulle få i *X*. Observera att paretooptimalitet inte behöver betyda jämvikt; detta är den viktigaste egenskapen i fångarnas dilemma.

2# två personer, två strategier, nollsummespel

I vissa fall saknas jämvikt i rena strategier. Men exemplet ovan kan göras om på ett sätt som fångar jämviktsbegreppet. Byt ut mängderna R och C mot variablerna p_1 respektive p_2, som var och en antar ett värde mellan noll och ett. Detta tolkas som sannolikheten för att radspelaren respektive kolumnspelaren ska spela den första (rena) strategin. Istället för faktisk nytta utgår vi nu från förväntad nytta; spelet är i jämvikt när sannolikheterna (p_1, p_2) väljs om och endast om (a) det inte finns någon sannolikhet p^* mellan noll och ett sådan att $E[u_C(p_1, p_2)] < E[u_C(p_1, p^*)]$ *och* (b) det inte finns någon sannolikhet p^* mellan noll och ett sådan att $E[u_R(p_1, p_2)] < E[u_R(p^*, p_2)]$. Med andra ord innebär jämvikt att vardera spelaren väljer den sannolikhet som maximerar förväntad nytta, under antagandet att motspelarens sannolikhetsval hålls konstant.

Ett konkret exempel är spelet ”sten, sax, påse”; spelet är i jämvikt om vardera spelaren spelar sten, sax eller påse med sannolikheten 1/3 – dvs. i genomsnitt var tredje gång. (Spelet befinner sig *inte* i jämvikt t.ex. om båda spelarna hela tiden – dvs. med sannolikheten 1 – väljer att spela ”sten”, ty i så fall kan endera spelaren få det bättre genom att spela ”påse” vilket i sin tur leder till att motspelaren bör tänka om sin strategi… Spelet befinner sig heller inte i jämvikt ifall båda spelaren spelar ”sax” och ”påse” med sannolikheten 1/2 vardera, och aldrig spelar ”sten”, ty då kan endera spelaren få det bättre genom att spela ”sten” med sannolikheten 1/2 och ”sax” med sannolikheten 1/2.)

Termen ”blandstrategier” kan tolkas så att ”ibland väljer man den ena (rena) strategin och ibland den andra”. Man beslutar sig för en *sannolikhet*, snarare än en ren strategi.

3# Egenskaper för jämvikt i blandstrategier
Hur hittar man jämvikt i blandstrategier i fallet 2 personer, 2 strategier, 0-summespel?

En viktig egenskap, som Resnik bygger på, är att jämvikt för blandstrategier inträffar då följande gäller för vardera spelaren: *Oavsett vad motspelaren gör, blir din förväntade nytta densamma*.

Ett tvåpersoners-tvåstrategiers-nollsummespel har följande form (Bokstäverna ABCD betecknar radspelarens nytta och P_1 och P_2 är sannolikheten för att rad- respektive kolumnspelaren ska välja den första strategin):

	P_2	$1–P_2$
P_1	A	B
$1–P_1$	C	D

Förväntad nytta för radspelaren =
$= A*P_1*P_2+B*P_1*(1–P_2)+C*(1–P_1)*P_2+D*(1–P_1)*(1–P_2)$.
Förväntad nytta för kolumnspelaren = (radspelarens nytta multiplicerat med –1) =
$= –A*P_1*P_2–B*P_1*(1–P_2)–C*(1–P_1)*P_2–D*(1–P_1)*(1–P_2)$.

Betrakta nedanstående nollsummespel (Siffrorna anger nyttan för radspelaren; kolumnspelarens nytta är lika med radspelarens nytta multiplicerat med minus ett):

	P_2	$1–P_2$
P_1	2	–1
$1–P_1$	–2	3

RADSPELARENS BESLUT: Antag att P_1 = 5/8, vilket innebär att $1–P_1$ = 3/5. Då blir radspelarens förväntade nytta lika med $2*(5/8)*P_2–1*(5/8)*(1–P_2)–2*(3/8)*P_2+3*(3/8)*(1–P_2) = P_2*(10/8–6/8–5/8–9/8)–5/8+9/8 = 4/8 = 1/2$. Notera att detta är oberoende av P_2.
KOLUMNSPELARENS BESLUT: Antag att P_2 = 1/2, vilket innebär att $1–P_2$ = 1/2. Kolumnspelarens förväntade nytta blir lika med $–2*P_1*(1/2)+1*P_1*(1/2)+2*(1–$

P_1)*(1/2)–3*(1–P_1)*(1/2) = P_1*(–2/2+1/2–2/2+3/2)+2/2–3/2 = –1/2. Notera att detta är oberoende av P_1.

