Lösningsförslag till valda uppgifter i SANNOLIKHETSTEORI och STATISTIKTEORI med TILLÄMPNINGAR av Blom, Enger, Englund, Grandell & Holst.

Version 8 februari 2005

Fel i lösningarna mottages tacksamt till mattsson@math.kth.se.

Notera att lösningarna på vissa ställen utnyttjar andra, mer fullständiga, tabeller än vad som normalt är tillgängliga för studenterna. Därför kan t.ex. kvantiler i normalfördelningen och $t(n)$-fördelningar i lösningarna vara bestämda med mycket god noggrannhet.

2.1

a) Notera att om tärningen har n sidor så måste vid $n+1$ gjorda försök någon sida förekomma minst två gånger (Direchlets lådprincip). Alltså, ett lämpligt utfallsrum är $\Omega = \{2,3,4,5,6,7\}$ om tärningen har 6 sidor.

b) Vid varje försök (kast) finns möjligheten att man inte erhåller samma antal ögon som i föregående kast vilket gör att antalet nödvändiga kast är obegränsat och ett lämpligt utfallsrum är $\Omega = \{2,3,4,5,\ldots\}$.

2.2 Om den överskjutande längden efter en tillsågning är åtminstone 100 cm kommer även den att tillsågas för att skapa en ny planka. Detta upprepas till den kvarvarande längden är för kort att utgöra en meterlång planka.

Alltså, den överskjutande bitens längd kan sägas vara ett utfall i utfallsrummet $\Omega = \{x : 0 \leq x < 100 \text{ cm}\} = [0, 100)$.

2.3

a) Utfallsrummet består av 8 element.

$$\Omega = \{DDD, DDK, DKD, DKK, KDD, KDK, KKD, KKK\}$$

där $A = \{\text{exakt två defekta}\}$ består av utfallen $A = \{DDK, DKD, KDD\}$.

b) Utfallsrummet består av 3 element,

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\},$$

där $A = \{\text{exakt två defekta}\}$ består av utfallet $A = \{2\}$.

c) (1) Utfallsrummet är överuppräkneligt och ges av

$$\Omega = \{x : x \geq 0\} = \mathbb{R}_+ = [0, \infty).$$

Händelsen är $\{x : a < x < b\} = (a, b)$.

(2) Utfallsrummet är överuppräkneligt och kan ges av

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}_+^2.$$

Händelsen är $\{(x, y) : x > a, y > a\} = (a, \infty) \times (a, \infty)$.

(3) Utfallsrummet är överuppräkneligt och ges av

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\} = \mathbb{R}_+^n.$$

2.4 Händelsen $A \cap B$ består av utfallen som finns i A och i B, det vill säga händelsen kan uttryckas som ”både A *och* B inträffar”.

Händelsen $A \cap B^\star$ består av utfallen i A men inte i B, det vill säga $A \cap B^\star$ är händelsen ”A men inte B” eller ”endast A”.

Händelsen $A^\star \cap B^\star$ består av de utfall som inte ligger i A och inte heller i B så händelsen beskrivs av "inte A och inte B", det vill säga "varken A eller B". (Notera att meningen "inte någon av A eller B" låter sig skrivas som $(A \cup B)^\star$ vilket enligt de Morgan är ekvivalent med $A^\star \cap B^\star$.)

2.5 Utfallsrummet består av de 36 utfallen $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Med beteckningarna

a) $A = \{\text{Poängsumma mindre än } 6\}$ så är $A = \{(x, y) \in \Omega : x + y < 6\}$, det vill säga A består av de 10 utfallen $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Således är $P(A) = 10/36$.

b) $B = \{\text{Samma poäng vid båda kasten}\}$ så är $B = \{(x, x) \in \Omega\}$, det vill säga B består av de 6 utfallen $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$. Således $P(B) = 1/6$.

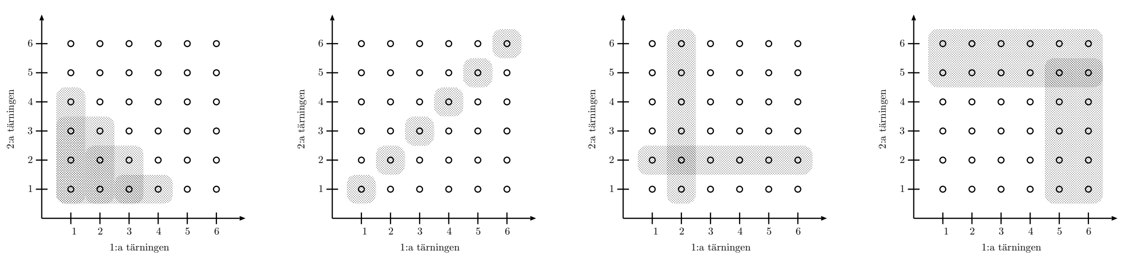
Man kan också tänka sig att det första kastet bestämmer det värde som man skall träffa i det andra kastet. För varje utfall av det första kastet är sannolikheten $1/6$ att kast 2 kommer att ge samma värde (kasten är oberoende).

c)

$$\begin{aligned} C &= \big\{\text{Åtminstone ett av kasten ger precis två poäng}\big\} \\ &= \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \end{aligned}$$

och $P(C) = 11/36$.

d) Slutligen, $D = \big\{\text{Åtminstone ett av kasten ger minst fem poäng}\big\}$ innehåller 20 distinkta utfall och $P(D) = 20/36$.



2.6 Enligt Kolmogorovs axiom är $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ då A och B är disjunkta, det vill säga $A \cap B = \varnothing$. Alltså är $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0.75 - 0.25 = 0.50$.

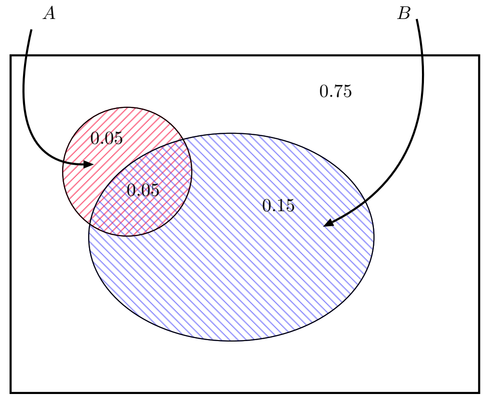
2.7 Enligt additionssatsen är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

vilket ger

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.7 - 0.8 = 0.5.$$

2.8 Givet är $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$ och $P(A \cap B) = 0.05$. Ett Venn-diagram för händelserna kan se ut som:



Alltså,

a) $P\left(\{\text{Åtminstone ett av felen}\}\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.10 + 0.20 - 0.05 = 0.25.$

b) $P(\{A \text{ men ej } B\}) = P(A \cap B^\star) = P(A) - P(A \cap B) = 0.10 - 0.05 = 0.05.$

c) $P(\{B \text{ men ej } A\}) = P(B \cap A^\star) = P(B) - P(A \cap B) = 0.20 - 0.05 = 0.15.$

d) $P(\{\text{exakt ett av felen}\}) = P((B \cap A^\star) \cup (A \cap B^\star)) = P(B \cap A^\star) + P(A \cap B^\star) = 0.15 + 0.05 = 0.20.$

2.9 Om $A \cap B = \varnothing$ så är $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.6 + 0.7 = 1.3$ vilket inte är möjligt. Alltså, händelserna A och B är inte oförenliga (disjunkta).

2.10 Händelsen $A \cup B$ består av de disjunkta mängderna A och $A^\star \cap B$, det vill säga $A \cup B = A \cup (A^\star \cap B)$. Alltså är

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^\star \cap B) = 0.5 + 0.1 = 0.6.$$

2.11 Händelsen A kan delas in i två disjunkta mängder: $A \cap B$ och $A \cap B^\star$. Alltså är $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^\star)$ vilket omformas till

$$P(A \cap B^\star) = P(A) - P(A \cap B).$$

På samma sätt är $P(B \cap A^\star) = P(B) - P(A \cap B)$, och eftersom $A \cap B^\star$ och $B \cap A^\star$ är disjunkta, så är

$$P((A \cap B^\star) \cup (B \cap A^\star)) = P(A \cap B^\star) + P(B \cap A^\star) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

2.12

a)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1 \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_n)) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup \cdots \cup A_n) - \underbrace{P(A_1 \cap (A_2 \cup \cdots \cup A_n))}_{\geq 0} \\ &\leq P(A_1) + P(A_2 \cup \cdots \cup A_n) \end{aligned}$$

på samma sätt

$$\leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3 \cup \cdots \cup A_n)$$

och så vidare...

$$\leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

b)

$$\begin{aligned} P\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) &= \{\text{de Morgan}\} = P\left(\left(A_1^\star \cup \cdots \cup A_n^\star\right)^\star\right) \\ &= 1 - P\left(A_1^\star \cup \cdots \cup A_n^\star\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^\star\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - P\left(A_i\right)). \end{aligned}$$

2.13 Vi väljer två bokstäver utan återläggning. Antalet sätt som dessa två bokstäver kan väljas på är $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$ och vid val på måfå är alla dessa sätt lika sannolika. Enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen fås att sannolikheten kan bestämmas som

$$P\left(\text{Drar V och G}\right) = \frac{\text{Antal gynnsamma utfall}}{\text{Antal möjliga utfall}} = \frac{1}{28} \approx 0.0357.$$

2.14 Vi väljer tre kort utan återläggning. Antalet sätt som dessa tre kort kan väljas på är $\binom{52}{3} = \frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2\cdot 1} = 22100$ och vid val på måfå är alla dessa sätt lika sannolika.

a) Att välja tre kort så att alla tre korten är hjärter kan göras på $\binom{13}{3} = 286$ sätt. Enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen är

$$P\left(\text{Alla hjärter}\right) = \frac{\text{Antal gynnsamma utfall}}{\text{Antal möjliga utfall}} = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{11}{850} \approx 1.29\%.$$

b) Att välja tre kort så att inget kort är hjärter kan göras på $\binom{39}{3} = 9139$ sätt.

$$P\left(\text{Inga hjärter}\right) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{703}{1700} \approx 41.35\%.$$

c) Att välja tre kort så att alla kort är ess kan göras på $\binom{4}{3} = 4$ sätt.

$$P\left(\text{Alla ess}\right) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{1}{5525} \approx 0.0181\%.$$

2.15 Vi väljer två kulor utan återläggning. Antalet sätt som dessa två kulor kan väljas på är $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$ och vid val på måfå är dessa 21 sätt lika sannolika.

Att välja två kulor så att en är svart och en är vit kan enligt multiplikationsprincipen göras på

$$\begin{pmatrix}\text{\# sätt att}\\ \text{välja en}\\ \text{svart kula}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# sätt att}\\ \text{välja en vit}\\ \text{kula}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 4\cdot 3 = 12 \text{ sätt.}$$

Enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen fås att

$$P\left(\text{Två kulor av olika färg}\right) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \approx 0.571.$$

b) Om urvalet görs med återläggning finns $7\cdot 7 = 49$ sätt att välja två kulor på (med hänsyn till ordning). Enligt tidigare kan man på 12 sätt välja två kulor av olika färg oavsett ordning, det vill säga på $2\cdot 4\cdot 3 = 24$ sätt med hänsyn till ordning. Den sökta sannolikheten blir således

$$P\left(\text{Två kulor av olika färg}\right) = \frac{24}{49} \approx 0.490.$$

Alternativt kan sannolikheterna beräknas med hjälp av betingning på färgen på den först dragna kulan.

I fallet utan återläggning (till vänster) är sannolikheten för att de två kulorna har olika färg $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$ och i fallet med återläggning (till höger) är motsvarande sannolikhet $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{24}{49}$.

2.16 Mängden av alla stryktipsrader $\Omega=\{1,\times,2\}\times\cdots\times\{1,\times,2\}$ har enligt multiplikationsprincipen $m=3\cdot 3\cdots 3=3^{13}=1594323$ element vardera med sannolikhet $1/m$.

a) Låt A vara händelsen att man får 13 rätt. Antalet element i A är enligt multiplikationsprincipen

$$g=|A|=1\cdot 1\cdots 1=1^{13}=1$$

och $P(A)=g/m=1/3^{13}=3^{-13}\approx 6.272\cdot 10^{-7}$.

b) Låt B vara händelsen att de 12 första matcherna är rätt och den 13:e matchen fel. Antalet element i B ges av

$$g=|B|=1\cdot 1\cdots 1\cdot 2=1^{12}\cdot 2=2$$

ty de första tolv matcherna kan endast tippas på ett sätt och sista matchen på 2 (felaktiga) sätt. Alltså $P(B)=g/m=2/3^{13}\approx 1.255\cdot 10^{-6}$.

c) Låt C vara händelsen att få ”precis 12 rätt”. Antalet stryktipsrader med tolv rätt där match i, $i=1,\ldots,13$, är fel är

$$\underbrace{1\cdots 1}_{i-1\text{ st}}\cdot 2\cdot\underbrace{1\cdots 1}_{13-i\text{ st}}=1^{12}\cdot 2=2,$$

eftersom man kan tippa match i fel på två sätt. Med 13 möjliga värden på i så är antalet stryktipsrader med exakt 12 rätt $|C|=13\cdot 2=26$ och $P(C)=g/m=26/3^{13}=26\cdot 3^{-13}\approx 1.631\cdot 10^{-5}$.

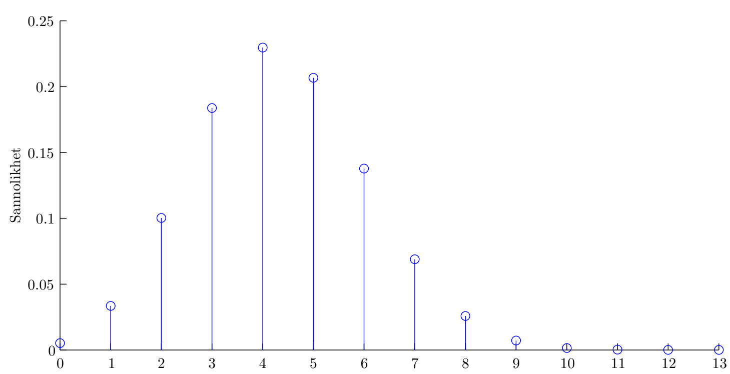
Generellt, låt D_k vara händelsen ”precis k rätt”. Enligt multiplikationsprincipen är antalet utfall i D_k,

$$|D_k| = \begin{pmatrix}\text{\# sätt att}\\ \text{välja ut } k\\ \text{matcher}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# sätt att}\\ \text{tippa } k\\ \text{matcher rätt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\# sätt att}\\ \text{tippa } 13-k\\ \text{matcher fel}\end{pmatrix} = \binom{13}{k}\cdot 1^k\cdot 2^{13-k}$$

så sannolikheten för att en stryktipsrad har exakt k rätt ges av

$$P(\text{precis } k \text{ rätt})=\frac{\binom{13}{k}1^k 2^{13-k}}{3^{13}}=\binom{13}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{13-k}$$

för $k=0,1,\ldots,13$.



