

Föreläsning 2: Preferensrationalitet och beslut under okunskap

Litteratur:

Hansson, Introduction to Decision Theory, kap 9

Resnik, Decision Theory, kap 2

Hansson, "Money-Pumps, Self-torturers, and Demons of Real Life"

*Bergström, "Cykliska preferenser"

1# Beslutsteori och preferenser

Rekapitulation från förra föreläsningen:

- En central idé inom beslutsteorin är att våra val, eller beslut, är **preferensgrundade**, dvs. när vi fattar beslut eller väljer mellan olika alternativ försöker vi att åstadkomma ett så bra utfall som möjligt givet någon slags värdestandard eller uppfattning om vad som är bra/dåligt. Inom beslutsteorin används alltså ordet "preferens" för att uttrycka de **värdemönster** enligt vilka agenten fattar sina beslut.
- Preferenser kan representeras på olika sätt: **binära relationer** och **numeriskt**.
- Tre binära relationer: **stark preferens**, **svag preferens** och **indifferens**.
- Stark preferens och indifferens kan uttryckas m.h.a. svag preferens.

#2 Vad innebär det att föredra x framför y?

1. **Valtolkningen**: Att en agent (A) föredrar x framför y innebär att han i valet mellan x och y faktiskt väljer x.
2. **Betalningstolkningen**: Att A föredrar x framför y innebär att A går med på att betala något för att få x istället för y (Penningpump-argumentet bygger på denna tolkning). D v s A väljer faktiskt (eller skulle faktiskt välja) $x + \text{en kostnad}$ framför y i de fall där $x + \text{en kostnad}$ och y är de enda tillgängliga alternativen.

Möjlig invändning mot dessa tolkningar: man uppfattar preferenser på ett alltför behaviouristiskt sätt, dvs. preferenser reduceras till beteende. Att föredra x framför y är enligt dessa tolkningar att handla på ett visst sätt. Men man skulle även kunna hävda att preferenser är "inre" mentala eller psykiska tillstånd som inte är direkt observerbara för utomstående. Två sådana tolkningar:

3. **Önsketolkningen:** Att A föredrar x framför y innebär att A har en viss önskan, nämligen att x snarare än y ska föreligga.
4. **Värderingstolkningen:** Att A föredrar x framför y innebär att personen har en viss uppfattning, eller åsikt, nämligen att x är bättre än y.

#3 Egenskaper hos binära relationer

Sen (1988) räknar upp sex olika egenskaper för binära relationer: (1) reflexivitet, (2) fullständighet, (3) transitivitet, (4) antisymmetri, (5) asymmetri och (6) symmetri. (För formella definitioner av relationerna, se texten som delades ut vid förra föreläsningen.)

Fullständighet

Som en formell egenskap definieras fullständighet för en relation och dess domän. Relationen ”minst lika bra som” är fullständig om och endast om det för varje element x och y i domänen gäller att antingen x är minst lika bra som y eller y är minst lika bra som x (SOH:s kompendium, s. 16).

Vad är det egentligen för problem med ofullständiga preferenser? Antag att jag har flugit med varje flygbolag i hela världen och att jag vet att jag föredrar British Airways framför varje annat flygbolag. Om British Airways finns tillgängligt behöver jag inte kunna ranka övriga alternativ för att fatta ett beslut. Så länge British Airways finns tillgängligt spelar det ingen roll hur jag rankar övriga flygbolag.

Dessutom: Få människor har fullständiga preferenser. De flesta av våra preferenser har vi tillägnat oss med hjälp av vår erfarenhet. Att tillägna sig fullständiga preferenser tar mycket tid.

Transitivitet

Antag att Olle föredrar hårdrock (A) framför techno (B) och techno framför country (C) och country framför hårdrock (A). Intuitivt verkar det konstigt. Men varför? Konstigheten består i att Olles preferenser är intransitiva (cykliska, icke-transitiva).

Alltså: Transitivitet innebär (för stark preferens) att om $A > B$ och $B > C$ så $A > C$.

Vad är det för fel med intransitiva preferenser? Det främsta argumentet mot sådana preferenser är att de ger **dålig handlingsvägledning**.

