

Föreläsning 4: Beslut och nytta, paradoxer

Litteratur:

Hansson, Introduction to Decision Theory, kap 5-7 och 11

Resnik, Choices, kap 4

1# S:t Petersburg-paradoxen (Daniel Bernoulli, 1713; Nicolas Bernoulli, 1738)

Regler: Släng en slant tills "klave" dyker upp. Om spelet slutar vid första singlingen får du två kronor; om spelet slutar vid andra singlingen får du fyra kronor o.s.v.

Din förväntade vinst blir lika med $(1/2)*2+(1/2)^2*4+(1/2)^3*8+(1/2)^4*16+\dots = 1+1+1+1+\dots \rightarrow \infty$. Din förväntade vinst är alltså oändligt stor!

MEN: Skulle du vara beredd att betala en miljon kronor för att spela spelet? Ett tusen kronor? Nej, inte ens tio kronor.

Bernoullis lösning: *Minskande marginalnytta*.

Nytan av pengar kan beskrivas som en konkav funktion.

(Bernoulli använde log-funktionen)

Beräkna förväntad *nytta*, inte förväntad vinst!

Förväntad nytta blir lika med

$$\begin{aligned} & (1/2) * \log(2) + (1/2)^2 * \log(4) + (1/2)^3 * \log(8) + (1/2)^4 * \log(16) + \dots = \\ & (1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + 4/2^4 + \dots) * \log(2) = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} \right) * \log(2) = 2 * \log(2) \approx 0,6. \end{aligned}$$

Alltså: Förväntad nytta är ändlig, även om förväntad vinst är oändlig!

Anmärkning: Paradoxen kvarstår om man låter utbetalningarna bli enligt serien 10, 100, 10.000, 100.000.000, etc. (Resnik, sid. 109)

2# Nyttoteori

"expected utility theory"

Formulerad av John von Neumann (matematiker) och Oskar Morgenstern (nationalekonom) i boken *Theory of games and economic behaviour*, 1944.
Ett viktigt problem: Hur jämföra alternativ som innebär olika risknivåer?

Exempel: Du har 1.000 kronor och erbjuds att investera dem i ett lotteri där du får 10.000 kr med 10 % sannolikhet och 10 kronor med 90 % sannolikhet.

I Resniks bok är beteckningar på formen $L(a; x; y)$ vanliga, vilket läses ”ett lotteri där du vinner x med sannolikheten a och y med sannolikheten $1-a$ ”.
(x och y betecknar vanligen, men inte nödvändigtvis, penningenheter.)
Vårt exempel kan alltså betecknas $L(0,1; 10.000; 10)$, dvs. ett lotteri där sannolikheten är 0,1 att du får 10.000 och 0,9 (=1-0,1) att du får 10.

Är det bra att gå med på lotteriet?

A_1 : Om du behåller dina pengar är din förväntade förmögenhet lika med 1.000 kronor (detsamma som du hade från början).

A_2 : Om du går med på lotteriet är din förväntade förmögenhet lika med $10.000 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,9 = 1.009$ kronor.

Om du väljer A_2 får du en (lite) högre förväntad förmögenhet än om du väljer A_1 .
Men, som S:t Petersburg-paradoxen visar, förväntad vinst säger inte allt om vad du bör välja.

Om vi använder oss av Bernoullis log-funktion för att beskriva din nytta så får vi

$$E[U(A_1)] = \log(1.000) = 3$$

$$E[U(A_2)] = 0,1 \cdot \log(10.000) + 0,9 \cdot \log(10) = 0,1 \cdot 4 + 0,9 \cdot 1 = 1,3.$$

Enligt detta sätt att räkna är det klart bättre att låta bli lotteriet!

Alltså:

Antag att en viss nyttofunktion beskriver beslutsfattarens preferenser.