Sannolikheterna för att få k rätt på stryktipset med en på måfå ifylld rad.

2.17 Sannolikheten att det bland n personer inte finns någon gemensam födelsedag är

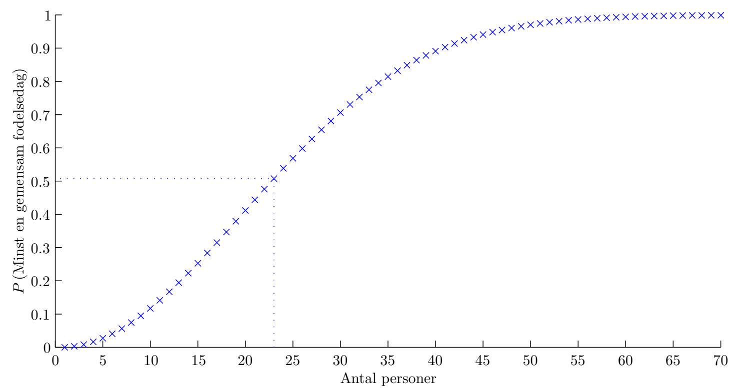
$$P\,(\text{Ingen gemensam}) = \frac{\text{Antalet sätt vi kan välja ut } n \text{ födelsedagar utan par}}{\text{Antalet sätt vi kan välja ut } n \text{ födelsedagar}}.$$

Under ett antagande om att varje år har 365 dagar och att födelsedagar är likformigt fördelade över åren kan med multiplikationsprincipen bestämma sannolikheten till

$$P\,(\text{Ingen gemensam}) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365 \cdot 365 \cdots 365} = \frac{365!}{365^n (365-n)!}.$$

Sannolikheten för minst att det bland n personer finns minst en gemensam födelsedag är således

$$P\,(\text{Minst en gemensam}) = 1 - P\,(\text{Ingen gemensam}) = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}.$$



För olika värden på n bestäms sannolikheten till

n	2	5	10	20	23	30	40
$P\,(\text{Minst en gemensam})$	.0027	.0271	.1169	.4114	.5073	.7063	.8912,

och man ser att för 23 eller fler personer är sannolikheten större än 50%.

2.18 Slumpförsöket består av att dra 5 kort utan återläggning på måfå ur en kortlek om 52 kort. Utfallsrummet består då av de $m = \binom{52}{5} = 2598960$ sätt som detta kan göras på. Antalet utfall som motsvarar en hand med korten…

a) ess, kung, dam, knekt, tio i samma färg, är enligt multiplikationsprincipen

$$g = (\#\text{ färger}) \cdot \binom{\#\text{ följder}}{\text{ess,}\ldots\text{,tio}} = 4 \cdot 1$$

så sannolikheten är $g/m = 4/\binom{52}{5}$.

b) fem kort i följd i samma färg, är enligt multiplikationsprincipen

$$g = (\#\text{ färger}) \cdot \binom{\#\text{ följder om}}{\text{fem kort}} = 4 \cdot 9 = 36$$

så sannolikheten är $g/m = 36/\binom{52}{5}$.

c) fem kort i samma färg, är enligt multiplikationsprincipen

$$g = (\#\text{ färger}) \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja fem} \\ \text{kort} \end{pmatrix} = 4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$$

så sannolikheten är $g/m = 4 \cdot \binom{13}{5}/\binom{52}{5}$.

2.19 Slumpförsöket består av att dra 13 kort utan återläggning på måfå ur en kortlek om 52 kort. Utfallsrummet består då av de $m = \binom{52}{13} = 635013559600$ sätt som detta kan göras på. Antalet utfall som motsvarar en hand med korten...

a) $5\spadesuit$, $3\heartsuit$, $3\diamondsuit$, $2\clubsuit$ är enligt multiplikationsprincipen

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 5 } \spadesuit \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 3 } \heartsuit \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 3 } \diamondsuit \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 2 } \clubsuit \end{pmatrix} \\ &= \binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{2} = 1287 \cdot 286 \cdot 286 \cdot 78 = 8211173256 \end{aligned}$$

så sannolikheten är $g/m = 0.01293$.

b) fördelningen 5,3,3,2 på godtyckliga (distinkta) färger. Enligt ovan är

$$\begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 5 av} \\ \text{färg 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 3 av} \\ \text{färg 2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 3 av} \\ \text{färg 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#\text{ sätt att} \\ \text{välja 2 av} \\ \text{färg 4} \end{pmatrix} = 8211173256$$

så det som återstår är att bestämma på hur många olika sätt man kan fördela $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$ och $\clubsuit$ över färg 1–4. Välj först vilka färger vi skall plocka tre kort av. Det kan göras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. För vart och ett av de sätten skall vi bestämma den färg som vi skall plocka 5 kort av. Vi har två färger kvar så detta kan göras på $\binom{2}{1} = 2$ sätt. Den sista färgen kan bara väljas på ett sätt. Det totala antalet sätt som färgerna kan fördelas är

$$\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

och sannolikheten är $12 \cdot (\text{svaret i a}) = 0.15516$.

2.20

Alternativ 1: Betrakta den hög där ruter kung ligger. Sannolikheten att hjärter kung ligger i samma hög är $1/3$ (ett kort av tre möjliga), dvs. med sannolikhet $2/3$ ligger de i olika högar.

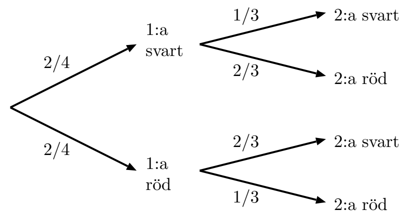
Alternativ 2: (Hypergeometrisk fördelning.) Av $N = 4$ kort är $s = 2$ svarta och $v = 2$ röda. För att välja ut korten i den ena högen väljer man ut $n = 2$ kort av N stycken, vilket kan göras på $\binom{N}{n} = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$ sätt. Av dessa är det

$$\binom{s}{1}\binom{v}{1} = \binom{2}{1}\binom{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4$$

sätt som ger exakt ett svart kort, vilket medför att de två röda korten ligger i varsin hög. Den sökta sannolikheten är således

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Alternativ 3: (Formell betingning) De två korten som skall läggas i en av högarna väljs enligt nedstående träddiagram:



Sannolikheten för att få två kort av olika färg är således

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

2.21 Av $N = 100$ distinkta enheter är $s = 6$ defekta. Om man väljer ut $n = 5$ på måfå utan återläggning så är enligt multiplikationsprincipen

$$\begin{aligned} P\,(2 \text{ defekta}) &= \frac{\begin{pmatrix}\#\text{sätt att välja 2}\\ \text{bland de defekta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\#\text{sätt att välja}\\ 5-2 \text{ bland de}\\ \text{hela}\end{pmatrix}}{\#\text{sätt att välja 5 bland alla}} \\ &= \frac{\binom{6}{2}\binom{94}{3}}{\binom{100}{5}} = \frac{15\cdot 134044}{75287520} = \frac{33511}{1254792} \approx 0.026706. \end{aligned}$$

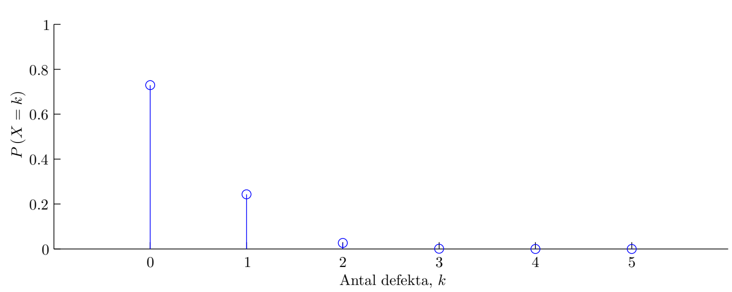
På samma sätt kan man räkna ut

$$P\,(0 \text{ eller 1 defekt}) = \frac{\binom{6}{0}\binom{94}{5}+\binom{6}{1}\binom{94}{4}}{\binom{100}{5}} = \frac{54891018+18297006}{75287520} = \frac{435643}{448140} \approx 0.97211.$$

Om man låter $\{X = k\}$ beteckna händelsen att det finns k defekta bland de utvalda så kan man på samma sätt bestämma sannolikheten för händelserna

$$P\,(X=k) = \frac{\begin{pmatrix}\#\text{sätt att välja}\\ k \text{ bland de de-}\\ \text{fekta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\#\text{sätt att välja}\\ 5-k \text{ bland de}\\ \text{hela}\end{pmatrix}}{\#\text{sätt att välja 5 bland alla}} = \frac{\binom{6}{k}\binom{94}{5-k}}{\binom{100}{5}}.$$

för $k = 0, 1, \ldots, 5$



2.22 Efter ha tagit tre hjärter ur kortleken finns $52 - 3 = 49$ kort kvar varav $13 - 3 = 10$ är hjärter. Den betingade sannolikheten att det fjärde kortet inte är ett hjärter är

$$P\,(\text{Fjärde kortet är inte hjärter}|\text{tre första korten är hjärter}) = \frac{39}{49} \approx 0.796.$$

b) Låt A vara händelsen att det fjärde kortet är en spader och B händelsen att de tre första korten är hjärter.

Notera att det inte är en betingad sannolikhet som söks. Av de kvarvarande 49 korten är 13 stycken spader så sannolikheten är

$$P(\text{Fjärde kortet är spader}|\text{tre första korten är hjärter}) = P(A|B) = \frac{13}{49} \approx 0.265$$

det vill säga en tredjedel av svaret i a.

Den sökta sannolikheten är

$$P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$$

där

$$P(B) = P(\text{tre första korten är hjärter}) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{11}{850}$$

så

$$P(\{\text{Fjärde kortet är spader}\} \cap \{\text{tre första korten är hjärter}\}) = P(A|B)\, P(B) = \frac{13}{49} \cdot \frac{11}{850} = \frac{143}{41650}.$$

2.23 Låt H_1, H_2 och H_3 beteckna händelserna att instrument 1, 2 eller 3 väljes. Då är $P(H_k) = \frac{1}{3}$, $k = 1, 2, 3$, och de tre händelserna utgör en partition av utfallsrummet. Låt A vara händelsen att valt instrument fungerar. Enligt lagen om total sannolikhet är

$$P(A) = P(A|H_1)\, P(H_1) + P(A|H_2)\, P(H_2) + P(A|H_3)\, P(H_3) = 0.9 \cdot \frac{1}{3} + 0.8 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.7.$$

b) Med Bayes formel erhålles

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)\, P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.9 \cdot \frac{1}{3}}{0.7} = \frac{3}{7}.$$

På samma sätt fås

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)\, P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.8 \cdot \frac{1}{3}}{0.7} = \frac{8}{21}$$

och

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)\, P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot \frac{1}{3}}{0.7} = \frac{4}{21}.$$

Notera att dessa tre sannolikheter summeras till 1.

2.24 Av de 11 frukterna är 3 giftiga och 8 ogiftiga. Låt B vara händelsen att hunden får en ogiftig frukt. Hundens frukt väljes på måfå och således är $P(B) = 8/11$.

Givet att hunden klarar sig finns 10 frukter kvar varav 3 är giftiga och 7 ogiftiga. Sannolikheten att Per får alla giftiga frukter är

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{\#sätt att välja 3}\\ \text{bland de giftiga}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\#sätt att välja}\\ \text{4 − 3 bland de}\\ \text{ogiftiga}\end{pmatrix}}{\text{\#sätt att välja 4 bland alla}} = \frac{\binom{3}{3}\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{1 \cdot 7}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{30}.$$

Sannolikheten att Pål får alla giftiga frukter är

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{\#sätt att välja 3}\\ \text{bland de giftiga}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\#sätt att välja}\\ \text{6 − 3 bland de}\\ \text{ogiftiga}\end{pmatrix}}{\text{\#sätt att välja 6 bland alla}} = \frac{\binom{3}{3}\binom{7}{3}}{\binom{10}{6}} = \frac{1 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{6}.$$

Med A som händelsen att både Per och Pål får minst en giftig frukt var är

$$\begin{aligned} P(A|B) &= 1 - P(\{\text{Per får alla}\} \cup \{\text{Pål får alla}\}|B) = 1 - P(\text{Per får alla}|B) - P(\text{Pål får alla}|B) \\ &= 1 - \frac{1}{30} - \frac{1}{6} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

c) Slutligen

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{11} = \frac{32}{55}.$$

2.25 Låt H vara händelsen att det var två M som föll ned. Då är $P(H) = 1/\binom{5}{2} = 1/10$. Om två M faller ned står det fortfarande MALMÖ efter uppsättning. Om det inte är två M som faller ned står det MALMÖ på skylten efter uppsättning med sannolikhet 1/2. Enligt lagen om total sannolikhet är

$$P\left(\text{MALMÖ}\right) = P\left(\text{MALMÖ}|H\right) P(H) + P\left(\text{MALMÖ}|H^\star\right) P(H^\star) = 1 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{11}{20}.$$

2.26 Händelsen att familjen har minst ett barn av vardera kön givet att det äldsta barnet är en pojke är händelsen att de tre andra barnen är en pojke och två flickor. Varje sådan tilldelning av kön har sannolikhet $p(1-p)^2$ enligt oberoendet. Att välja ut vilket barn som blir pojke kan göras på $\binom{3}{1} = 3$ sätt. Den sökta sannolikheten är således $3p(1-p)^2$.

b) Låt B vara händelsen att familjen har minst en pojke. Då är $B^\star$ händelsen att familjen har enbart flickor och enligt oberoendet $P(B^\star) = (1-p)^4$, det vill säga $P(B) = 1 - (1-p)^4$.

Låt A vara händelsen att familjen har två pojkar och två flickor. Varje sekvens av två pojkar och två flickor har sannolikhet $p^2(1-p)^2$ på grund av oberoendet och det finns $\binom{4}{2} = 6$ sådana sekvenser (könstilldelningar). Således är $P(A) = 6p^2(1-p)^2$.