Gäller kravet på transitivitet även **svaga preferens** ("minst lika bra som") och **indifferens** ("lika bra som")? Anses vara mer kontroversiellt. En del menar att det inte är lika rimligt att kräva att en indifferensrelation behöver vara transitiv. Två exempel som diskuteras i litteraturen:

Sockret i kaffekoppen

$C_0, C_1, C_2, C_3 \dots$ osv. och $C_0 = C_1, C_1 = C_2, C_2 = C_3 \dots$ osv.

Om kravet på transitivitet gäller även indifferens så gäller att $C_0 = C_{999}$ vilket är absurt eftersom man tydligt känner skillnaden mellan C_0 och C_{999} och föredrar C_0 framför C_{999} .

Självvtorteraren

Två dimensioner: (1) smärttillstånd och (2) pengar.

(1) $S_0 = S_1, S_1 = S_2, S_2 = S_3 \dots$ o s v men $S_0 > S_{1000}$

(2) $P_0 < P_1, P_1 < P_2, P_2 < P_3 \dots$ o s v och $P_0 < P_{1000}$

$S_0 < S_1 + P_1, S_1 + P_1 < S_2 + P_2 \dots$ o s v men $S_0 > S_{1000} + P_{1000}$

#4 Varför är intransitiva preferenser problematiska?

Tre exempel:

1. Första sortens penningpump
2. Andra sortens penningpump
3. Schumms exempel med julgranskulorna

Första sortens penningpump

Frimärkssamlaren Arne har intransitiva starka preferenser enligt följande:

$A < B$

$B < C$

$C < A$

En dag går Arne in i en butik som säljer frimärken. Han har med sig frimärke A. I affären erbjuder försäljaren honom att byta frimärke A mot frimärke B (som han föredrar framför A)

mot att han betalar en krona. Arne går med på bytet. Försäljaren erbjuder honom därefter att byta frimärke B mot frimärke C (som han föredrar framför B) mot att han betalar en krona. Arne går med på bytet. Försäljaren erbjuder honom därefter att byta frimärke C mot frimärke A (som han föredrar framför C) mot att han betalar en krona. Arne går med på bytet. Han har nu åter igen frimärke A i sin hand och har samtidigt blivit av med tre kronor.

Problemet uppstår pga. Arnes intransitiva preferenser. Det är rimligt att anta att han är beredd att betala något litet belopp för att gå från A till B, från B till C, från C till A o s v (se betalningstolkningen ovan). Om han fortsätter på det sättet har han snart ruinerat sig.

$$(A, 0) < (B, -1)$$

$$(B, -1) < (C, -2)$$

$$(C, -2) < (A, -3) \text{ o s v...}$$

$$(A, -3) < (B, -4)$$

$$(B, -4) < (C, -5) \text{ o s v...}$$

Andra sortens penningpump

En ny kund – Asta – kliver in i frimärksbutiken med frimärke A i handen. Asta är indifferent mellan frimärke A och B och mellan B och C, men hon föredrar C framför A. En cykel av sorten (=, =, >).

$$A = B$$

$$B = C$$

$$C > A$$

Frimärksförsäljaren erbjuder henne att byta frimärke A mot frimärke C (som hon föredrar framför A) mot att hon betalar tio kronor. Asta går med på bytet och får frimärke C i sin hand. Försäljaren erbjuder henne därefter att byta in frimärke C mot frimärke B plus en krona. Eftersom Asta är indifferent mellan frimärke B och C går hon med på detta (Hon vinner ju en krona på det!). Hon har nu frimärke B i sin hand. Därefter erbjuder försäljaren henne att byta in frimärke B mot frimärke A plus en krona. Eftersom Asta är indifferent mellan frimärke A och B går hon med på bytet. Hon har nu frimärke A i sin hand igen. Liksom i det tidigare exemplet har hon betalat pengar för att få komma tillbaka till ruta 1:

$(A, 0) < (C, -10)$

$(C, -10) < (B, -9)$

$(B, -9) < (A, -8)$ o s v...

$(A, -8) < (C, -18)$

$(C, -18) < (B, -17)$ o s v...