Välj mellan olika, mer eller mindre, riskfyllda alternativ på ett sätt som *maximerar den förväntade nyttan!*

3# Intervallskalor

Ibland är det meningsfullt att beskriva hur stora *skillnaderna* är mellan de objekt man jämför:

”Kebnekaise är lite högre än Åreskutan. Mont Blanc är betydligt högre än Kebnekaise. Mount Everest är mycket högre än Mont Blanc.”

Notera användandet av orden ”lite”, ”betydligt” och ”mycket”!

Kontrastera med följande utsaga:

”Kebnekaise är högre än Åreskutan. Mont Blanc är högre än Kebnekaise. Mount Everest är högre än Mont Blanc.”

I det ena fallet skulle följande skalsteg vara meningsfulla:

1.420 – 2.103 – 4.807 – 8.848

I det andra fallet räcker det med följande skala för att förmedla budskapet:

1 – 2 – 3 – 4 (eller: lågt – högt – högre – högst)

Intervallskala = en skala i vilken avstånden mellan olika skalvärden är lika stora genom hela skalan, men där en absolut nollpunkt saknas.

Varför intervallskalor i beslutsteorin?

För att veta huruvida en beslutsfattare är villig att ta en risk räcker det inte med att veta om han föredrar ett utfall framför ett annat; vi behöver även veta om hon föredrar det *tillräckligt mycket* för att vara villig att ta risken.

Vi har tidigare behandlat *ordinalskalor*, nyttofunktioner där följande gäller:

- 1) xPy omm $u(x) > u(y)$.
- 2) xIy omm $u(x) = u(y)$.

Dessa villkor gäller även för intervallskalor, men intervallskalor kräver att ytterligare ett villkor är uppfyllt:

- 3) Preferensintervallet mellan x och y är minst lika stort som intervallet mellan z och w omm $|u(x)-u(y)| \geq |u(z)-u(w)|$.

(Alla intervallskalor är ordinalskalor, men alla ordinalskalor är inte intervallskalor; intervallskalor innehåller *mer information* än ordinalskalor.)

4# Exempel

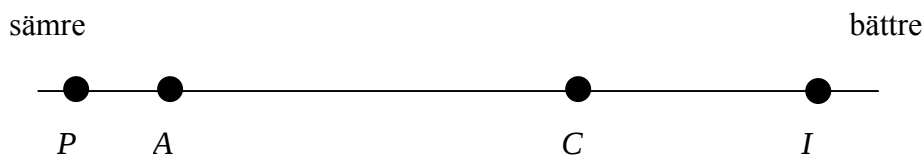
Vad menas med ett ”preferensintervall”?

Betänk följande utsaga:

”Jag föredrar glass framför cola. Cola är betydligt bättre än äpplen. Jag föredrar äpplen framför popcorn, men de är nästan likvärdiga.”

Vi kan tolka detta som att preferensintervallet mellan cola (C) och äpplen (A) är störst, eftersom det ena är ”betydligt bättre” än det andra. Minst är preferensintervallet mellan äpplen och popcorn (P), som är ”nästan likvärdiga”. Preferensintervallet mellan glass (I) och cola tycks vara mindre än preferensintervallet mellan cola och äpplen, men större än preferensintervallet mellan äpplen och popcorn.

Illustration (Resnik, sid. 82):



Ett sätt att beskriva ovanstående situation är genom följande nyttofunktion:

$$u(P) = 1$$

$$u(A) = 2$$

$$u(C) = 7$$

$$u(I) = 10$$

Som enkelt kan verifieras uppfylls villkoren 1-3 av denna funktion.

5# Transformationer

Ovanstående nyttofunktion kan genomgå en *positiv linjär transformation*, dvs. en transformation av typen $v=a+bu$, utan att något av villkoren 1-3 bryts.

Beakta t.ex. följande funktion, där $v=5+10u$:

$$v(P) = 15$$

$$v(A) = 25$$

$$v(C) = 75$$

$$v(I) = 105$$

Denna nyttofunktion innehåller samma information som den första nyttofunktionen.

Däremot finns det många andra slags transformationer som man *inte* får göra!