Nu är $A \subset B$ och

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{6p^2(1-p)^2}{1-(1-p)^4}.$$

2.27

a) Med definitionen av betingad sannolikhet har man att

$$P(\text{andra sidan röd}|\text{sedd sida röd}) = \frac{P(\text{andra sidan röd} \cap \text{sedd sida röd})}{P(\text{sedd sida röd})} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3},$$

eftersom täljaren är sannolikheten för händelsen att man ser det helröda kortet och nämnaren fås av att hälften av kortsidorna är röda.

b) Det är inte samma chans för båda fallen. Av ovanstående följer att

$$P(\text{rödröd}|\text{sedd sida röd}) = P(\text{andra sidan röd}|\text{sedd sida röd}) = 2/3$$

medan

$$P(\text{rödvit}|\text{sedd sida röd}) = P(\text{andra sidan vit}|\text{sedd sida röd}) = 1/3.$$

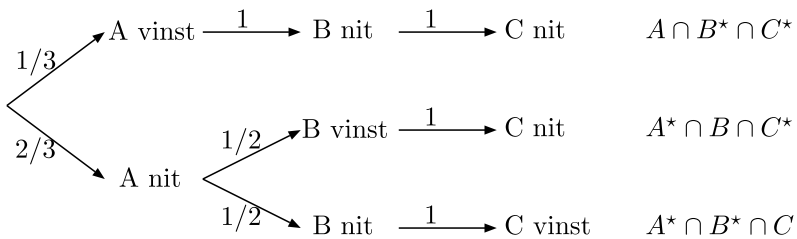
2.28 Låt A, B och C vara händelsen att person A, B och C får vinstlotten. Notera att händelserna är disjunkta och $P(A \cup B \cup C) = 1$. Eftersom A tar första lotten är $P(A) = 1/3 = P(A \cap B^\star \cap C^\star)$.

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A^\star)\,P(A^\star) = 0\,\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

eftersom givet $A^\star$ finns två lotter kvar och $P\left(B|A^\star\right)$ är således en halv. Slutligen,

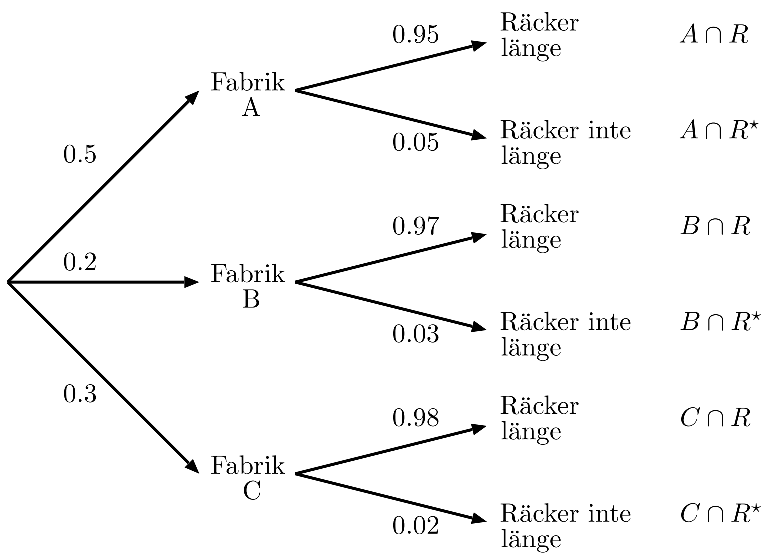
$$P\left(C\right)=P\left(C|B\right)P\left(B\right)+P\left(C|B^\star\right)P\left(B^\star\right)=0\,\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Resonemanget illustreras enkelt med ett träddiagram:



Träddiagram som visar de tre möjliga fallen: A vinner, B vinner och C vinner.

2.29 Låt A, B och C beteckna händelserna att ett på måfå valt batteri kommer från fabrik A, B eller C. Vidare, låt R beteckna händelsen att valt batteri har en lång livslängd. Enklast illustreras sambandet mellan händelserna och deras betingade sannolikheter i ett träddiagram såsom det nedan. Sannolikheten för tex. händelsen att man väljer ett batteri från fabrik A som räcker länge, $P\left(A\cap R\right)$, kan beräknas som $P\left(R|A\right)P\left(A\right)$, dvs. genom att multiplicera grenarnas sannolikheter.



Alltså,

$$\begin{aligned}P\left(A\cap R\right) &= P\left(R|A\right)P\left(A\right) = 0.95\cdot 0.5 = 0.475\\ P\left(B\cap R\right) &= P\left(R|B\right)P\left(B\right) = 0.97\cdot 0.2 = 0.194\\ P\left(C\cap R\right) &= P\left(R|C\right)P\left(C\right) = 0.98\cdot 0.3 = 0.294\end{aligned}$$

och

$$P\left(R\right)=P\left(\left(A\cap R\right)\cup\left(B\cap R\right)\cup\left(C\cap R\right)\right)=P\left(A\cap R\right)+P\left(B\cap R\right)+P\left(C\cap R\right)=0.963.$$

Vidare så är

$$P\left(A|R\right)=\frac{P\left(A\cap R\right)}{P\left(R\right)}=\frac{0.475}{0.963}=0.49325$$

och

$$P(A|R^\star) = \frac{P(A \cap R^\star)}{P(R^\star)} = \frac{P(R^\star|A)\,P(A)}{1 - P(R)} = \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.037} = 0.6757.$$

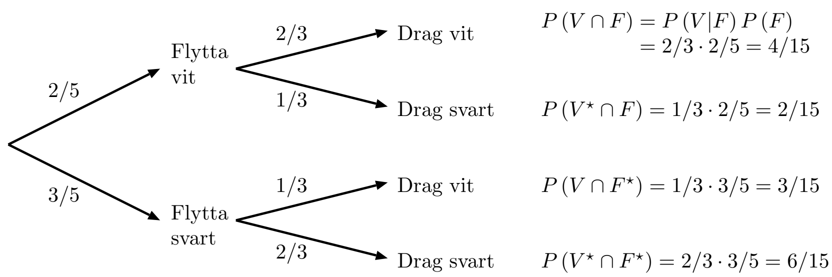
2.30 Låt F vara händelsen ”den flyttade kulan är vit” och V händelsen ”den dragna kulan är vit”.

a) Då är $F^\star$ händelsen ”flyttad kula svart” och

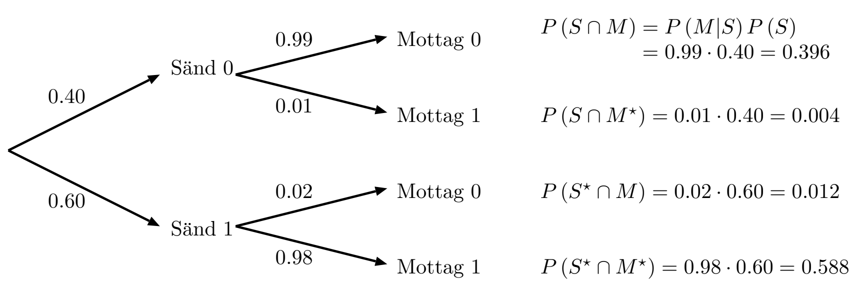
$$\begin{aligned} P(V) &= P((V \cap F) \cup (V \cap F^\star)) = P(V \cap F) + P(V \cap F^\star) \\ &= P(V|F)\,P(F) + P(V|F^\star)\,P(F^\star) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

b) Vi söker nu $P(F^\star|V)$.

$$P(F^\star|V) = \frac{P(F^\star \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|F^\star)\,P(F^\star)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{3}{7}.$$



2.31 Låt S vara händelsen att en skickad bit är en 0:a och M vara händelsen att en 0:a mottagits. Beroendet mellan S och M ges av träddiagrammet nedan.



De sökta sannolikheterna är (kolla figuren!)

$$P(S^\star|M^\star) = \frac{P(S^\star \cap M^\star)}{P(M^\star)} = \frac{P(M^\star|S^\star)\,P(S^\star)}{P(M^\star|S)\,P(S) + P(M^\star|S^\star)\,P(S^\star)} = \frac{0.588}{0.004 + 0.588} = 0.9932$$

och

$$P(\text{fel}) = P((S \cap M^\star) \cup (S^\star \cap M)) = 0.004 + 0.012 = 0.016.$$

2.32 Med de Morgan

$$\begin{aligned} P(A^\star \cap B^\star) &= P((A \cup B)^\star) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= (A \text{ och } B \text{ oberoende}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(A^\star)\,P(B^\star) \end{aligned}$$

det vill säga $A^\star$ och $B^\star$ är oberoende. Således

$$P(A^\star \cap B^\star) = P(A^\star)\,P(B^\star) = (1-0.1)(1-0.05) = 0.855.$$

2.33 Låt A, B och C vara händelserna att familj A, B respektive C kommer där $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.6$ och $P(C) = 0.9$.

a) Händelsen att alla kommer är $A \cap B \cap C$ och med oberoendet fås

$$P(\text{Alla kommer}) = P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C) = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.9 = 0.432.$$

b) På samma sätt

$$P(\text{Ingen kommer}) = P(A^\star \cap B^\star \cap C^\star) = P(A^\star)\,P(B^\star)\,P(C^\star) = 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.1 = 0.008.$$

c) Komplementet till händelsen {minst en kommer} är att ingen kommer. Således är

$$P(\text{Minst en kommer}) = 1 - P(\text{Ingen kommer}) = 0.992.$$

2.34 Om tärningen har 6 sidor och har samma sannolikhet för varje sida är $P(A) = 2/6 = 1/3$. Genom att betinga på utfallet i första tärningskastet kan man utnyttja lagen om total sannolikhet för att bestämma $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|1\text{:a})\,P(1\text{:a}) + P(B|2\text{:a})\,P(2\text{:a}) + P(B|3\text{:a})\,P(3\text{:a}) + P(B|4\text{:a})\,P(4\text{:a}) \\ &\quad + P(B|5\text{:a})\,P(5\text{:a}) + P(B|6\text{:a})\,P(6\text{:a}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{36}. \end{aligned}$$

Händelsen $A \cap B$ är händelsen {slå en 2:a följt av en 5:a eller 6:a} eller {slå en 5:a följt av minst en 2:a}, det vill säga

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{7}{36}.$$

Eftersom

$$P(A \cap B) = \frac{7}{36} = \frac{1}{3}\cdot\frac{21}{36} = P(A)\,P(B)$$

så är händelserna oberoende.

2.35

a) Med data:

$$\begin{array}{c|cc|c} & k & t & \\ \hline s & 1 & 1 & 2 \\ v & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

fås $P(S) = 2/4 = 1/2$, $P(T) = 2/4 = 1/2$ och $P(S \cap T) = 1/4$. Alltså är

$$P(S \cap T) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(S)\,P(T)$$

och händelserna är oberoende.

b) Med data:

$$\begin{array}{c|cc|c} & k & t & \\ \hline s & 1 & 10 & 11 \\ v & 10 & 1 & 11 \\ \hline & 11 & 11 & 22 \end{array}$$

fås $P(S) = 11/22 = 1/2$, $P(T) = 11/22 = 1/2$ och $P(S \cap T) = 10/22$. Alltså är

$$P(S \cap T) = \frac{10}{22} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(S)\,P(T)$$

och händelserna är inte oberoende. Givet information att det dragna föremålet är säg svart ökar sannolikheten att det också är en tärning. $P(T|S) = 10/11$.

2.36 Sannolikheten att en tillverkad komponent har minst ett av felen

Alternativ 1: Händelsen "något av felen" $= A \cup B \cup C$ och

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \{\text{de Morgan}\} = 1 - P(A^\star \cap B^\star \cap C^\star) = \{\text{oberoende}\} \\ &= 1 - P(A^\star)\,P(B^\star)\,P(C^\star) = 1 - (1-0.20)(1-0.05)(1-0.10) \\ &= 1 - 0.684 = 0.316. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Händelsen "något av felen" $= A \cup B \cup C$ och

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) = \{\text{oberoende}\} \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)\,P(B) - P(A)\,P(C) - P(B)\,P(C) \\ &\quad + P(A)\,P(B)\,P(C) \\ &= 0.2 + 0.3 + 0.5 - 0.2 \cdot 0.3 - 0.2 \cdot 0.5 - 0.3 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.316. \end{aligned}$$

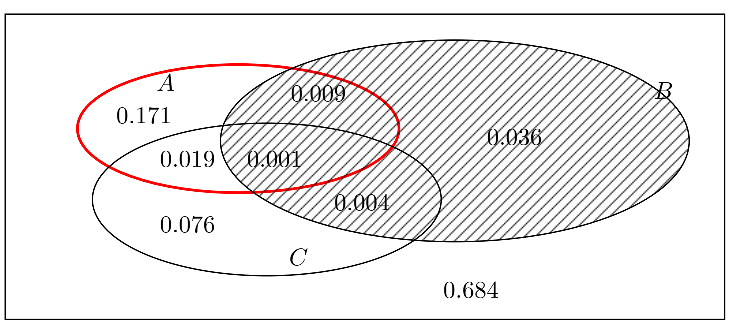
Alternativ 3: Låt X beskriva antalet fel hos produkten. $\{X = 0\} = A^\star \cap B^\star \cap C^\star$ så utnyttjandes oberoendet

$$P(X = 0) = P(A^\star)\,P(B^\star)\,P(C^\star) = 0.684$$

och på samma sätt fås

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A^\star)\,P(B^\star)\,P(C) + P(A^\star)\,P(B)\,P(C^\star) + P(A)\,P(B^\star)\,P(C^\star) = 0.283 \\ P(X = 2) &= P(A)\,P(B)\,P(C^\star) + P(A)\,P(B^\star)\,P(C) + P(A^\star)\,P(B)\,P(C) = 0.032 \\ P(X = 3) &= P(A)\,P(B)\,P(C) = 0.001 \end{aligned}$$

Vi söker $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.684 = 0.316$.



Venndiagram där händelserna motsvarande felen A, B och C är oberoende.

2.37 Låt A vara händelsen att det dragna kortet är hjärter och B händelsen att det dragna kortet är ess. Vi får omedelbart att $P(A) = 13/52 = 1/4$ och $P(B) = 4/52 = 1/13$. Händelsen $A \cap B$ är händelsen att det dragna kortet är hjärter ess och vi får då att $P(A \cap B) = 1/52$. Det innebär att $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ varför A och B är oberoende.

b) Definiera A och B som i a) ovan. Vi får då att $P(A) = 13/48$ och $P(B) = 4/48 = 1/12$. Vidare ser vi att $P(A \cap B) = P(\text{dragna kortet är hjärter ess}) = 1/48$ varför vi *inte* har att $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Händelserna A och B är ej oberoende.

2.38 Låt A och B vara två händelser med $P(A) > 0$ och $P(B) > 0$.

a) Om A och B är oförenliga (disjunkta), $A \cap B = \varnothing$, så är

$$0 = P(\varnothing) = P(A \cap B) \neq \underbrace{P(A)}_{>0}\underbrace{P(B)}_{>0} > 0$$

och händelserna är *inte* oberoende.

b) Om A och B är oberoende så är

$$P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{>0}\underbrace{P(B)}_{>0} > 0$$

så $A \cap B \neq \varnothing$ och A och B är ej oförenliga.