Exemplen belyser ytterligare ett problem. Intransitiva (cykliska) preferenser ger inte bara **dålig handlingsvägledning**, de gör även att agenten lätt kan **utnyttjas** som penningpump.

Kritik mot penningpumpargumentet:

1. Förutsätter även att agenten är beredd att betala för sina preferenser. Men agenten kan ha dessa preferenser och samtidigt inte vara beredd att betala något för ökad preferenstillfredsställelse?
2. Om agenten bara är framsynt kommer han inte att låta sig utnyttjas på det sätt som argumentet förutsätter (t.ex. Rabinowicz)?
3. Det faktum att man har en preferensordning som gör att man kan bli utnyttjad behöver inte innebära att preferensordningen är irrationell (t.ex. Rabinowicz)?

Schumms exempel med julgranskulorna

Smith överväger vilka julgranskulor han ska köpa. Han kan välja mellan tre olika kartonger (1, 2 och 3). I varje kartong finns tre olika julgranskulor – en röd (R), en blå (B) och en grön (G):

Kartong 1

R1

B1

G1

Kartong 2

R2

B2

G2

Kartong 3

R3

B3

G3

Smith kan inte se någon skillnad i rödhet mellan R1 och R3 och inte heller mellan R2 och R3. Han kan dock se skillnad mellan R1 och R2 och han föredrar R1 framför R2.

Smith kan inte se någon skillnad i blåhet mellan B2 och B3 och inte heller mellan B2 och B1. Han kan dock se skillnad mellan B1 och B3 och han föredrar B3 framför B1.

Smith kan inte se någon skillnad i grönhet mellan G1 och G2 och inte heller mellan G1 och G3. Han kan dock se skillnad mellan G2 och G3 och han föredrar G2 framför G3.

Smiths preferenser ser ut på följande vis:

$R1 > R2$	$B1 = B2$	$G1 = G2$	<i>Kartong 1!</i>
$R2 = R3$	$B2 = B3$	$G2 > G3$	<i>Kartong 2!</i>
$R3 = R1$	$B3 > B1$	$G3 = G1$	<i>Kartong 3!</i>

Vad händer om Smith jämför de olika kartongerna med varandra?

Smith föredrar Kartong 1 framför Kartong 2 eftersom $B1 = B2$ och $G1 = G2$ och $R1 > R2$.

Smith föredrar Kartong 2 framför Kartong 3 eftersom $B2 = B3$ och $R2 = R3$ men $G2 > G3$.

Smith föredrar Kartong 3 framför Kartong 1 eftersom $R3 = R1$ och $G3 = G1$ men $B3 > B1$.

Följande intransitiva preferensordning kan alltså härledas vad gäller kartongerna:

$$K1 > K2$$

$$K2 > K3$$

$$K3 > K1$$

Man får en intransitiv stark preferensrelation. Tre cykler av sorten ($=, =, >$) ger en cykel ($>, >, >$).

Övningsuppgift 1

#5 Beslut under okunskap (ignorance)

Hur ska man fatta beslut i situationer där beslutsfattarens trosföreställningar inte kan representeras med entydiga sannolikhetsmått, dvs. där man inte kan ange en sannolikhetsfördelning över utfallen?

Fem olika beslutskriterier

1. Maximinkriteriet (och leximin)
2. Maximaxkriteriet (och leximax)
3. Optimism-pessimismkriteriet (Hurwicz-kriteriet)
4. Minimax regretkriteriet (Savagekriteriet)
5. Principle of insufficient reason (Laplacekriteriet)

Maximinkriteriet

En försiktig beslutsregel som fäster stor vikt vid de sämsta utfallen för varje handlingsalternativ. För varje alternativ fastställer man först det sämsta möjliga utfallet. Därefter väljer man det handlingsalternativ som har det bästa av de sämsta möjliga utfallen.

	S1	S2
A1	10	5
A2	2	20

Sämsta utfallet i A1: 5

Sämsta utfallet i A2: 2

Rekommendation: Välj A1!