Beakta t.ex. följande funktion, där $w=u^2$:

$$w(P) = 1$$

$$w(A) = 4$$

$$w(C) = 49$$

$$w(I) = 100$$

Denna funktion uppfyller visserligen villkoren 1 och 2; om ett alternativ är bättre än ett annat så har det ett högre siffervärde:

I är bättre än C , C är bättre än A och A är bättre än P .

Och mycket riktigt gäller att $w(I) > w(C) > w(A) > w(P)$.

Men som synes bryter funktionen mot villkor 3:

Preferensintervallet mellan C och A är större än preferensintervallet mellan I och C .

MEN: $|w(C) - w(A)| < |w(I) - w(C)|$.

Alltså är $w = u^2$ INTE en tillåten transformation av intervallskalor!

6# Mer om nyttoteorin

von Neumann och Morgenstern föreslår att man använder sig av nyttofunktioner med följande egenskaper:

- 1) xPy om $u(x) > u(y)$
- 2) xIy om $u(x) = u(y)$
- 3) $u[L(a; x; y)] = au(x) + (1-a)u(y)$
- 4) Om en annan funktion u' tillfredsställer villkoren 1-3 så är u' en positiv linjär transformation av u .

Villkor 1-2 känner vi igen sedan tidigare.

Villkor 3 överbryggat gapet mellan riskfyllda och säkra alternativ.

Villkor 4 innebär att u är en intervallskala för beslutsfattarens preferenser.

Om en nyttofunktion uppfyller villkor 1-4 så säger man att den har *the expected utility property*.

7# Nyttoteorins axiom

Rationalitetsvillkor inom nyttoteorin (a, b, c och d är sannolikheter; x, y och z är utfall eller lotterier):

- **The ordering condition:** Alla utfall och alla lotterier som kan bildas genom att kombinera dem ska kunna rankas i en preferensordning. Detta innebär att asymmetri, sambundenhet, fullständighet och transitivitet (se sid. 23) gäller.

- **The continuity condition:** Om xPy och yPz så finns det något reellt tal a sådant att $0 \leq a \leq 1$ och $yIL(a; x; z)$.
- **The better prize condition:** xPy omm $L(a; z; x)PL(a; z; y)$ och $L(a; x; z)PL(a; y; z)$.
- **The better-chances condition:** Om xPy så är $a > b$ ekvivalent med att $L(a; x; y)PL(b; x; y)$.
- **The reduction of compound lotteries condition:** Om $d = ab + (1-a)c$ så gäller att $L(a; L(b; x; y); L(c; x; y))IL(d; x; y)$.

Om dessa rationalitetsvillkor är uppfyllda så går det att bevisa att det finns en nyttofunktion som uppfyller villkoren 1-4.

Detta resultat, dvs. att villkoren 1-4 följer av ovanstående rationalitetsvillkor, kallas för *the expected utility theorem*.

8# Allais paradox

Maurice Allais (f. 1911), fransk nationalekonom och nobelpristagare (1988), började sin karriär som gruvingenjör.

Allais paradox utgör ett problem för nyttoteorin.

Paradoxen utgår från två valsituationer:

- A) alternativ 1: Du får € 1.000.000 med sannolikheten 100 %.
alternativ 2: Du får € 5.000.000 med sannolikheten 10 %, €1.000.000 med sannolikheten 89 % eller € 0 med sannolikheten 1 %.
- B) alternativ 1: Du får € 5.000.000 med sannolikheten 10 % och € 0 med sannolikheten 90 %.
alternativ 2: Du får € 1.000.000 med sannolikheten 11 % och € 0 med sannolikheten 89 %.

Många människor föredrar det första alternativet framför det andra alternativet i båda situationerna.

Spontant tycker vi inte att detta är särskilt irrationellt; det vore konstigt att säga att sådana preferenser är felaktiga eller förbjudna.

En möjlig informell förklaring är t.ex. att man lockas av det säkra alternativet i situation A, samtidigt som man gärna vill åt jackpotten i situation B.