2.39 Låt $K_1, \dots, K_n$ vara de oberoende händelserna att komponenter $1, \dots, n$ fungerar en given tid. $P(K_i) = p_i$.

a) Då gäller för ett *seriesystem*

$$P(\text{Syst. fungerar}) \;=\; P(K_1 \cap \cdots \cap K_n) = \{\text{ober.}\} = P(K_1)\cdots P(K_n) = p_1 \cdots p_n.$$

b) För ett *parallellsystem* har vi att

$$\begin{aligned} P(\text{Syst. fungerar}) &= P(K_1 \cup \cdots \cup K_n) = 1 - P(K_1^\star \cap \cdots \cap K_n^\star) = \{\text{ober.}\} \\ &= 1 - P(K_1^\star)\cdots P(K_n^\star) = 1 - (1 - p_1)\cdots(1 - p_n). \end{aligned}$$

c) Med $n = 4$ och $p_i = 0.90$ får man

$$\begin{aligned} P(\text{Seriesystem fungerar}) &= 0.90^4 &&= 0.6561 \\ P(\text{Parallellsystem fungerar}) &= 1 - (1 - 0.90)^4 &&= 1 - 10^{-4}. \end{aligned}$$

2.40 (Se även uppgift 2.39.) För två komponenter, låt A och B vara de oberoende händelserna att respektive komponent fungerar. Notera att med två komponenter är händelserna $\{\text{seriesystem fungerar}\} = A \cap B$ och $\{\text{parallellsystem fungerar}\} = A \cup B = (A^\star \cap B^\star)^\star$.

a) Händelsen $\{\text{seriesystem fungerar}\} = A \cap B$ så med oberoendet

$$P(\{\text{seriesystem fungerar}\}) = P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72.$$

b) Komponentredundans motsvaras av en seriekoppling av två parallellsystem där parallellsystem 1 fungerar med sannolikhet

$$\begin{aligned} P(\{\text{parallellsystem 1 fungerar}\}) &= P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^\star \cap A_2^\star) = 1 - P(A_1^\star)\,P(A_2^\star) \\ &= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = 1 - (1 - 0.9)(1 - 0.9) = 0.99. \end{aligned}$$

Motsvarande för parallellsystem 2 är

$$
\begin{aligned}
P\left(\{\text{parallellsystem 2 fungerar}\}\right) = P\left(B_1 \cup B_2\right) = 1 - P\left(B_1^\star \cap B_2^\star\right) = 1 - P\left(B_1^\star\right) P\left(B_2^\star\right) \\
= \quad 1 - (1 - P\left(B_1\right))(1 - P\left(B_2\right)) = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8) = 0.96.
\end{aligned}
$$

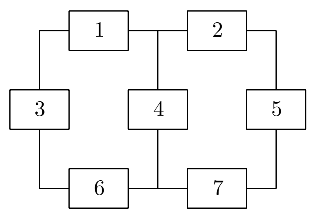
Seriekopplingen av dessa två system har funktionssannolikhet

$$
\begin{aligned}
P\left(\{\text{system fungerar}\}\right) &= P\left(\{\text{parallells. 1 fungerar}\} \cap \{\text{parallells. 2 fungerar}\}\right) \\
&= 0.99 \cdot 0.96 = 0.9504.
\end{aligned}
$$

c) Systemredundans innebär en parallellkoppling av två seriesystemen, där varje seriesystem har funktionssannolikhet 0.72. Parallellkopplingen har funktionssannolikhet

$$
\begin{aligned}
P\left(\{\text{system fungerar}\}\right) &= P\left(\{\text{seriesystem 1 fungerar}\} \cup \{\text{seriesystem 2 fungerar}\}\right) \\
&= 1 - (1 - P\left(\{\text{series. 1 fung}\}\right))(1 - P\left(\{\text{series 2 fung}\}\right)) \\
&= 1 - (1 - 0.72)^2 = 0.9216.
\end{aligned}
$$

2.41 Numrera reläerna enligt:



Låt K_i, $i = 1, \ldots, 7$, beteckna händelsen att relä i är tillslaget. Händelserna K_i, $i = 1, \ldots, 7$ är oberoende och låt $p_i = P\left(K_i\right)$.

Låt

$$
\begin{aligned}
A &= K_3, \\
B &= K_1 \cap K_4 \cap K_6 \\
C &= K_1 \cap K_2 \cap K_5 \cap K_7 \cap K_6.
\end{aligned}
$$

Om någon av händelserna A, B eller C inträffar är punkterna förbundna med varandra. Alltså, punkterna är förbundna med sannolikhet

$$
\begin{aligned}
P\left(A \cup B \cup C\right) &= P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) \\
&\quad - P\left(B \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right) \\
&= p_3 + p_1 p_4 p_6 + p_1 p_2 p_5 p_7 p_6 - p_3 p_1 p_4 p_6 - p_3 p_1 p_2 p_5 p_7 p_6 - p_1 p_4 p_6 p_2 p_5 p_7 + \\
&\quad p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 = p + p^3 - p^4 + p^5 - 2p^6 + p^7.
\end{aligned}
$$

2.42 Spelet avslutas när tavlan träffats två gånger. Händelsen att det är samma person som skjutit båda skotten är händelsen att efter första träffen sker det ett udda antal missar följt av en träff.

Alltså,

$$
\begin{aligned}
P\left(\text{Samma person}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{2k+1} p = (1-p)p \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^k = (1-p)p \frac{1}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}
$$

Notera att detta är sannolikheten att en ffg(p)-fördelad stokastisk variabel antar ett jämnt värde.

2.43

Alternativ 1: En kortlek kan delas i 4 lika stora högar, det vill säga med 13 kort i varje hög, på

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$$

sätt. Att välja ut den första högen så att den innehåller ett ess kan göras på $\binom{48}{12}\binom{4}{1}$ sätt. Efter detta kan den andra högen väljas på $\binom{36}{12}\binom{3}{1}$ sätt så att den innehåller ett ess. Den tredje högen väljes analogt på $\binom{24}{12}\binom{2}{1}$ sätt och den fjärde på $\binom{12}{12}\binom{1}{1}$ sätt.

Sålunda blir sannolikheten

$$P\left(\text{Ess i varje hög}\right) = \frac{\binom{48}{12}\binom{4}{1}\binom{36}{12}\binom{3}{1}\binom{24}{12}\binom{2}{1}\binom{12}{12}\binom{1}{1}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{2197}{20825} \approx 0.1055$$

Alternativ 2: Vi tar hänsyn till kortens ordning i högarna. Vi tänker oss 52 positioner (lådor) där låda 1–13 motsvarar hög 1, lådor 14–26 hög 2, 27–39 hög 3 och slutligen 40–52 den sista högen. Det första esset kan läggas ut på 52 sätt. När det lagts ut är de 12 andra lådorna knutna till samma hög blockerade så ess två kan läggas ut på 39 sätt. För var och ett av dessa kan sedan ess tre läggas ut på 26 sätt och slutligen det sista esset på 13 sätt. Sannolikheten är därför

$$\frac{52\cdot 39\cdot 26\cdot 13}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} = \frac{(4\cdot 13)\cdot(3\cdot 13)\cdot(2\cdot 13)\cdot(1\cdot 13)}{52!/48!} = \frac{13^4}{\frac{52!}{4!48!}} = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}.$$

2.44 Låt B vara händelsen att bridgehanden innehåller minst ett ess och A händelsen att bridgehanden innehåller exakt ett ess.

En bridgehand om 13 kort kan väljas på $\binom{52}{13}$ sätt. Om man inte har några ess är de 13 korten valda bland de $52 - 4 = 48$ kort som inte är ess. En bridgehand utan ess kan således väljas på $\binom{48}{13}$ sätt och om bridgehanden väljes på måfå är

$$P\left(B\right) = P\left(\text{minst ett ess}\right) = 1 - P\left(\text{Inget ess}\right) = 1 - \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}.$$

Eftersom $A \subset B$ och

$$P\left(A\right) = P\left(\text{exakt ett ess}\right) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

så är

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A\right)}{P\left(B\right)} = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13} - \binom{48}{13}}.$$

Den sökta sannolikheten är

$$P\left(A^\star|B\right) = 1 - P\left(A|B\right) = 1 - \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13} - \binom{48}{13}} = \frac{5359}{14498} \approx 0.3696.$$

b) Givet att personen har hjärter ess är sannolikheten för inget ytterligare ess

$$P\left(A|\text{har hjärter ess}\right) = \frac{\binom{3}{0}\binom{48}{12}}{\binom{51}{12}}$$

och den sökta sannolikheten är

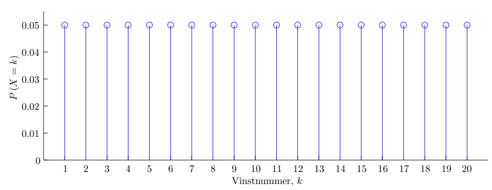
$$1 - P\left(A|\text{har hjärter ess}\right) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{48}{12}}{\binom{51}{12}} = \frac{11686}{20825} \approx 0.5612.$$

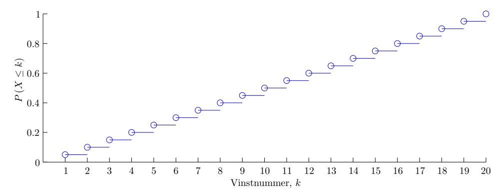
3.1 Låt X beteckna det nummer där lyckohjulet med n nummer stannar. De möjliga värdena på X är $S_X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ett rättvist hjul har samma sannolikhet för alla nummer, dvs $p_X(k) = P(X = k) = p$ beror ej av k. Eftersom

$$1 = \sum_{k \in S_X} p_X(k) = \sum_{k=1}^{n} p = np$$

så är $p = 1/n$, dvs $P(X = k) = 1/n$ för $k \in S_X$. Med $n = 20$ nummer så är

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 5) &= P(\{X = 3\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 5\}) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$





3.2 Lotterna i lotteriet fördelas enligt

Antal lotter	vinstbelopp
1	100
5	20
30	5
964	0
Totalt 1000	

Låt X beskriva vinstbeloppet av en på måfå vald lott. De möjliga värdena på X är $S_X = \{0, 5, 20, 100\}$. Sannolikhetsfunktionen för X ges av

$$\begin{aligned} p_X(0) &= P(X = 0) = 964/1000 = 0.964 \\ p_X(5) &= P(X = 5) = 30/1000 = 0.030 \\ p_X(20) &= P(X = 20) = 5/1000 = 0.005 \\ p_X(100) &= P(X = 100) = 1/1000 = 0.001 \end{aligned}$$

och $p_X(x) = 0$ för övrigt.

3.3 De möjliga värdena för den stokastiska variabeln X ges av $S_X = \{3, 4, 7, 8, 9\}$ där

$$p_X(3) = \frac{4}{12}, \quad p_X(4) = \frac{3}{12}, \quad p_X(7) = \frac{2}{12}, \quad p_X(8) = \frac{2}{12}.$$

a) Eftersom $\sum_{k \in S_X} p_X(k) = 1$ så är

$$p_X(9) = 1 - [p_X(3) + p_X(4) + p_X(7) + p_X(8)] = \frac{1}{12}.$$

b) Eftersom fördelningsfunktionen $F_X(t) = P(X \leq t)$ fås

$$F_X(5) = P(X \leq 5) = \sum_{k \in S_X : k \leq 5} p_X(k) = p_X(3) + p_X(4) = \frac{7}{12}.$$

c)

$$P(4 \leq X \leq 8) = \sum_{k \in S_X : 4 \leq k \leq 8} p_X(k) = p_X(4) + p_X(7) + p_X(8) = \frac{7}{12}$$

och

$$P(X \geq 8) = \sum_{k \in S_X : k \geq 8} p_X(k) = p_X(8) + p_X(9) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

3.4 Om X beskriver summan av två på måfå valda mynt så ges de möjliga värdena av $S_X = \{2, 6\}$. Sannolikheten för att erhålla dessa värden skall nu bestämmas och uppgiften kan lösas på flera sätt.

Alternativ 1: Vi kan välja ut 2 mynt av tre på $\binom{3}{2} = 3$ sätt. Av dessa kan två enkronor väljas på 1 sätt så

$$P(X = 2) = P(\text{Välj två enkronor}) = \frac{1}{3}$$

och alltså $P(X = 6) = 1 - P(X \neq 6) = 1 - P(X = 2) = \frac{2}{3}$.

Alternativ 2: Låt A_1 och A_2 vara händelserna att det första respektive det andra valda myntet är en enkrona. Då är $P(A_1) = \frac{2}{3}$ och $P(A_2|A_1) = \frac{1}{2}$ så

$$P(X = 2) = P(\text{Välj två enkronor}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)\, P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

och $P(X = 6) = 1 - P(X \neq 6) = 1 - P(X = 2) = \frac{2}{3}$.

Alternativ 3: De tre möjliga utfallen $\Omega = \{1_1 1_2, 1_1 5, 1_2 5\}$ lika stor sannolikhet.

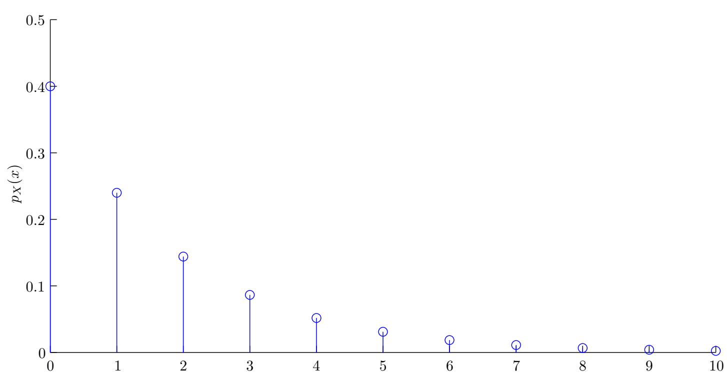
För de tre utfallen fås värdena $1 + 1 = 2$, $1 + 5 = 6$ och $1 + 5 = 6$. Den stokastiska variabeln X har således möjliga värden givna av $S_X = \{2, 6\}$ där

$$p_X(2) = P(X = 2) = P(1_1 1_2) = \frac{1}{3} \qquad p_X(6) = P(\{1_1 5\} \cup \{1_2 5\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

3.5 I en urna med $N = 10$ kulor är $v = 4$ stycken vita och $s = 6$ stycken svarta. Vid dragning med återläggning låt X beskriva antalet dragna svarta kulor före den första vita kulan. Möjliga värden på X ges av $S_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och händelsen $X = k$, $k \in S_X$, är händelsen att man dragit k svarta kulor följt av en vit. Alltså är

$$P(X = k) = \frac{\text{Antalet sätt att dra } k \text{ svarta följt av en vit}}{\text{Antalet sätt att dra } k+1 \text{ kulor}} = \frac{s^k \cdot v}{N^{k+1}} = \left(\frac{s}{N}\right)^k \frac{v}{N} = (1-p)^k p,$$

för $k = 0, 1, 2, \ldots$ där $p = v/N = 0.4$ andelen vita kulor i urnan. Detta är en geometrisk fördelning.