4# Egenskaper för jämvikt i blandstrategier
Utifrån villkoret att förväntad nytta för vardera spelaren ska vara oberoende av motspelarens val av sannolikhet, härleder Resnik en ekvation för jämvikt i blandstrategier för tvåpersoners-tvåstrategiers-nollsummespel:

P_1 = (D–C)/((A+D)–(B+C))

P_2 = (D–B)/((A+D)–(B+C))

där A, B, C och D samt P_1 och P_2 är enligt ovan.

5# Gauthiers samarbetsproblem
Resnik diskuterar Gauthiers analys av samarbetsproblemet. Scenariot är individer som går omkring och möter andra individer som antingen samarbetar eller utnyttjar varandra. Ett antal parametrar antas påverka huruvida det är lönsamt att samarbeta:

- Ju *större* sannolikhet att möta någon som vill samarbeta…
- Ju *lägre* sannolikhet att lyckas utnyttja någon…
- Ju *större* sannolikhet att lyckas samarbeta med någon…
- Ju *lägre* nyttan av att inte samarbeta…
- Ju *större* nyttan av att samarbeta…

… desto mer lönsamt är det att inbjuda till samarbete.

6# Gauthiers samarbetsproblem
Resnik illustrerar samarbetsproblemet med ett beslutsträd på sidan 154.

7# Samarbete i koordinationsspel
Betrakta nedanstående spel:

(1, 2)	(0, 0)
(0, 0)	(2, 1)

De båda okoordinerade utfallen (dvs. utfallet där radspelaren spelar den första strategin medan kolumnspelaren spelar den andra strategin och utfallet där radspelaren spelar den andra strategin medan kolumnspelaren spelar den första strategin) är paretodominerade av vardera av de båda koordinerade utfallen (dvs. utfallet där båda spelarna spelar den första strategin och utfallet där båda spelarna spelar den andra strategin). Båda spelarna har därför intresse av att strategierna koordineras.

Men *hur* koordineringen ska ske är något som de har motstridiga intressen om; radspelaren föredrar utfallet (2, 1) nere i högra hörnet framför utfallet (1, 2) uppe i vänstra hörnet, och kolumnspelaren föredrar motsatsen.

8# Samarbete i koordinationsspel
Antag att spelarna kommer överens om att koordinera sina strategier. De förhandlar sig fram till en sannolikhet p sådan att de (samtidigt) spelar den första strategin med sannolikheten p och den andra strategin med sannolikheten 1–p. Radspelaren vill naturligtvis helst att p = 0, medan kolumnspelaren helst vill att p = 1.

9#
Detta kan illustreras i ett diagram. Linjen ger förväntad nytta för vardera spelaren; om p = 0 så får radspelaren E[u_R] = 2 och kolumnspelaren får E[u_C] = 1 (dvs. det utfall

som är längst ner till vänster i spelmatrisen på bild 7) och om $p = 1$ så får radspelaren $E[u_R] = 1$ och kolumnspelaren får $E[u_C] = 2$ (dvs. det utfall som är längst upp till höger i spelmatrisen på bild 7). Om $0 < p < 1$ så blir förväntad nytta mellan 1 och 2 för vardera spelaren; ju lägre värde på p desto bättre för radspelaren och vice versa.

Vi kan därmed uttrycka den förväntade nyttan för vardera spelaren som en funktion av p: $E[u_R] = 2–p$ och $E[u_C] = 1+p$.

10# Nashpunkt
Låt $f = (f_1, \ldots, f_n)$ vara den nytta som tillfaller spelarna ifall förhandlingarna misslyckas, en *failure point*. I ett förhandlingsspel med två spelare är *Nashpunkten* den paretooptimala punkt (u_1, u_2) som maximerar $(u_1–f_1)*(u_2–f_2)$.