Leximinkriteriet

Om båda alternativen har lika bra sämsta utfall kan leximinkriteriet (lexikografisk maximin) tillämpas, dvs. man går vidare till nästa led och jämför de näst sämsta utfallen för varje alternativ. Av dessa väljer man det alternativ som har det bästa näst sämsta utfallet.

	S1	S2
A1	2	5
A2	3	2

Sämsta utfallet i A1: 2

Sämsta utfallet i A2: 2

Näst sämsta utfallet i A1: 5

Näst sämsta utfallet i A2: 3

Rekommendation: Välj A1!

Kritik mot Maximin- och Leximin-kriteriet:

1. Både Maximin- och Leximin-kriteriet är pessimistiska beslutsregler. Man utgår från de sämsta utfallen och väljer sedan det bästa av dessa. Kriteriet passar beslutsfattare som är pessimister. Bör man inte som beslutsfattare vara lite mer optimistisk?
2. Maximinkriteriet kan ge tveksamma utfall i vissa situationer, t.ex.:

	S1	S2
A1	0	100
A2	1	1

Sämsta utfall i A1: 0

Sämsta utfall i A2: 1

Rekommendation: Välj A2!

Men är det inte rimligare att välja A1? Där riskerar agenten visserligen 1 men kan eventuellt vinna 100!

Maximaxkriteriet

En mycket optimistisk beslutsregel som fäster vikt vid de bästa utfallen för varje handlingsalternativ. För varje handlingsalternativ fastställer man det bästa möjliga utfallet. Därefter väljer man ut det bästa av dessa utfall.

	S1	S2
A1	15	15
A2	0	18

Bästa utfallet i A1: 15

Bästa utfallet i A2: 18

Rekommendation: Välj A2!

Leximaxkriteriet

Om båda alternativen har lika bra bästautfall kan Leximaxkriteriet (lexikografisk maximin) tillämpas, dvs. man går vidare till nästa led och jämför de näst bästa utfallen för varje alternativ. Av dessa väljer man det alternativ som har det näst bästa utfallet.

	S1	S2
A1	2	10
A2	10	5

Bästa utfallet i A1: 10

Bästa utfallet i A2: 10

Näst bästa utfallet i A1: 2

Näst bästa utfallet i A2: 5

Rekommendation: Välj A2!

Kritik mot Maximax- och Leximaxkriterierna:

Maximax- och Leximaxkriteriet är optimistens, chanstagarens, beslutsregler. Men är det verkligen klokt att vara så optimistiskt? Kanske bör man använda en beslutsregel som varken är alltför pessimistisk eller optimistisk?

Övningsuppgift 2

Optimism-pessimismkriteriet (Hurwicz-kriteriet)

Ett beslutskriterium som försöker väga ihop de bästa och de sämsta utfallen. Det görs genom att agenten väljer ett index (α) mellan 0 och 1 som speglar dennes grad av pessimism/optimism. (Ju närmare 1 du sätter α , desto mer optimistisk är du, dvs. $\alpha=1$ är det samma som att använda Maximaxkriteriet och $\alpha=0$ är det samma som att använda Maximinkriteriet.) För varje alternativ låter man $\text{MAX}(A)$ representera det bästa utfallet för alternativet i fråga och $\text{min}(A)$ det sämsta utfallet:

$$\alpha \cdot \text{MAX}(A) + (1-\alpha) \cdot \text{min}(A)$$

Därefter väljer man det bästa handlingsalternativet, dvs. det alternativ som har högst värde.

	S1	S2
A1	15	15
A2	0	18

Antag att du sätter α -index till 0,75:

$$A1: 0,75 \cdot 15 + (1-0,75) \cdot 15 = 15$$

$$A2: 0,75 \cdot 18 + (1-0,75) \cdot 0 = 13,5$$

Rekommendation: Välj A1!