Antalet dragna svarta kulor före den första vita vid val på måfå med återläggning.

Nu är

$$P(X \geq 3) = \sum_{k \in S_X : k \geq 3} p_X(k) = \sum_{k=3}^{\infty} (1-p)^k p = (1-p)^3 p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = (1-p)^3 p \frac{1}{1 - (1-p)} = (1-p)^3.$$

Detta kan även inses genom att händelsen $X \geq 3$ är händelsen att dra tre svarta kulor på rad. Med siffror är $P(X \geq 3) = (1-p)^3 = (0.6)^3 = 0.2160$.

3.6 I en urna med $N = 10$ kulor är $v = 4$ stycken vita och $s = 6$ stycken svarta. Vid dragning med återläggning låt Y beskriva antalet dragna kulor när den första vita kulan dras. Möjliga värden på Y ges av $S_Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$ och händelsen $Y = k$, $k \in S_Y$, är händelsen att man dragit $k-1$ svarta kulor följt av en vit. Alltså är

$$P(Y = k) = \frac{\text{Antalet sätt att dra } k-1 \text{ svarta följt av en vit}}{\text{Antalet sätt att dra } k \text{ kulor}} = \frac{s^{k-1} \cdot v}{N^k} = \left(\frac{s}{N}\right)^{k-1} \frac{v}{N} = (1-p)^{k-1}p,$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$ där $p = v/N = 0.6$ andelen vita kulor i urnan. Detta är en för-första-gången-fördelning.

Notera att $Y = X + 1$ med X enligt uppgift 3.5.

Alternativ 1: Nu är

$$P(Y \geq 2) = \sum_{k \in S_Y : k \geq 2} p_Y(k) = \sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = (1-p)p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = (1-p)p \frac{1}{1-(1-p)} = 1-p.$$

Alternativ 2:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y = 1) = 1 - (1-p)^0 p = 1-p.$$

Händelsen $Y \geq 2$ är händelsen att dra en svart kula. Med siffror är $P(Y \geq 2) = 1 - p = 0.6$.

3.7 I en urna med $N = 10$ kulor är $v = 4$ stycken vita, det vill säga andelen vita kulor är $p = v/N = 0.40$.

a) Låt X beskriva antalet vita kulor vid dragning av $n = 3$ stycken med återläggning. Möjliga värden på X är $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Betrakta en sekvens av k vita och $n-k$ svarta kulor. En sådan sekvens har sannolikhet

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Antalet sätt att få en viss sekvens}\\ \text{av } k \text{ vita och } n-k \text{ svarta}\end{array}}{\text{Antalet sätt att dra } n \text{ kulor}} = \frac{v^k \cdot (N-v)^{n-k}}{N^n} = \left(\frac{v}{N}\right)^k \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Händelsen $X = k$ är händelsen att få någon av dessa sekvenser med k vita och $n-k$ svarta. Det finns $\binom{n}{k}$ sådana sekvenser så

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Detta är binomialfördelningen.

Låt X beskriva antalet vita kulor vid dragning av $n = 3$ stycken utan återläggning. Möjliga värden på X är $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

$$P(X = k) = \frac{\text{Antalet sätt att få } k \text{ vita och } n-k \text{ svarta}}{\text{Antalet sätt att dra } n \text{ kulor}} = \frac{\binom{v}{k}\binom{N-v}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Detta är den hypergeometriska fördelningen.

b) Händelsen att få fler vita än svarta kulor är händelsen $\{X > n/2\} = \{X > 1.5\}$ som har sannolikhet

$$P(\text{Fler vita än svarta}) = \sum_{k \in S_X : k > 1.5} p_X(k) = p_X(2) + p_X(3).$$

Vid dragningen med återläggning erhålls

$$p_X(2) + p_X(3) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = p^2(3 - 2p) = 0.3520$$

och vid dragning utan återläggning är sannolikheten

$$p_X(2) + p_X(3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{6}{1}+\frac{4}{1}\cdot 1}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{3}.$$

3.8 De möjliga värdena på X är $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ där $P(X = k) = p^k$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och något $p > 0$. Nu är

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in S_X} p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \\ &= P(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} p^k = P(X = 0) + p\sum_{k=0}^{\infty} p^k = P(X = 0) + p\frac{1}{1-p}. \end{aligned}$$

så

$$P(X = 0) = 1 - \frac{p}{1-p} = \frac{1-2p}{1-p}.$$

Om uttrycken för $P(X = k)$, $k \in S_X$, skall vara giltiga så skall $0 \le P(X = k) \le 1$ vilket ger

$$0 \le \frac{1-2p}{1-p} \le 1$$

eller $0 < p \le 1/2$.

3.9 Låt den stokastiska variabeln X har möjliga värden $S_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

och noll för övrigt. Vi söker sannolikheten $P(2 < X < 5)$. Alltså,

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= \sum_{\substack{k \in S_X: \\ 2<k<5}} p_X(k) = p_X(3) + p_X(4) = \frac{\mu^3}{3!}\mathrm{e}^{-\mu} + \frac{\mu^4}{4!}\mathrm{e}^{-\mu} = \frac{(4+\mu)\mu^3}{24}\mathrm{e}^{-\mu} = \frac{128}{6}\mathrm{e}^{-4} \\ &\approx 0.3907. \end{aligned}$$

3.10 Låt A_k stå för händelsen att terminal k används, $k = 1, 2, 3$. Om X beskriver antalet terminaler som används så ges de möjliga värdena för X av $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Vi erhåller att

$$P(X = 0) = P(A_1^\star \cap A_2^\star \cap A_3^\star) = \{\text{oberoende}\} = P(A_1^\star)\,P(A_2^\star)\,P(A_3^\star) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

Vi ser också att

$$P(X = 3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \{\text{oberoende}\} = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{6}{24}.$$

Händelsen $\{X = 2\}$ är händelsen $\{A_1 \cap A_2 \cap A_3^\star\} \cup \{A_1 \cap A_2^\star \cap A_3\} \cup \{A_1^\star \cap A_2 \cap A_3\}$. Vi erhåller

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P((A_1 \cap A_2 \cap A_3^\star) \cup (A_1 \cap A_2^\star \cap A_3) \cup (A_1^\star \cap A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^\star) + P(A_1 \cap A_2^\star \cap A_3) + P(A_1^\star \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3^\star) + P(A_1)\,P(A_2^\star)\,P(A_3) + P(A_1^\star)\,P(A_2)\,P(A_3) \\ &= \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Den sista sannolikheten $P(X=1)$ fås enklast som $P(X=1) = 1 - P(X \neq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=2) + P(X=3))$. Vi har alltså

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{24} & \text{för } k = 0, \\ \frac{6}{24} & \text{för } k = 1, \\ \frac{11}{24} & \text{för } k = 2, \\ \frac{6}{24} & \text{för } k = 3, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

3.11 Enligt uppgift är

$$\frac{1}{2} = P(X=0) = \frac{\mu^0}{0!}\mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-\mu}$$

vilket ger att $\mu = -\ln(1/2) = \ln(2)$. Sålunda har vi att

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu^1}{1!}\mathrm{e}^{-\mu}\right) = \frac{1-\ln(2)}{2} \approx 0.1534.$$

3.12 De möjliga värdena på X ges av intervallet $S_X = [0, 10)$. Intervallet innehåller ett överuppräkneligt antal värden och dessa kan inte alla tillskrivas positiva sannolikheter.

Ett rimligt utseende på fördelningsfunktionen är

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \frac{t}{10}$$

för $0 \leq t < 10$, eftersom händelsen $\{X \leq t\}$, att få vänta högst t minuter, innebär att mannen kom till hållplatsen under ett tidsintervall av längd t minuter före nästa tåg. Med 10 minuter mellan tågen är sannolikheten att träffa ett intervall av längd t, $t/10$, om tidpunkten väljes på måfå.

Ur

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \qquad \text{och} \qquad P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

fås att $F_X(t)$ är primitiv funktion till $f_X(t)$ och

$$f_X(t) = \frac{d}{dt}F_X(t) = \frac{1}{10}, \qquad 0 \leq t \leq 10,$$

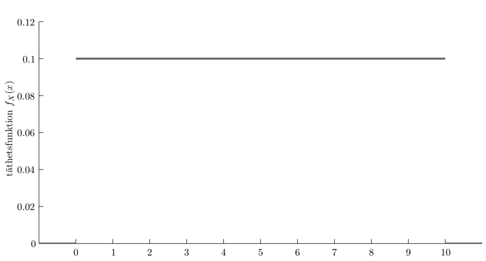
likformig fördelning på intervallet $[0, 10]$.

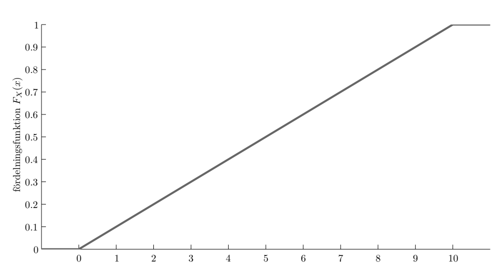
b) Alternativ 1:

$$P(3.5 < X \leq 7) = \int_{\substack{x \in S_X: \\ 3.5 < x \leq 7}} f_X(x)\,dx = \int_{3.5}^{7} \frac{1}{10}\,dx = \frac{7-3.5}{10} = 0.35.$$

Alternativ 2:

$$P(3.5 < X \leq 7) = F_X(7) - F_X(3.5) = \frac{7}{10} - \frac{3.5}{10} = \frac{7-3.5}{10} = 0.35.$$





3.13 En kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_X(x)$ uppfyller att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx.$$

Om $f_X(x) = f(x)$ så är

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^6 cx^2\,dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 72c$$

det vill säga $c = 1/72$.

3.14 En kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_X(x)$ uppfyller att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx.$$

Om $f_X(x) = f(x)$ så är

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{c}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2c\left[\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}c$$

det vill säga $c = 1/\sqrt{8}$. Med detta värde är

$$P\left(X > 0\right) = \int_0^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{c}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2c\left[\sqrt{x+1}\right]_0^1 = 2c(\sqrt{2}-1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.2929$$

3.15 Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktion

$$F_X(x) = P\left(X \le x\right) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 1 \\ 1 - 1/x^2 & \text{för } x \ge 1. \end{cases}$$

Vi söker medianen $x_{0.50}$, den punkt sådan att

$$F_X(x_{0.50}) = \frac{1}{2}.$$

Det innebär att

$$\frac{1}{2} = F_X(x_{0.50}) = 1 - \frac{1}{x_{0.50}^2}$$

vilket har lösningarna $x_{0.50} = -\sqrt{2}$ och $x_{0.50} = \sqrt{2}$. Kravet $x_{0.50} > 1$ ger lösningen $x_{0.50} = \sqrt{2}$.

3.16 En stokastisk variabel X med täthetsfunktion

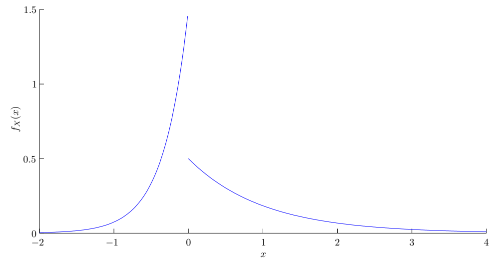
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3x} & \text{om } x < 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{om } x \ge 0 \end{cases}$$

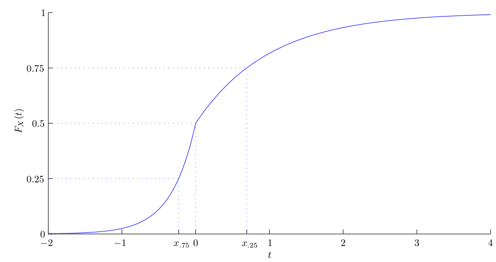
har fördelningsfunktion $F_X(t) = P\left(X \le t\right)$ som för $t \le 0$ är

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3x}\,dx = \frac{3}{2}\left[\mathrm{e}^{3x}\cdot\frac{1}{3}\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}.$$

För $t > 0$ är

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_0^t f_X(x)\,dx = F_X(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-x}(-1)\right]_0^t = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$





En α-kvantil x_α är lösningen till $F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Eftersom $F_X(0) = \frac{1}{2}$ är medianen $x_{0.50} = 0$ och $x_{0.75} \leq 0$ och $x_{0.25} \geq 0$ varför $x_{0.75}$ bestäms ur

$$\frac{1}{4} = F_X(x_{0.75}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x_{0.75}} \quad \Rightarrow \quad x_{0.75} = -\frac{1}{3}\ln(2) \approx -0.2310$$

och $x_{0.25}$ bestäms ur

$$\frac{3}{4} = F_X(x_{0.25}) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_{0.25}} \quad \Rightarrow \quad x_{0.25} = \ln(2) \approx 0.6931.$$

3.17 Låt X beskriva tiden från butikens öppnande till första kunden kommer. Då är

a) $P(X \leq 3) = F_X(3) = 1 - \mathrm{e}^{-0.4\cdot 3} = 1 - \mathrm{e}^{-1.2} \approx 0.6988$.

b) $P(X \geq 4) = P(X > 4) = 1 - F_X(4) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0.4\cdot 4}) = \mathrm{e}^{-1.6} \approx 0.2019$.

c) $P(3 \leq X \leq 4) = P(3 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(3) = (1 - \mathrm{e}^{-0.4\cdot 4}) - (1 - \mathrm{e}^{-0.4\cdot 3}) = \mathrm{e}^{-1.2} - \mathrm{e}^{-1.6} \approx 0.0993$.

d) $P(\{X \leq 3\} \cup \{X \geq 4\}) = P(\{X \leq 3\} \cup \{X > 4\}) = 1 - P(3 < X \leq 4) = 1 - (\mathrm{e}^{-1.2} - \mathrm{e}^{-1.6}) \approx 0.9007$.

e) Fördelningsfunktionen är kontinuerlig så $P(X = x) = 0$ för alla x.

3.18 En stokastisk variabel X med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x\mathrm{e}^{-x^2} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

har fördelningsfunktion $F_X(t) = P(X \leq t)$ som för $t > 0$ är

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_0^t 2x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \{u = x^2\} = \int_0^{t^2} \mathrm{e}^{-u}\,du = \left[\mathrm{e}^{-u}(-1)\right]_0^{t^2} = 1 - \mathrm{e}^{-t^2}$$

och $F_X(t) = 0$ för $t \leq 0$.

