

Föreläsning 3: Osäkerhet och sannolikhet

Litteratur:

Hansson, Introduction to Decision Theory, kap 8 (Även kap 6 är relevant)

Resnik, Choices, kap 3

*Galavotti, Philosophical Introduction to Probability, kap 1

1# Olika typer av beslutssituationer: överblick och distinktioner

Resnik skiljer mellan beslut under *certainty*, *ignorance*, and *risk* (sid. 13).

Hansson lägger explicit till *uncertainty*.

Vid individuella beslut kan vi alltså skilja mellan fyra olika typer av situationer:

- 1) *Okunskap* (ignorance): Vi vet inte vilket utfall en viss handling får.
Sannolikheter för olika utfall är okända eller meningslösa.
Presenterades i förra föreläsningen.
Exempel: Ska jag satsa på en forskarkarriär eller ska jag jobba inom industrin?
- 2) *Risk*: Vi vet inte vilket utfall en viss handling får ...
... men vi vet sannolikheterna för de olika utfallen.
Kommer huvudsakligen att presenteras vid nästa föreläsning.
Exempel: Ska jag satsa pengar på att tärningen kommer att visa en sexa?
- 3) **Osäkerhet** (uncertainty): Vi vet inte vilket utfall en viss handling får.
Sannolikheter för olika utfall är okända, men det går att göra *kvalificerade gissningar*.
Kommer att presenteras i denna föreläsning!
Exempel: Ska jag ta med paraplyet idag? (Det är osäkert om det kommer att regna.)
- 4) *Säkerhet* (certainty): Vi vet vilket utfall en viss handling får.
Vid jämförelse låter detta kanske som ett enklare område, men det kräver ofta ganska avancerade metoder (Simplex, linjärprogrammering, etc.).
Kommer inte att behandlas i denna kurs.
Exempel: Hur ska en åkerifirma planera rutter för lastbilar med leveranser till ett antal olika städer?

2# Sannolikhet: olika tolkningar

Hur ska sannolikhetsbegreppet tolkas? Överblick av de distinktioner som kan göras:

- **objektiv sannolikhet:** sannolikhet är något som existerar helt oberoende av människor.
 - *Klassisk (logisk) tolkning:* Sannolikhet är detsamma som *benägenhet*.
 - *Frekvenstolkningen (empirisk tolkning):* Sannolikhet är detsamma som den *relativa frekvensen* som uppstår genom upprepade tester.
- **subjektiv sannolikhet:** sannolikhet är detsamma som *individuella förväntningar*.

3# Objektiv sannolikhet: den klassiska tolkningen

Enligt den klassiska tolkningen beräknas sannolikhet (benägenhet) genom att utgå från *händelser* och *utfallsrum*. Den grundar sig på *Laplacekriteriet*, som gicks igenom förra föreläsningen.

Exempel: Sannolikheten är 50 % att du ska få en krona (*Tails*) och en klave (*Heads*) om du kastar ett mynt två gånger. Utfallsrum = {HH, HT, TH, TT}. Eftersom det finns två utfall {HT, TH} som motsvarar händelsen ”du får en krona och en klave” och eftersom utfallsrymden har fyra objekt (händelser), är sannolikheten $2/4 = 50\%$.

Två problem:

- 1) Varför ska vi betrakta {HH, HT, TH, TT} som utfallsrum och inte {HH, HT, TT}? Om vi beaktar den sistnämnda mängden får vi istället sannolikheten $1/3 = 33\%$ för att du ska få en krona och en klave. Vi vet naturligtvis att det vore fel att tänka så, men det vet vi av empiriska skäl – inte av rent logiska skäl! Ett liknande exempel: Om vi kastar två tärningar vet vi att sannolikheten för att du ska få två sexor är lika med $1/36$, men inte lika med $1/11$. Men vad har vi för anledning, förutom våra erfarenheter att ha kastat tärning flera hundra gånger, att betrakta {2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ..., 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12} som en rimligare utfallsmängd än {2, 3, 4, 5, ..., 9, 10, 11, 12}? Varför ska vi beakta 36 olika utfall istället för 11 olika utfall?

- 2) Varför ska vi betrakta alla händelser i utfallsrummet som lika sannolika?

Varför ska vi anta "the principle of insufficient reason"?

4# Objektiv sannolikhet: frekvenstolkningen

I motsats till den logiska tolkningen kan frekvenstolkningen testas empiriskt. Vi kan därmed få anledning att hysa större tilltro till en sannolikhetsbedömning än till andra – t.ex. att hysa större tilltro till bedömningen att sannolikheten är $1/36$ att få två sexor med två tärningar än till bedömningen att sannolikheten är $1/11$.