MEN: Det finns ingen nyttofunktion som beskriver dessa preferenser!

I situation A gäller:

$$u(1.000.000) > 0,1 * u(5.000.000) + 0,89 * u(1.000.000) + 0,01 * u(0)$$

$$\Rightarrow 0,11 * u(1.000.000) > 0,1 * u(5.000.000) + 0,01 * u(0)$$

Men i situation B gäller:

$$0,1 * u(5.000.000) + 0,9 * u(0) > 0,11 * u(1.000.000) + 89 * u(0)$$

$$\Rightarrow 0,11 * u(1.000.000) < 0,1 * u(5.000.000) + 0,01 * u(0)$$

Paradoxen har diskuterats mycket.

En del beslutsteoretiker anser att Allais paradox utgör ett argument mot nyttoteorin; varför ska vi förlita oss på en beslutsregel när fullt rationella beslutsfattare kan bryta mot den?

Andra beslutsteoretiker menar att det faktiskt vore irrationellt att välja första alternativet i båda fallen; en av dem är statistikern Leonard Savage.

Savage jämför Allais valsituationer med ett lotteri med 100 lotter, var och en av dem numrerad:

		LOTT NUMMER		
		1	2-11	12-100
SITUATION A	alternativ 1	1 M	1 M	1 M
	alternativ 2	0	5 M	1 M
SITUATION B	alternativ 1	0	5 M	0
	alternativ 2	1 M	1 M	0

I båda situationerna kan man bortse från lott nummer 12-100, eftersom de ger samma vinst vilket alternativ man än väljer.

Alternativ 1 i situation A är i så fall identiskt med alternativ 2 i situation B, och alternativ 2 i situation A är identiskt med alternativ 1 i situation B.

Är detta ett skäl att tro att Allais beslutsfattare är irrationella?

8# Ellsbergs paradox

Daniel Ellsberg (f. 1931), amerikansk nationalekonom och kärnvapenmotståndare.

Ellsbergs paradox utgör ett problem bl.a. för den subjektiva tolkningen av sannolikhetsbegreppet i Bayesiansk beslutsteori.

En urna innehåller 90 kulor.

30 av kulorna är gula.

Övriga kulor är antingen röda eller blå (Vi vet ej exakt i vilken proportion).

Precis som i Allais paradox står du inför två valsituationer med vardera två alternativ.

Vinst enligt följande tabell:

		Gul 30	Röd 60	Blå
SITUATION A	alternativ 1	100	0	0
	alternativ 2	0	100	0
SITUATION B	alternativ 1	0	100	100
	alternativ 2	100	0	100

Många väljer alternativ 1 framför alternativ 2 i situation A, samtidigt som de föredrar alternativ 1 framför alternativ 2 i situation B.

Är detta irrationellt?

Det finns ingen Bayesiansk förväntning som motiverar de val som Ellsberg beskriver!

Låt p stå för (den subjektiva) sannolikheten att kulan är röd. I situation A gäller:

$$100 \cdot 0,3 > 100 \cdot p$$

$$\Rightarrow p < 0,3$$

Men i situation B gäller:

$$100 \cdot p + 100 \cdot (1 - 0,3 - p) > 100 \cdot 0,3 + 100 \cdot (1 - 0,3 - p)$$

$$\Rightarrow p > 0,3$$

Se även: Resnik, sid. 109

9# Newcombs paradox

Uppkallad efter fysikern William Newcomb.

Även kallad "The Predictor Paradox"

Omskriven av Robert Nozick (i övrigt mest känd som politisk filosof)

Situation:

	Blå box tom	Inte tom
Ta blå boxen	$\text{€} = 0; p = 0,1$	$\text{€} = 1\text{M}; p = 0,9$
Ta båda boxarna	$\text{€} = 1.000; p = 0,9$	$\text{€} = 1\text{M}+1000; p = 0,1$

Övriga exempel: * Calvinistens frestelse

* Rökarens dröm

Ett seriöst problem?