En α-kvantil x_α är lösningen till $F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$ vilket ger att för $0 < \alpha < 1$ är

$$1 - \alpha = 1 - \mathrm{e}^{-x_\alpha^2}$$

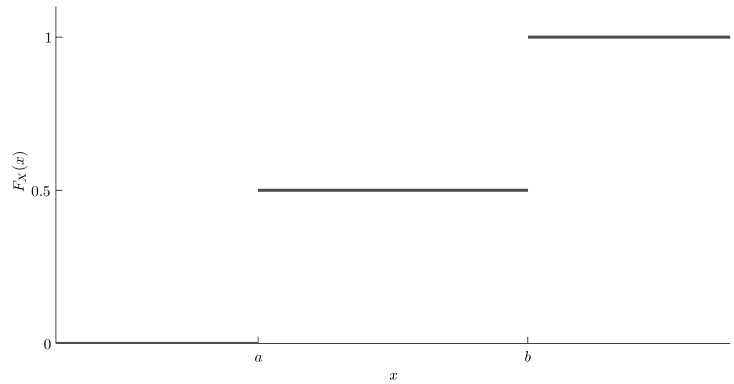
vilket har lösningarna $x_\alpha = \pm\sqrt{-\ln(\alpha)}$. Eftersom $F_X(0) = 0$ är $x_\alpha > 0$ och de negativa rötterna är inga lösningar. Alltså, α-kvantilen är $x_\alpha = \sqrt{-\ln(\alpha)}$.

Numeriska värden:

α	x_α
0.5	0.8326
0.1	1.5174
0.01	2.1460.

3.19 Fördelningsfunktionen för tvåpunktsfördelningen med massan 1/2 i punkterna a och b där $a < b$ har fördelningsfunktion:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{då } x < a \\ \frac{1}{2} & \text{då } a \leq x < b \\ 1 & \text{då } x \geq b. \end{cases}$$



Fördelningsfunktionen $F_X(x)$ för tvåpunktsfördelningen med massan 1/2 i punkterna a och b.

3.20 Låt X beskriva längden av ett telefonsamtal. Givet är att för $t \geq 0$ är

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} = P(\text{Samtal längre än } t) = P(X > t)$$

för någon konstant $\lambda > 0$. Alltså är fördelningsfunktionen för X:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - P(X > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

för $t \geq 0$. Således har X täthetsfunktion

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = 0 - \mathrm{e}^{-\lambda t}(-\lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

för $t \geq 0$. Sannolikheten $P(1 < X \leq 10)$ bestäms på två alternativa sätt:

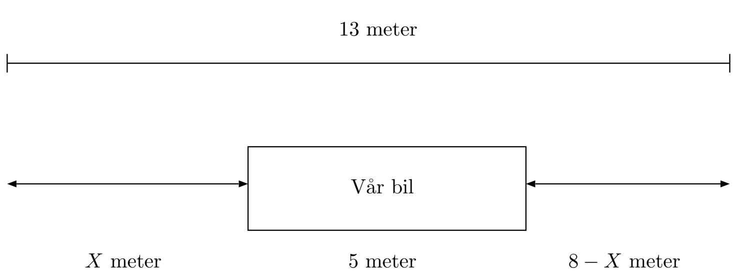
Alternativ 1: Med $\lambda = 2/3$ fås

$$P(1 < X \leq 10) = \int_1^{10} f_X(x)\, dx = \int_1^{10} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \left[\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{-1}{\lambda}\right]_1^{10} = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-10\lambda} \approx 0.5121.$$

Alternativ 2: Med $\lambda = 2/3$ fås

$$P(1 < X \leq 10) = F_X(10) - F_X(1) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 10}) - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 1}) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-10\lambda} \approx 0.5121.$$

3.21 Låt X beskriva avståndet mellan parkeringsfickans början och bilen. Om vi parkerar bilen på måfå i fickan ansätter vi modellen att X är likformigt fördelad på intervallet 0 till $13 - 5 = 8$ meter, dvs. $f_X(x) = 1/8$ då $0 \leq x \leq 8$.



En annan bil får plats om vår bil står tidigt ($X < 3$) eller sent ($X > 5$) i fickan. Med siffror

$$P(\{\text{annan bil får plats}\}) = P(\{X < 3\} \cup \{X > 5\}) = \int_0^3 f_X(x)\,dx + \int_5^8 f_X(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

3.22 Låt X beskriva livslängden för en transistor. Modell: X är exponentialfördelad med parameter $\lambda = 10^{-4}$, det vill säga för $x \geq 0$ är

$$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} = \frac{1}{10000}\mathrm{e}^{-x/10000},$$

$f_X(x) = 0$ om $x < 0$.

a) Vi erhåller

$$P(X < 6000) = \int_{-\infty}^{6000} f_X(x)\,dx = \int_0^{6000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{6000} = 1 - \mathrm{e}^{-0.6} \approx 0.4512.$$

b) Låt A_k vara händelsen att transistor k upphör att fungera inom 6000 timmar, k=1,2,3,4,5. Händelsen

$$\{\text{minst en upphör att fungera}\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_5 = (A_1^\star \cap A_2^\star \cap \cdots \cap A_5^\star)^\star$$

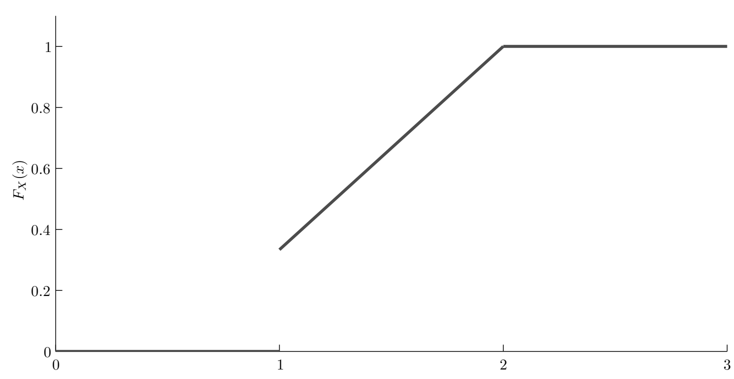
det vill säga motsatsen till att någon upphör att fungera inom 6000 timmar är att alla fungerar minst 6000 timmar. Härav får vi att

$$P(\text{minst en upphör fungera inom 6000 timmar}) = 1 - P(\text{alla fungerar minst 6000 timmar})$$

och med hjälp av oberoendet mellan transistorerna fås

$$\begin{aligned} P(\text{minst en upphör fungera inom 6000 timmar}) &= 1 - P(A_1^\star \cap A_2^\star \cap \cdots \cap A_5^\star) \\ &= 1 - P(A_1^\star)\,P(A_2^\star)\cdots P(A_5^\star) = 1 - (1 - 0.4512)^5 \approx 0.9502. \end{aligned}$$

3.23



Fördelningsfunktionen $F_X(x)$ med diskontinuitet i $x = 1$.

a) $P(X \leq 5/3) = F_X(5/3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{7}{9}$.

b) $P(X > 3/2) = 1 - P(X \leq 3/2) = 1 - F_X(3/2) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\right) = \frac{1}{3}$.

c) $P(4/3 < X \leq 5/3) = F_X(5/3) - F_X(4/3) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3} - 1\right)\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3} - 1\right)\right) = \frac{2}{9}$.

d)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X \le 1) - P(X < 1) = F_X(1) - \lim_{h \to 1-} P(X \le h) \\ &= F_X(1) - \lim_{h \to 1-} \underbrace{F_X(h)}_{=0} = F_X(1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.24 Intensiteten $\lambda_X(x)$ för en (positiv) kontinuerlig stokastisk variabel X ges av relationen

$$\lambda_X(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$$

där $f_X(x)$ är täthetsfunktionen och $F_X(x)$ är fördelningsfunktionen för den stokastiska variabeln. Från fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^c}$$

bestäms täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{c}{(1+x)^{c+1}}$$

vilket ger intensiteten

$$\lambda_X(x) = \frac{c/(1+x)^{c+1}}{1/(1+x)^c} = \frac{c}{1+x}$$

för $x \ge 0$.

3.25 Överlevnadsfunktionen $R(t) = P(X > t)$ bestäms ur intensiteten $\lambda_X(x)$ för en (positiv) kontinuerlig stokastisk variabel genom relationen

$$R(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \lambda_X(x)\, dx \right\}.$$

Här är för $t > 0$

$$\int_0^t \lambda_X(x)\, dx = \int_0^t \mathrm{e}^x\, dx = [\mathrm{e}^x]_0^t = \mathrm{e}^t - 1$$

så

$$R(t) = \exp\{1 - \mathrm{e}^t\}$$

och fördelningsfunktionen blir

$$F_X(t) = P(X \le t) = 1 - P(X > t) = 1 - R(t) = 1 - \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^t}$$

för $t \ge 0$.

3.26 Den diskreta stokastiska variabeln X är likformigt fördelad över de möjliga värdena $S_X = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

För funktionen $y(x) = 2x$ gäller att

$$\begin{array}{rcccccc} x: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ y(x): & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{array}$$

så den stokastiska variabeln $Y = y(X)$ har möjliga värden givna av $S_Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ där

$$\begin{array}{rclrcl} P(Y=2) &=& P(X=1) = \frac{1}{6} & P(Y=8) &=& P(X=4) = \frac{1}{6} \\ P(Y=4) &=& P(X=2) = \frac{1}{6} & P(Y=10) &=& P(X=5) = \frac{1}{6} \\ P(Y=6) &=& P(X=3) = \frac{1}{6} & P(Y=12) &=& P(X=6) = \frac{1}{6}. \end{array}$$

3.27 Den diskreta stokastiska variabeln X är likformigt fördelad över de möjliga värdena $S_X = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

För funktionen $y(x) = |x - 3|$ gäller att

$$\begin{array}{rcccccccccc} x: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ y(x): & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

så den stokastiska variabeln $Y = y(X)$ har möjliga värden givna av $S_Y = \{0, 1, \ldots, 6\}$ där

$$\begin{array}{rclcrcl} P(Y=0) & = & P(X=3) = \frac{1}{10} & \quad & P(Y=4) & = & P(X=7) = \frac{1}{10} \\ P(Y=1) & = & P(X=2) + P(X=4) = \frac{2}{20} & & P(Y=5) & = & P(X=8) = \frac{1}{10} \\ P(Y=2) & = & P(X=1) + P(X=5) = \frac{2}{20} & & P(Y=6) & = & P(X=9) = \frac{1}{10} \\ P(Y=3) & = & P(X=0) + P(X=6) = \frac{2}{20} & & & & \end{array}$$

3.28 Låt X vara likformigt fördelad på intervallet $[-1, 1]$, det vill säga

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

och $f_X(x) = 0$ för övrigt. Då har X fördelningsfunktion

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{om } t < -1 \\ \frac{t+1}{2} & \text{om } -1 \leq t < 1 \\ 1 & \text{om } t \geq 1. \end{cases}$$

Med $Y = (X+1)/2$ så ges de möjliga värdena på Y av $S_Y = [0, 1]$ och för $t \in S_Y$ har Y fördelningsfunktion

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P\left(\frac{X+1}{2} \leq t\right) = P(X \leq 2t - 1) = F_X(2t-1) = \frac{(2t-1)+1}{2} = t$$

det vill säga $f_Y(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 1$ och Y är likformigt fördelad på intervallet $[0, 1]$.

3.29 Låt X vara en positiv kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_X(x)$ och fördelningsfunktion $F_X(x)$. Med $Y = 1/X$ så är Y en positiv stokastisk variabel med fördelningsfunktion

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) = P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right)$$

för $x > 0$. Derivering ger med kedjeregeln

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = -f_X\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} f_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

Med given täthet $f_X(x)$ erhålles

$$f_Y(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{1 + (1/x)^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{1 + x^2} = f_X(x)$$

det vill säga X och Y har samma fördelning (är likafördelade).

3.30 Låt X beskriva den tid som fru Svensson parkerar. Enligt modellen är X likformigt fördelad på intervallet $[20, 60]$, det vill säga

$$f_X(x) = \frac{1}{40} \quad 20 \leq x \leq 60.$$

Med Y som den avgift fru Svensson betalar i parkeringsavgift ges de möjliga värdena på Y av $S_Y = \{14, 16, 18\}$. Vidare så är

$$\begin{aligned} p_Y(14) &= P(15 \leq X < 30) = \int_{15}^{30} f_X(x)\,dx = \int_{20}^{30} f_X(x)\,dx = \frac{1}{4}. \\ p_Y(16) &= P(30 \leq X < 45) = \int_{30}^{45} f_X(x)\,dx = \frac{3}{8} \\ p_Y(18) &= P(45 \leq X < 60) = \int_{45}^{60} f_X(x)\,dx = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

3.31 Låt X vara exponentialfördelad, det vill säga X har täthetsfunktion

$$f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

för någon konstant $\lambda > 0$. Låt $Y = \lfloor X \rfloor$ vara heltalsdelen av X. De möjliga värdena på Y ges av $S_Y = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och för $k \in S_Y$ är

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} f_X(x)\,dx = \int_k^{k+1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_k^{k+1} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} = \mathrm{e}^{-\lambda k}\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right] = p^k(1-p) \end{aligned}$$

där $p = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Alltså är $\lfloor X \rfloor$ geometriskt fördelad med parameter $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

3.32 Låt X beskriva positionen för en jordbävnings epicentrum i förkastningssprickan. Enligt modellen är X likformigt fördelad på intervallet $[-a, a]$, det vill säga

$$f_X(x) = \frac{1}{2a}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Med Y som avståndet mellan damm och epicentrum fås med Pythagoras sats

$$Y = \sqrt{X^2 + d^2}.$$

De möjliga värdena på Y är $S_Y = [d, \sqrt{a^2 + d^2}]$. För ett $t \in S_Y$ så är

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P\left(\sqrt{X^2 + d^2} \leq t\right) = P\left(X^2 \leq t^2 - d^2\right) = P\left(|X| \leq \sqrt{t^2 - d^2}\right) \\ &= P\left(-\sqrt{t^2 - d^2} \leq X \leq \sqrt{t^2 - d^2}\right) = \int_{-\sqrt{t^2-d^2}}^{\sqrt{t^2-d^2}} f_X(x)\,dx = \frac{\sqrt{t^2 - d^2}}{a}. \end{aligned}$$

Täthetsfunktionen fås genom derivering

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{t^2 - d^2}}{a}\right] = \frac{t}{a\sqrt{t^2 - d^2}}, \qquad \text{för } d \leq t \leq \sqrt{a^2 + d^2}.$$