Om A1 sätts lika med A2 får man det α -värde för vilket A1 och A2 är lika bra.

$$A1: \alpha \cdot 15 + (1-\alpha) \cdot 15 = 15\alpha + 15 - 15\alpha = 15$$

$$A2: \alpha \cdot 18 + (1-\alpha) \cdot 0 = 18\alpha$$

$$15 = 18\alpha$$

$$\alpha = 15/18$$

Kritik mot Optimism-pessimismkriteriet:

1. Kriteriet kan ibland leda till konstiga resultat.

	S1	S2	S3	S4	S5
A1	1	1	1	1	100
A2	0	99	99	99	99

$$A1: \alpha \cdot 100 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1 + 99\alpha$$

$$A2: \alpha \cdot 99 + (1-\alpha) \cdot 0 = 99\alpha$$

Oberoende av värdet på α kommer A1 alltid att utpekas som det bästa handlingsalternativet, vilket verkar konstigt.

2. Brist på konsistens. Eftersom agenten själv kan välja α -index så kan man förvänta sig att olika agenter kommer att ha olika index. En och samma agent kan också välja olika α -index vid olika tidpunkter. Kanske är man mer optimistisk i sin ungdom för att bli mer pessimistisk med åren?

Minimax regretkriteriet (Savagekriteriet)

En beslutsregel som fokuserar på förlorade möjligheter, dvs. hur mycket man missar i olika utfall genom att inte ha valt det bästa handlingsalternativet. Alternativförlusten blir ett slags ångermått. Förlusten (ångern) bör vara så liten som möjligt. Agenten bör alltså välja det handlingsalternativ där han har minst att ångra om något går fel. Ytterligare en pessimistisk beslutsregel.

Vid beslut enligt Minimax regretkriteriet använder man sig av en alternativ-förlustmatris.

Alternativ-förlustvärdet får man fram genom formeln: $R = \text{MAX} - U$. För varje utfall tar man det högsta utfallet i den kolumnen och subtraherar det med utfallet självt. Därefter väljer man det alternativ vars största förlust är så liten som möjligt.

	S1	S2
A1	15	15
A2	0	18

	S1	S2
A1	0	3
A2	15	0

Hösta alternativförlust för A1: 3

Högsta alternativförlust för A2: 15

Rekommendation: Välj A1!

Trots att både Maximinkriteriet och Minimax regretkriteriet är pessimistiska eller försiktiga regler kan de ibland ge olika utfall:

	S1	S2	S3
A1	100	10	10
A2	120	15	5
A3	25	20	9

Maximinkriteriet:

Sämsta utfall för A1: 10 *Bäst!*

Sämsta utfall för A2: 5

Sämsta utfall för A3: 9

	S1	S2	S3
A1	20	10	0
A2	0	5	5
A3	95	0	1

Minimax regretkriteriet:

Högsta alternativförlust för A1: 20

Högsta alternativförlust för A2: 5 *Bäst!*

Högsta alternativförlust för A3: 95

Kritik mot Minimax regretkriteriet:

1. Kan ge tveksamma resultat, t.ex.:

	S1	S2	S3
A1	0	10	4
A2	5	2	10

	S1	S2	S3
A1	5	0	6
A2	0	8	0

Högsta alternativförlust för A1: 6

Högsta alternativförlust för A2: 8

Rekommendation: Välj A1!

$A1 > A2$

	S1	S2	S3
A1	0	10	4
A2	5	2	10
A3	10	5	1

	S1	S2	S3
A1	10	0	6
A2	5	8	0
A3	0	5	9

Högsta alternativförlust för A1: 10

Högsta alternativförlust för A2: 8

Högsta alternativförlust för A3: 9

Rekommendation: Välj A2!

$A2 > A1$

Helt plötsligt blir $A2 > A1$! Det verkar konstigt eftersom $A1 > A2$ när det bara fanns två handlingsalternativ. Närvaron av A3 ändrar alltså rangordningen mellan A1 och A2.

Principle of insufficient reason (Laplacekriteriet)

Kriteriet bygger på antagandet att det vid beslut under okunskap inte finns något skäl att anta att vissa naturtillstånd är mer sannolika än andra. Alla naturtillstånd bör därför behandlas som lika sannolika.

Enligt kriteriet ska man beräkna den förväntade nyttan för varje handlingsalternativ och därefter välja det alternativ som har den högsta förväntade nyttan:

	S1	S2	S3	S4	S5
A1	5	7	2	1	10
A2	10	2	3	5	20
A3	1	4	6	4	0

$$A1: 1/5 (5 + 7 + 2 + 1 + 10) = 5$$

$$A2: 1/5 (10 + 2 + 3 + 5 + 20) = 8$$

$$A3: 1/5 (1 + 4 + 6 + 4 + 0) = 3$$

Rekommendation: Välj A2!