I vårt exempel: $f = (f_1, f_2) = (0, 0)$. *Nashpunkten* är den paretooptimala punkt (u_1, u_2) som maximerar $(E[u_R]–f_1)*(E[u_C]–f_2) = E[u_R]*E[u_C]$, givet att $E[u_R] = 2–p$ och $E[u_C] = 1+p$. Vi ska alltså maximera $(2–p)*(1+p) = 2+p–p^2$, som har sitt största värde när $p = 3/2$.

11#
I diagrammet motsvaras detta av att maximera ytan av en fyrhörning med vänstra sidan och nedersta sidan längs koordinataxlarna och översta högra hörnet på den paretooptimala linjen. Den största arean uppnås av en kvadrat.

12# Varför ska man välja Nashpunkten vid förhandlingar?
Nashpunkten uppfyller fyra villkor:
(1) Den är unik och paretooptimal.
(2) Den påverkas ej av positiva linjära transformationer av nyttofunktionerna.
(3) Vid symmetri gäller att $u_1 = u_2$.
(4) Den påverkas ej av att övriga paretooptimala punkter i spelet tas bort.

13# Kontrovers kring villkor (4)
Det fjärde villkoret är lite tveksamt; det tycks ju faktiskt som att man kan förändra förhandlingssituationen genom att ta bort paretooptimala punkter.

14# Samarbete i spel med $n > 2$ spelare
Spel med fler än två spelare är mer komplicerade än de spel vi har behandlat hittills. Resnik nöjer sig med att ge ett specifikt exempel på sådan problematik.

Tre personer – Hank, Ike och Ned – kan bilda ”koalitioner” bestående av antingen en, två eller tre personer. Det finns sju möjliga sådana koalitioner: tre koalitioner som består av en ensam individ, tre koalitioner som består av två individer och en storkoalition som består av alla tre individer. Tre scenarier kan utmålas:
(1) Var och en står ensam. I så fall får Hank 10.000, Ike 7.500 och Ned 5.000.
(2) Två personer går ihop och en lämnas utanför. Tre möjligheter finns:
    A. Ned lämnas utanför; Ned får 5.000, medan Hank och Ike får 33.875 att fördela mellan sig
    B. Ike lämnas utanför; Ike får 7.500, medan Hank och Ned får 30.000 att fördela mellan sig.
    C. Hank lämnas utanför; Hank får 10.000, medan Ike och Ned får 25.000 att fördela mellan sig.

(3) En storkoalition bildas. I så fall får de tre tillsammans 40.125 att fördela mellan sig.

15# Kriterier för fördelning

Superadditivitet innebär att alla kan tjäna på att gå med i koalitionerna.
Individuell rationalitet innebär att ingen går med i någon koalition ifall han inte får det minst lika bra som han skulle ha fått på egen hand.

16# Tveksamt kriterium: paretooptimalitet

Storkoalitionen ger störst total vinst:	{H, I, N}	⇒ 40.125
	{H}, {I, N}	⇒ 10.000+25.000 = 35.000
	{I}, {H, N}	⇒ 7.500+30.000 = 37.500
	{N}, {H, I}	⇒ 5.000+33.875 = 38.875
	{H}, {I}, {N}	⇒ 10.000+7.500+5.000 = 22.500

Därav följer att alla kan tjäna på storkoalitionen.

Men storkoalitionen är *instabil*:

- Om Hank får mer än 15.125 så får Ike och Ned tillsammans *mindre* än 40.125–15.125 = 35.000; Ike och Ned skulle således tjäna på att hoppa av och bilda en fristående koalition.
- Om Ike får mer än 10.125 så får Hank och Ned tillsammans *mindre* än 40.125–10.125 = 37.500; Hank och Ned skulle således tjäna på att hoppa av och bilda en fristående koalition.
- Om Ned får mer än 6.250 så får Hank och Ike tillsammans *mindre* än 40.125–6.250 = 38.875; Hank och Ike skulle således tjäna på att hoppa av och bilda en fristående koalition.

Något av de ovanstående måste inträffa, ty om Hank inte får mer än 15.125 och om Ike inte får mer än 10.125 och om Ned inte får mer än 6.250 så har man bara 15.125+10.125+6.250 = 31.500 att fördela – men i storkoalitionen måste man fördela 40.125.