Om vi undrar hur stor en sannolikhet är kan vi helt enkelt göra ett antal upprepade försök. Om det t.ex. visar sig att vi får två sexor i ungefär 100 fall av 3.600 har vi goda skäl att tro att sannolikheten är $1/36$ att vi ska få två sexor i ett slag med två tärningar.

Två problem:

- 1) Det finns ingen garanti för att den relativa frekvensen motsvarar den "verkliga" sannolikheten. Om vi får dubbelsexa i 120 fall av 3.600 ger det oss då skäl att tro att sannolikheten är $1/30$? Det är inte heller omöjligt, om än extremt osannolikt, att vi inte får dubbelsexa någon enda gång under de 3.600 försöken.
- 2) Frekvenstolkningen förefaller vara orimlig vid händelser som bara förekommer en enda gång, men vi kan ibland ändå säga att det finns en viss "benägenhet" för att händelsen ska ske. Exempel: Sannolikheten är 50 % att jag kommer att klara tentan.

5# Subjektiv sannolikhet: individuella förväntningar

I början av föreläsningen definierade vi osäkerhet.

Vad innebär då en "kvalificerad gissning" av sannolikheten för en viss händelse?

En trosföreställning (*belief*) att sannolikheten faktiskt är p att h ska inträffa.

⇒ Sannolikhet är ett **subjektivt** begrepp, handlar om *förväntningar*.

Förväntningar för en och samma händelse kan variera från person till person.

Exempel: Du är beredd att slå vad om att Sverige tar medalj i fotbolls-VM och jag håller emot.

6# Bayesiansk beslutsteori

Ett område starkt förknippat med subjektiv sannolikhet.

Uppkallad efter den engelske prästen Thomas Bayes (1702-1761).

Vad kännetecknar en Bayesiansk beslutsfattare?

1. En komplett uppsättning av förväntningar/sannolikhetsuppskattningar (*a complete set of probabilistic beliefs*)
2. Uppdatering av förväntningar allteftersom nya empiriska observationer tillkommer (*change of beliefs when exposed to new evidence*)
3. Konsekventa förväntningar (*coherent set of probabilistic beliefs*)
4. Maximering av förväntad nytta (*maximization of expected utility*)

Vi ska diskutera de första tre egenskaperna idag. Den fjärde egenskapen lämnar vi till nästa föreläsning.

7# En komplett uppsättning av förväntningar

Bayesianen har *degrees of belief about everything*; varje påstående tilldelas ett sannolikhetsvärde.

Distinktionerna mellan risk, osäkerhet och okunskap är meningslösa; alla beslutssituationer är att betrakta som beslut under risk!

8# Uppdatering av förväntningar

Antag att en Bayesiansk beslutsfattare tror att sannolikheten för att händelsen p ska inträffa är $P(p)$.

Om en händelse q inträffar kommer Bayesianen ändra sig till att tro att sannolikheten för att p ska inträffa är $P(p|q)$, dvs. ” p givet q ”, där

$$P(p | q) = \frac{P(p) \times P(q | p)}{[P(p) \times P(q | p)] + [P(\neg p) \times P(q | \neg p)]}.$$

(Detta är ett specialfall som följer från Bayes sats, som ni kanske känner igen från grundkursen i matematisk statistik.)

Exempel (Resnik, sid. 55): Jag går omkring i ett land där en del av mynten är viktade, så att de visar "krona" 75 % av alla gånger som de singlar. Jag hittar ett mynt och singlar det tio gånger; det visar "krona" varje gång. Vi är alltså intresserade av de båda påståendena

p = "myntet är viktat" och

q = "myntet visar 'krona' tio gånger".

Vi vet att även att

$$P(q|p) = (3/4)^{10} \text{ och}$$

$$P(q|\neg p) = (1/2)^{10}.$$

Jag vet däremot inte hur stor andel av mynten i landet som är viktade, men som den gode Bayesian jag är gör jag en gissning att 1 % av mynten är viktade (dvs. att $P(p) = 0,01$). Mina tio slantsinglingar gör därmed att jag kan uppdatera min sannolikhetsuppskattning att just det här myntet är viktat till

$$P(p | q) = \frac{0,01 \times (3/4)^{10}}{[0,01 \times (3/4)^{10}] + [0,99 \times (1/2)^{10}]} \approx 0,37.$$

Min sannolikhetsuppskattning har alltså uppdaterats från 1 % till 37 %.

Exemplet ovan är i enklaste laget, men principen bör framgå:

Om en Bayesian har kunskap om relaterade (konditionala) sannolikheter, och om hon gör observationer, så kommer hon att uppdatera sina förväntningar.