4.1 Sannolikhetsfunktionen för (X, Y) ges av tabellen

$p_{X,Y}(j,k)$	j	$k=1$	2	3	4	$p_X(j)$
	0	0.11	0.09	0.07	0.01	0.28
	1	0.07	0.12	0.12	0.02	0.33
	2	0.02	0.05	0.17	0.05	0.29
	3	0.00	0.02	0.04	0.02	0.08
	4	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02
$p_Y(k)$		0.20	0.28	0.41	0.11	

där marginalfördelningarna $p_X(j)$ och $p_Y(k)$ bestämts ur

$$p_X(j) = \sum_{k:(j,k) \in S_{X,Y}} p_{X,Y}(j,k) \qquad p_Y(k) = \sum_{j:(j,k) \in S_{X,Y}} p_{X,Y}(j,k).$$

a) Ur den simultana fördelningen får man att

$$P(X \leq 1, Y \leq 3) = \sum_{\substack{(j,k) \in S_{X,Y}: \\ j \leq 1, k \leq 3}} p_{X,Y}(j,k) = \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=1}^{3} p_{X,Y}(j,k) = .11 + .09 + .07 + .07 + .12 + .12 = 0.58.$$

b) En familj är trångbodd om $(X+2)/Y > 2$ och

$$\begin{aligned}
P(X+2 > 2Y) &= \sum_{\substack{(j,k)\in S_{X,Y}:\\(j+2)>2k}} p_{X,Y}(j,k) = \sum_{j=0}^{4}\sum_{k=1}^{j/2} p_{X,Y}(j,k) \\
&= p_{X,Y}(1,1)+p_{X,Y}(2,1)+p_{X,Y}(3,1)+p_{X,Y}(3,2)+p_{X,Y}(4,1)+p_{X,Y}(4,2) = 0.11
\end{aligned}$$

4.2 a) Med oberoendet mellan X och Y erhålls

$$P(X=3, Y=6) = P(X=3)\,P(Y=6) = p_X(3)p_Y(6) = 0.20\cdot 0.30 = 0.06.$$

b) Vidare, med oberoendet så är $P(X\le 3, Y\le 6) = P(X\le 3)\,P(Y\le 6)$ där

$$P(X\le 3) = P(X=1)+P(X=3) = 0.10+0.20 = 0.30$$

och

$$P(Y\le 6) = P(Y=2)+P(Y=4)+P(Y=6) = 0.10+0.20+0.30 = 0.60.$$

Sålunda,

$$P(X\le 3, Y\le 6) = P(X\le 3)\,P(Y\le 6) = 0.30\cdot 0.60 = 0.18.$$

4.3 För en tvådimensionell stokastisk variabel (X,Y) gäller att

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_{1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{c}{x}\cdot \mathrm{e}^{-x^2y}\,dydx = \int_{1}^{\infty}\frac{c}{x}\left[\mathrm{e}^{-x^2y}\frac{-1}{x^2}\right]_0^{\infty} dx \\
&= \int_{1}^{\infty}\frac{c}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-c}{2x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{2},
\end{aligned}$$

det vill säga $c=2$.

4.4 Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X,Y) har täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Man bestämmer $F_{X,Y}(s,t) = P(X\le s, Y\le t)$ ur

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(s,t) &= \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dydx \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{s}\frac{1}{1+x^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{1+y^2}\,dydx = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{s}\frac{1}{1+x^2}\left[\tan^{-1}(y)\right]_{-\infty}^{t} dx \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{s}\frac{1}{1+x^2}\left[\tan^{-1}(t)+\frac{\pi}{2}\right]dx = \frac{\tan^{-1}(t)+\pi/2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{s}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\tan^{-1}(t)+\pi/2}{\pi^2}\left[\tan^{-1}(x)\right]_{-\infty}^{s} = \frac{(\tan^{-1}(s)+\pi/2)(\tan^{-1}(t)+\pi/2)}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Ur $F_{X,Y}(x,y)$ kan de marginella fördelningsfunktionerna bestämmas

$$F_X(x) = P(X\le x) = P(X\le x, Y\le\infty) = F_{X,Y}(x,\infty) = \frac{\tan^{-1}(x)+\pi/2}{\pi}.$$

På samma sätt erhålls $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \le \infty, Y \le y) = F_{X,Y}(\infty, y) = \frac{\tan^{-1}(y)+\pi/2}{\pi}$. Deriveras de marginella fördelningsfunktionerna erhålls de marginella täthetsfunktionerna:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\frac{\tan^{-1}(x)+\pi/2}{\pi} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

och $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Notera att $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla (x,y) varför de stokastiska variablerna X och Y är oberoende.

4.5 Ur tabellen har man att

$$P(Y = k_1) = P(X = j_1, Y = k_1) + P(X = j_2, Y = k_1) + P(X = j_3, Y = k_1) = .03 + .04 + .03 = 0.10.$$

Med oberoendet fås $P(X = j, Y = k_1) = P(X = j)\,P(Y = k_1)$, $j = j_1, j_2, j_3$, vilket ger

$$\begin{aligned}
P(X = j_1) &= \frac{P(X = j_1, Y = k_1)}{P(Y = k_1)} = \frac{0.03}{0.10} = 0.30 \\
P(X = j_2) &= \frac{P(X = j_2, Y = k_1)}{P(Y = k_1)} = \frac{0.04}{0.10} = 0.40 \\
P(X = j_3) &= \frac{P(X = j_3, Y = k_1)}{P(Y = k_1)} = \frac{0.03}{0.10} = 0.30.
\end{aligned}$$

På samma sätt är

$$P(Y = k_2) = \frac{P(X = j_1, Y = k_2)}{P(X = j_1)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.50$$

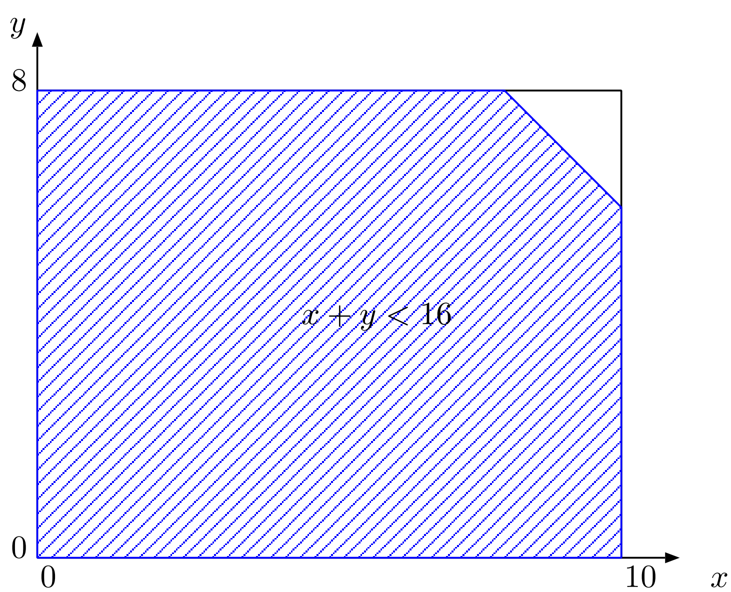
och slutligen

$$P(Y = k_3) = 1 - P(Y \ne k_3) = 1 - (P(Y = k_2) + P(Y = k_1)) = 1 - 0.10 - 0.50 = 0.40.$$

Ur marginalfördelningarna bestäms $P(X = j, Y = k) = P(X = j)\,P(Y = k)$:

	k_1	k_2	k_3
j_1	0.03	0.15	0.12
j_2	0.04	0.20	0.16
j_3	0.03	0.15	0.12

4.6



Paret av väntetider (X, Y) för de två bussarna är likformigt fördelat över rektangeln $[0, 10] \times [0, 8]$.

Då X har $f_X(x) = 1/10$ för $0 \le x \le 10$ och Y har $f_Y(y) = 1/8$ för $0 \le y \le 8$ och X och Y är oberoende så är

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$$

för $(x,y) \in [0,10] \times [0,8]$.

Alternativ 1: Enligt definitionen

$$\begin{aligned} P(X+Y \ge 16) &= \iint_{(x,y):x+y\ge 16} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_8^{10}\int_{16-x}^{8} f_{X,Y}(x,y)\,dydx \\ &= \int_8^{10}\int_{16-x}^{8} \frac{1}{80}\,dydx = \int_8^{10} \frac{x-8}{80}\,dx = \frac{1}{80}\left[\frac{x^2}{2} - 8x\right]_8^{10} = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Ur figuren. Under likformig fördelning att få ett utfall i det omarkerade området, $x+y \ge 16$, ges som förhållandet mellan areorna. Rektangeln har area $10 \cdot 8 = 80$. Triangeln med hörn i $(10,6)$, $(10,8)$ och $(8,8)$ har area $2 \cdot 2/2 = 2$. Sannolikheten är alltså

$$P(X+Y \ge 16) = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}.$$

4.7 Då X har $f_X(x) = 1/4$ för $0 \le x \le 4$ och Y har $f_Y(y) = 1/6$ för $0 \le y \le 6$ och X och Y är oberoende så är

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

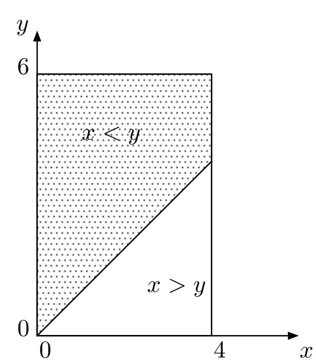
för $(x,y) \in [0,4] \times [0,6]$. Bestäm $P(X < Y)$.

Alternativ 1: Enligt definitionen

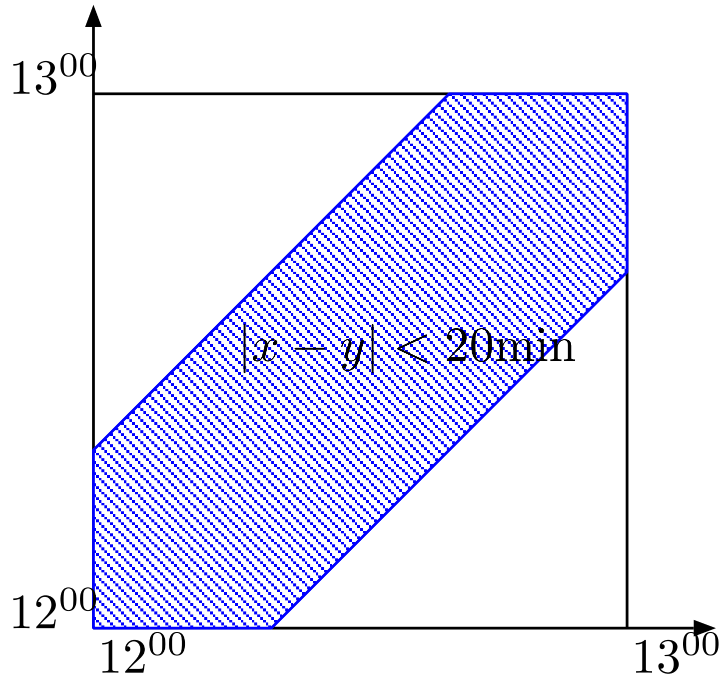
$$\begin{aligned} P(X<Y) &= \iint_{x<y} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_0^4\int_x^6 f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_0^4\int_x^6 \frac{1}{24}\,dydx \\ &= \int_0^4 \frac{6-x}{24}\,dx = \frac{1}{24}\left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Ur figuren. Under likformig fördelning att få ett utfall i det markerade området ges som förhållandet mellan areorna. Rektangeln har area $4 \cdot 6 = 24$. Triangeln med hörn i $(0,0)$, $(4,4)$ och $(4,0)$ har area $4 \cdot 4/2 = 8$. Sannolikheten är alltså

$$P(X<Y) = \frac{24-8}{24} = \frac{2}{3}.$$



4.8



Paret av tider (X, Y) då de två personerna kommer till mötesplatsen är likformigt fördelat över kvadraten med sidlängd 1 timme = 60 minuter.

Med enheten timmar, är $f_X(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $f_Y(y) = 1$, $0 \leq y \leq 1$, och med oberoendet $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = 1 \cdot 1 = 1$ för $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

De två personerna möts om $|X - Y| < 1/3$ timme. Under likformig fördelning att få ett utfall i det markerade området ges som förhållandet mellan areorna. Kvadraten har area $1 \cdot 1 = 1$. Trianglarna med kateter av längd 40 minuter = 2/3 timme har vardera area $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \big/ 2 = \frac{2}{9}$. Alltså är

$$P\left(|X - Y| < \frac{1}{3}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

4.9 Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har simultan täthet

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{1+c}(xy + c)\mathrm{e}^{-(x+y)}$$

för $x \geq 0$, $y \geq 0$.

a) Marginalfördelningarna bestäms ur

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+c}(xy + c)\mathrm{e}^{-(x+y)}\, dy = \frac{1}{1+c}\mathrm{e}^{-x} \int_0^{\infty} (xy + c)e^{-y}\, dy \\
&= \frac{1}{1+c}\mathrm{e}^{-x}\left(\underbrace{\left[(xy + c)e^{-y}(-1)\right]_0^{\infty}}_{=c} + \int_0^{\infty} xe^{-y}\, dy\right) = \frac{1}{1+c}\mathrm{e}^{-x}\left(c + \underbrace{\left[xe^{-y}(-1)\right]_0^{\infty}}_{=x}\right) \\
&= \frac{c+x}{c+1}\mathrm{e}^{-x}. \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+c}(xy + c)\mathrm{e}^{-(x+y)}\, dx = \frac{c+y}{c+1}\mathrm{e}^{-y}.
\end{aligned}$$

b) Då $c = 0$ är

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = x\mathrm{e}^{-x} \cdot y\mathrm{e}^{-y} = xy \cdot \mathrm{e}^{-(x+y)} = f_{X,Y}(x,y)$$

för $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Alltså är $f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x,y)$ för alla x och y så X och Y är oberoende. Om $c \neq 0$ så är $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, det vill säga X och Y är ej oberoende.

4.10 För $x \geq 0$ och $y \geq 0$ är den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{(1+x+y)^3}.$$

Nu är

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} \frac{2}{(1+x+y)^3}\,dy = \left[-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Av symmetriskäl måste X och Y ha samma fördelning så $f_Y(y) = 1/(1+y)^2$ för $y \geq 0$. Notera att $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ så de stokastiska variablerna X och Y är beroende.

b) Den simultana fördelningsfunktionen fås för $s > 0$, $t > 0$ som

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(s,t) &= \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^s\int_0^t \frac{2}{(1+x+y)^3}\,dx\,dy = \int_0^s \left[-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]_0^t dy \\
&= \int_0^s \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1+t+y)^2}\,dy = \left[-\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+t+y}\right]_0^s \\
&= 1 + \frac{1}{1+t+s} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+s}.
\end{aligned}$$

De marginella fördelningsfunktionerna fås som gränsvärden

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= F_{X,Y}(x,\infty) = 1 - \frac{1}{1+x} \\
F_Y(y) &= F_{X,Y}(\infty,y) = 1 - \frac{1}{1+y}.
\end{aligned}$$

Ett sätt att visa att $F_{X,Y}(x,y) > F_X(x)F_Y(y)$ (vilket visar att X och Y är beroende) är följande:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) - F_X(x)F_Y(y) &= \left[1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x+y}\right] - \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\left(1 - \frac{1}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{(1+x)(1+y)} = \frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{1+x+y+xy} > 0
\end{aligned}$$

eftersom $xy > 0$ då $x > 0$ och $y > 0$.