Kritik mot Principle of insufficient reason:

1. Om det inte finns något skäl att anta att vissa naturtillstånd är mer sannolika än andra finns det heller inte något skäl varför alla naturtillstånd bör ses som lika sannolika. Varför inte bara kasta tärning?
2. Laplacekriteriet kan ha potentiellt katastrofala följder:

	S1	S2
A1	-100	300
A2	10	20

$$A1: 1/2 (-100 + 300) = 100$$

$$A2: 1/2 (10 + 20) = 15$$

Rekommendation: Välj A1!

Enligt Laplacekriteriet bör agenten välja A1 eftersom den förväntade nyttan i för A1 är 100 jämfört med 20 för A2. Men det kan få fatala konsekvenser om det visar sig att sannolikheten för S1 är 0,9 (!).

#6 Vilket beslutskriterium bör man då tillämpa?

Det finns alltså argument för och emot vart och ett av de redovisade beslutskriterierna. Finns det något rationellt sätt att bestämma sig för ett av beslutskriterierna. Kan man tillämpa beslutsteori för att avgöra vilket beslutsteoretiskt kriterium som bör tillämpas? Skulle man t.ex. kunna tillämpa Maximinkriteriet, Minimax regretkriteriet och Optimism pessimismkriteriet (med α -index 0,5) och sedan välja det handlingsalternativ som förordas av en majoritet av dessa? Ibland ger dock detta inte något svar. Exempel:

	S1	S2	S3
A1	1	14	13
A2	-1	17	11
A3	0	20	6

Maximinkriteriet:

Sämsta utfallet i A1: 1

Sämsta utfallet i A2: -1

Sämsta utfallet i A3: 0

Rekommendation: A1 > A3 > A2

Maximin regretkriteriet:

	S1	S2	S3
A1	0	6	0
A2	2	3	2
A3	1	0	7

Sämsta utfallet i A1: 6

Sämsta utfallet i A2: 3

Sämsta utfallet i A3: 7

Rekommendation: $A2 > A1 > A3$

Optimism pessimismkriteriet (α -index 0,5):

$$A1: 0,5 \cdot 14 + 0,5 \cdot 1 = 7,5$$

$$A2: 0,5 \cdot 17 + 0,5 \cdot (-1) = 8$$

$$A3: 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 0 = 10$$

Rekommendation: $A3 > A2 > A1$

	A1 vs. A2	A2 vs. A3	A1 vs. A3
Maximin	A1	A3	A1
Minimax regret	A2	A2	A1
Optimism pess.	A2	A3	A3

Resultatet blir att en majoritet av beslutskriterierna föredrar A1 framför A3, A3 framför A2 och A2 framför A1. Det finns alltså inte någon majoritet för ett första, andra och tredje alternativ. Vi får en cykel: $A1 > A3 > A2 > A1$

Samtliga beslutskriterier har för- och nackdelar. Kanske måste man acceptera att det inte finns ett enda beslutskriterium som kan pekas ut som det bästa oavsett beslutssituation. Olika beslutskriterier är kanske lämpliga i olika situationer. (Detta verkar vara Resniks slutsats.) Att peka ut ett visst beslutskriterium bör kanske ses som en värdeladdad fråga som inte endast kan avgöras på rationella eller beslutsteoretiska grunder?

#7 Sammanfattning

Efter dagens föreläsning ska ni:

- veta vad fullständighet och transitivitet är
- känna till några exempel som illustrerar problemet med intransitiva preferenser: sockret i kaffekoppen, självtorteren, första och andra sortens penningpump, Schumms exempel med julgranskulorna (behandlas vidare under seminarium 1)
- kunna tillämpa ett antal beslutskriterier för beslut under okunskap: maximin-, leximin-, maximax-, leximax-, optimism-pessimism-, minimax regretkriteriet och principle of insufficient reason samt känna till kritiken mot respektive beslutskriterium