Mer komplicerade och intressanta problem är möjliga, t.ex. där p = "myntet visar 'krona' åtta gånger av tio", men vi kommer inte att gå igenom dessa i denna kurs.

Eftersom tillskott av information kan få en Bayesian att fatta mer välgrundade beslut. Bayesianer kan vara beredda att betala för sådan information.

Exempel (Resnik sid. 57-58): En investerare har preliminärt beslutat sig för att bli delägare i oljebolaget Daltex, men är osäker på huruvida Daltex kommer att låta börsnotera sig under året. Eftersom investeraren inser att han endast bör bli delägare

om bolaget blir börsnoterat, är hon villig att betala pengar för att få veta säkert. Exakt hur mycket pengar hon är villig att betala beror dock på hur *tillförlitlig* informationen är, och det finns en övre gräns för hur mycket hennes förväntade vinst kan påverkas av informationen.

9# Konsekventa förväntningar

Bayesiansk beslutsteori förutsätter att subjektiva sannolikhetsbedömningar uppfyller vissa logisk-matematiska villkor.

Sannolikhetslärans fyra axiom:

- 1) a. $0 \leq P(p) \leq 1$.
b. $0 \leq P(p | q) \leq 1$.
- 2) Om det är *säkert* att p inträffar så är $P(p) = 1$.
- 3) Om p och q är ömsesidigt uteslutande (dvs. om inte bådadera kan vara sanna samtidigt) så är $P(p \vee q) = P(p) + P(q)$.
- 4) $P(p \& q) = P(p) \times P(q | p)$.

Dessa fyra axiom förefaller intuitivt rimliga. De följer också mycket riktigt av den objektiva tolkningen av sannolikhetsbegreppet, vare sig man använder sig av den klassiska (logiska) tolkningen eller av frekvenstolkningen (den empiriska tolkningen); om $P(p)$ betraktas som logiska eller empiriska konsekvenser av p kan de fyra axiomen visas vara uppfyllda (Resnik visar detta på sidan 61-66, men lämnar några bevis som övningar till läsaren).

Från de fyra axiomen följer ett antal teorem eller "sannolikhetslagar":

- 1) $P(p) + P(\neg p) = 1$.
- 2) Om p och q är ekvivalenta så gäller att $P(p) = P(q)$.
- 3) $P(p \vee q) = P(p) + P(q) - P(p \& q)$.
- 4) Om $P(p) \neq 0$ så gäller att $P(q | p) = P(p \& q) / P(p)$.
- 5) Om q är oberoende av p (dvs. om $P(p) = P(p|q)$) så gäller att $P(p \& q) = P(p) \times P(q)$.
- 6) p är oberoende av q (dvs. $P(p) = P(p|q)$) om och endast om q är oberoende av p , förutsatt att både $P(p)$ och $P(q)$ är skilt från noll.

- 7) Om p och q är ömsesidigt uteslutande och om både $P(p)$ och $P(q)$ är skilt från noll så är p och q inte oberoende av varandra.
- 8) Om $P(q) \neq 0$ så gäller att $P(p | q) = [P(p) \times P(q | p)] / P(q)$.

Om $P(q) \neq 0$ så gäller dessutom ekvationen för uppdatering av förväntningar, som nämndes tidigare ("Bayes teorem").

Bayesiansk beslutsteori förutsätter som sagt att subjektiva förväntningar eller "sannolikhetsbedömningar" uppfyller ovanstående villkor.

Det finns ett pragmatiskt argument för att det vore *irrationellt* att ha förväntningar som strider mot ovanstående villkor; om en beslutsfattare har icke-Bayesianska förväntningar så kan hon, under vissa betingelser, exploateras i en s.k. *Dutch book*. (Jämför med *money pump*-argumentet för att en beslutsfattare bör ha transitiva preferenser!)

En *Dutch book* är en uppsättning vadslagningar som en av parterna alltid förlorar på, oavsett vad som händer.

En *Dutch book* är ett spel av typen jag-vinner-du-förlorar. Ett välbekant exempel: "Om myntet visar 'krona' så vinner jag 100 spänn. Om myntet visar 'klave' så förlorar du 100 spänn."

Ett annat exempel:

- 1) a. Du vinner 80 kronor om Sverige vinner schlager-EM.
b. Du förlorar 20 kronor om Sverige inte vinner schlager-EM.
- 2) a. Du vinner 50 kronor om Sverige vinner ishockey-VM.
b. Du förlorar 50 kronor om Sverige inte vinner ishockey-VM.
- 3) a. Du vinner 60 kronor om Sverige *varken* vinner schlager-EM eller ishockey-VM.
b. Du förlorar 140 kronor om Sverige vinner schlager-EM *eller* Sverige vinner ishockey-VM.

Det vore *inkonsekvent* att anse att alla tre vaden är schyssta (*fair*).

Om dina förväntningar är sådana, att du är villig att acceptera alla tre vaden, kan du bli utsatt för en *Dutch book*.

Antag att ...

Sverige vinner schlager-EM och Sverige vinner ishockey-VM:

$$80+50-140 = -10 \Rightarrow \text{förlust 10 kronor.}$$

Sverige vinner schlager-EM och Sverige vinner inte ishockey-VM:

$$80-50-140 = -110 \Rightarrow \text{förlust 110 kronor.}$$

Sverige vinner inte schlager-EM och Sverige vinner ishockey-VM:

$$-20+50-140 = -110 \Rightarrow \text{förlust 110 kronor.}$$

Sverige vinner inte schlager-EM och Sverige vinner inte ishockey-VM:

$$-20-50+60 = -10 \Rightarrow \text{förlust 10 kronor.}$$

Resnik (sid. 72-74) beskriver hur en *Dutch book* kan skapas i vart och ett av de fall där de Bayesianska axiomen inte är uppfyllda.

Bevisen utgår från vadsbetskvoter (*betting quotients*).

Om din (subjektiva) förväntning att p ska inträffa är lika med $P(p) = a$ och om du strävar efter att maximera din förväntade förmögenhet så innebär det att du är villig att gå med på ett vad där du vinner minst $(1-a)$ kronor om p inträffar och förlorar högst a kronor om p inte inträffar, ty

$$(1-a) \times P(p) - a \times (1-P(p)) = (1-a) \times a - a \times (1-a) = 0.$$

Detta implicerar att du kan utsättas för en *Dutch book*, ifall dina förväntningar inte är konsekventa (dvs. ifall de inte uppfyller de Bayesianska axiomen).

Exempel (sid. 73): Resnik framför i sitt argument för axiom 3 att, om $P(q) = b$ och $P(p \vee q) = c$, en *Dutch book* kan skapas mot beslutsfattare som har förväntningar där $c < a+b$; vadförmedlaren (*the bookie*) satsar mot p och mot q , men för $p \vee q$.

(Jämför med exemplet ovan om schlager-EM och ishockey-VM!)

10# (i mån av tid...) Beslutsregler under osäkerhet

Hansson ger på sidan 55-58 några exempel på beslutsregler under osäkerhet.

Några av dem handlar om att "maximera förväntad nytta"; vi kommer att prata mer om detta under nästa föreläsning.

Grundläggande exempel: Du funderar över huruvida du ska ta med paraplyet ut.

	$S_1 = \text{"Det regnar"}$	$S_2 = \text{"Det regnar inte"}$
$A_1 = \text{"Ta med paraply"}$	$U_{11} = 3$	$U_{12} = 2$
$A_2 = \text{"Ta inte med paraply"}$	$U_{21} = 1$	$U_{22} = 4$

Maximin expected utility. Maximera nyttan enligt den sannolikhetsbedömning som är mest pessimistisk.

Exempel: Du tror att sannolikheten för att det ska regna är någonstans mellan 40 % och 70 %. Din förväntade nytta av att välja A_1 (Ta med paraply) är lika med $0,4 \cdot 3 + 0,6 \cdot 2 = 2,4$ om det lägre sannolikhetsmåttet (40 %) används och $0,7 \cdot 3 + 0,3 \cdot 2 = 2,7$ om det högre sannolikhetsmåttet (70 %) används. Din förväntade nytta av att välja A_2 (Ta inte med paraply) är lika med $0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 4 = 2,8$ om det lägre sannolikhetsmåttet används och $0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot 4 = 1,9$ om det högre sannolikhetsmåttet används. Eftersom du garanteras en förväntad nytta på minst 2,4 om du tar med paraply (jämfört med 1,9 om du inte tar med paraply), bör du välja att ta med paraplyet.

Reliability-weighted expected utility. Ge vikter åt olika möjliga sannolikhetsbedömningar efter hur tillförlitliga de anses vara.

Exempel: Du bedömer det som att sannolikheten är antingen 40 % eller 70 % för att det ska regna, men att den förstnämnda bedömningen är tre gånger så tillförlitlig som den sistnämnda. Din viktade förväntade nytta av att välja att ta med paraplyet blir därför lika med $\frac{3}{4} \cdot 2,4 + \frac{1}{4} \cdot 2,7 = 2,475$. Din viktade förväntade nytta av att välja att inte ta med paraplyet blir lika med $\frac{3}{4} \cdot 2,8 + \frac{1}{4} \cdot 1,9 = 2,575$. Du bör därför välja att inte ta med dig paraplyet.