4.11 Från den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1+x+y+cxy}{c+3}\mathrm{e}^{-(x+y)}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,$$

bestäms marginalfördelningen med hjälp av partiell integration

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} \frac{1+x+y+cxy}{c+3}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dy = \left[\frac{1+x+y+cxy}{c+3}\cdot\mathrm{e}^{-(x+y)}(-1)\right]_0^{\infty} \\
&\quad + \int_0^{\infty} \frac{1+cx}{c+3}\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dy = \frac{1+x}{c+3}\mathrm{e}^{-x} + \left[\frac{1+cx}{c+3}\mathrm{e}^{-(x+y)}(-1)\right]_0^{\infty} = \frac{1+x}{c+3}\mathrm{e}^{-x} + \frac{1+cx}{c+3}\mathrm{e}^{-x} \\
&= \frac{2+(c+1)x}{c+3}\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Av symmetriskäl har X och Y samma fördelning så

$$f_Y(y) = \frac{2+(c+1)y}{c+3}\mathrm{e}^{-y}$$

och de stokastiska variablerna är oberoende om $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Högerledet kan skrivas

$$\frac{2+(c+1)x}{c+3}\mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{2+(c+1)y}{c+3}\mathrm{e}^{-y} = \frac{4+2(c+1)x+2(c+1)y+(c+1)^2xy}{(c+3)^2}\mathrm{e}^{-(x+y)}.$$

Identifiering av koefficienter ger att för oberoende så skall

$$\begin{aligned}\frac{4}{(c+3)^2} &= \frac{1}{c+3}\\ \frac{2(c+1)}{(c+3)^2} &= \frac{1}{c+3}\\ \frac{(c+1)^2}{(c+3)^2} &= \frac{c}{c+3}\end{aligned}$$

vilket har lösningen $c = 1$.

4.12 Låt X beskriva tiden tills person A får napp och Y tiden tills B får napp. Modell: X och Y är oberoende och exponentialfördelade med parametrar a resp. b. Då X har $f_X(x) = a\mathrm{e}^{-ax}$ för $x \geq 0$ och Y har $f_Y(y) = b\mathrm{e}^{-by}$ för $y \geq 0$ och X och Y är oberoende så är

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = a\mathrm{e}^{-ax}b\mathrm{e}^{-by}$$

för $(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$. A vinner om A får napp först, det vill säga om $X < Y$. Så $P(\text{A vinner}) = P(X < Y)$ och enligt definitionen

$$\begin{aligned}P(X<Y) &= \iint_{x<y} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_0^\infty \int_x^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_0^\infty \int_x^\infty a\mathrm{e}^{-ax}b\mathrm{e}^{-by}\,dydx\\ &= \int_0^\infty a\mathrm{e}^{-ax}b\left[\mathrm{e}^{-by}\frac{-1}{b}\right]_x^\infty dx = \int_0^\infty a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-bx}\,dx = a\left[\mathrm{e}^{-(a+b)x}\frac{-1}{a+b}\right]_0^\infty = \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

Om $a = 2b$ är sannolikheten $2b/(2b+b) = 2/3$.

4.13 Iakttagelsen att bollen nuddar nätet om bollens centrum är närmre än avståndet r från en tråd, ger att sannolikheten för att inte nudda nät kan skrivas som en kvot mellan träffyta på avstånd r från tråd och hela träffytan.

a) Den totala träffytan har arean $a \cdot a = a^2$, medan ytan på avstånd r från tråden är $(a-2r)^2$. Alltså,

$$P(\{\text{ej nudda nät}\}) = \frac{(a-2r)^2}{a^2} = \left(1 - 2\frac{r}{a}\right)^2.$$

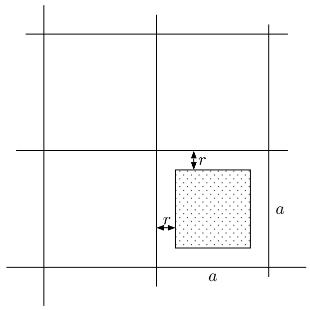
b) En hexagon med sidlängd a kan delas in i 12 trianglar enligt figuren. Triangelns höjd är (m.h.a. Pythagoras) $\sqrt{3}a/2$ så träffytan blir $\sqrt{3}a^2/8$. Ytan på avstånd större än r från triangelns bas är

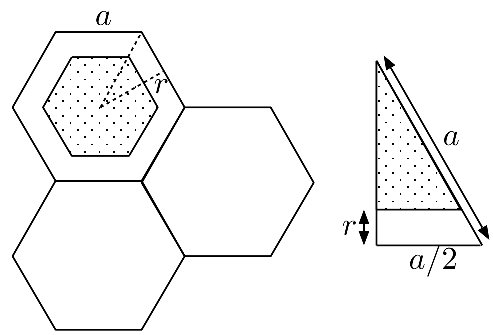
$$(\text{bas}) \cdot (\text{höjd}) \cdot \tfrac{1}{2} = (a/2 - \tfrac{r}{\sqrt{3}})(\sqrt{3}a/2 - r)\tfrac{1}{2}$$

så sannolikheten blir

$$P(\{\text{ej nudda nät}\}) = \frac{(a/2 - \frac{r}{\sqrt{3}})(\sqrt{3}a/2 - r)\frac{1}{2}}{\sqrt{3}a^2/8} = \left(1 - \frac{2r}{\sqrt{3}a}\right)^2.$$

(Om man inser att areorna är proportionerliga mot kvadraterna på hypotenusorna får man direkt kvoten $(a - 2r/\sqrt{3})^2/a^2$.)





4.14 Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har möjliga värden $S_{X,Y} = \{(x, y) : x = 1, 2, \ldots, y = 1, 2, \ldots, x \neq y\}$.

Händelsen $(X, Y) = (x, y)$ där $y < x$ betyder att de $y - 1$ första kasten gav 3:or eller mer, vid kast y erhölls en 2:a, under kast $y + 1, \ldots, x - 1$ erhölls 2:or eller mer och under kast x en 1:a. På grund av oberoende kast har sekvensen sannolikhet

$$\underbrace{\frac{4}{6} \cdots \frac{4}{6}}_{y-1 \text{ st}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6}}_{x-1-y \text{ st}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4^{y-1} 5^{x-1-y}}{6^x}.$$

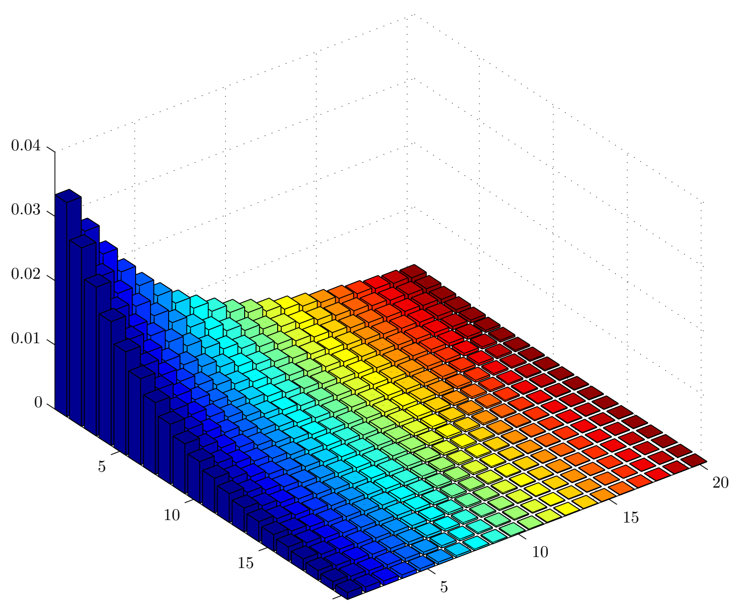
Om $x < y$ har motsvarande sekvens sannolikhet

$$\underbrace{\frac{4}{6} \cdots \frac{4}{6}}_{x-1 \text{ st}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6}}_{y-1-x \text{ st}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4^{x-1} 5^{y-1-x}}{6^y}.$$

Alltså kan den simultana sannolikhetsfunktionen skrivas

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{4^{\min(x,y)-1} \cdot 5^{\max(x,y)-1-\min(x,y)}}{6^{\max(x,y)}} = \frac{1}{20} \left(\frac{4}{5}\right)^{\min(x,y)} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\max(x,y)}$$

för positiva heltal x och y sådana att $x \neq y$.



Den simultana fördelningen för (X, Y), för tydlighets skull ritad som lådor istället för stolpar.

4.15 Med $Z_+ = \max(X, Y)$ där X och Y är oberoende så är

$$F_{Z_+}(t) = P(Z_+ \leq t) = P(\max(X,Y) \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) = P(X \leq t)\, P(Y \leq t) = F_X(t)F_Y(t).$$

Om X och Y har samma fördelning så är

$$F_{Z_+}(t) = F_X(t)F_Y(t) = F_X(t)^2.$$

Här är X (och Y) likformigt fördelade på intervallet $[0, a]$ så för $0 \leq t \leq a$ är

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx = \int_0^t \frac{1}{a}\, dx = \frac{t}{a}$$

och $F_{Z_+}(t) = \frac{t^2}{a^2}$.

På liknande sätt får man att med $Z_- = \min(X, Y)$ där X och Y är oberoende så är

$$\begin{aligned} F_{Z_-}(t) &= P(Z_- \leq t) = 1 - P(Z_- > t) = 1 - P(\min(X,Y) > t) = 1 - P(X > t, Y > t) \\ &= 1 - P(X > t)\, P(Y > t) = 1 - (1 - P(X \leq t))(1 - P(Y \leq t)) \\ &= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)). \end{aligned}$$

Om X och Y har samma fördelning så är

$$F_{Z_+}(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) = 1 - (1 - F_X(t))^2.$$

Här erhålls för $0 \leq t \leq a$ att

$$F_{Z_-}(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^2 = 1 - \frac{(a-t)^2}{a^2} = \frac{(2a-t)t}{a^2}.$$

4.16 De oberoende stokastiska variablerna $X_1, \ldots, X_n$ har täthetsfunktionerna

$$f_{X_i}(x) = \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0$$

med parametrar $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$.

Låt $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Lösningen till problemet bygger på iakttagelsen att om $\min(X_1, \ldots, X_n) > t$ så är *alla* $X_1, \ldots, X_n$ större än t. Alltså,

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t) = 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_n) > t) \\ &= 1 - P(X_1 > t, \ldots, X_n > t) = \{\text{oberoende}\} = 1 - P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq t)) \cdots (1 - P(X_n \leq t)) = 1 - (1 - F_{X_1}(t)) \cdots (1 - F_{X_n}(t)). \end{aligned}$$

För en exponentialfördelad stokastisk variabel är fördelningsfunktionen för $t \geq 0$

$$F_{X_i}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{X_i}(t)\, dx = \int_0^t \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i x}\, dx = \left[(-1)\mathrm{e}^{-\lambda_i x}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i t}.$$

Alltså är

$$F_Z(t) = 1 - (1 - F_{X_1}(t)) \cdots (1 - F_{X_n}(t)) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \cdots \mathrm{e}^{-\lambda_n t} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

där $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, den totala intensiteten. Sålunda är

$$f_Z(t) = \frac{d}{dt} F_Z(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

det vill säga $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$ är exponentialfördelad.

4.17 Med $X_1, \ldots, X_n$ som de oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler som beskriver lampornas brinntider ges belysningens brinntid av $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Samma lösning som i uppgift 4.16 ger att Y är exponentialfördelad med intensitet $\lambda_Y = \sum_{i=1}^n \lambda_{X_i} = \sum_{i=1}^n \lambda = n\lambda$, det vill säga

$$f_Z(t) = \lambda_Y \mathrm{e}^{-\lambda_Y t} = n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda t} = 20\lambda \mathrm{e}^{-20\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

4.18 En stokastisk variabel X med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{125 - x}{450}, \quad 95 \leq x \leq 125,$$

har fördelningsfunktion för $t \in [95,\ 125]$

$$F_X(t) = P\left(X \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx = \int_{95}^{t} \frac{125 - x}{450}\, dx = \left[\frac{250x - x^2}{900}\right]_{95}^{t} = \frac{250t - t^2 - 14725}{900}.$$

Med $n = 8$ löpare, vars tider $X_1, \ldots, X_n$ beskrivs av oberoende stokastiska variabler, är tiden då den sista kommer i mål

$$Z = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

och tiden då den första kommer i mål $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

Med Z enligt ovan så har Z fördelningsfunktion

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P\left(Z \leq t\right) = P\left(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq t\right) = P\left(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t\right) = \{\text{oberoende}\} \\ &= P\left(X_1 \leq t\right) \cdots P\left(X_n \leq t\right) = F_{X_1}(t) \cdots F_{X_n}(t). \end{aligned}$$

På samma sätt har Y fördelningsfunktion

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P\left(Y \leq t\right) = 1 - P\left(Y > t\right) = 1 - P\left(\min(X_1, \ldots, X_n) > t\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 > t, \ldots, X_n > t\right) = \{\text{oberoende}\} = 1 - P\left(X_1 > t\right) \cdots P\left(X_n > t\right) \\ &= 1 - \left(1 - P\left(X_1 \leq t\right)\right) \cdots \left(1 - P\left(X_n \leq t\right)\right) = 1 - \left(1 - F_{X_1}(t)\right) \cdots \left(1 - F_{X_n}(t)\right). \end{aligned}$$

Nu är händelsen $\{\text{alla i mål efter 100 minuter}\} = \{Z \leq 100\}$ så den sökta sannolikheten är

$$P\left(Z \leq 100\right) = F_Z(100) = F_{X_1}(100) \cdots F_{X_n}(100) = \left[F_X(100)\right]^8 = \left(\frac{11}{36}\right)^8 \approx 7.60 \cdot 10^{-5}.$$

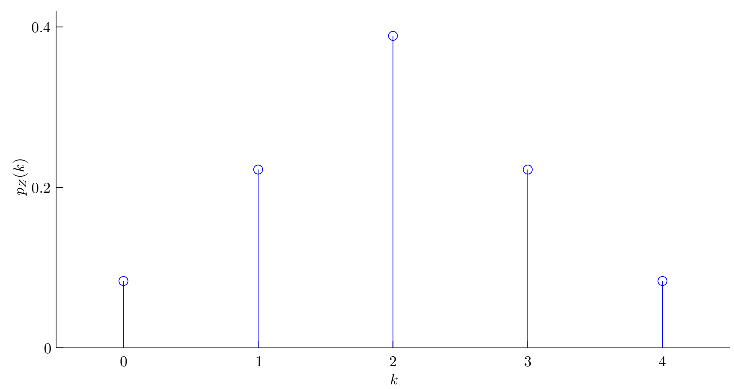
På liknande sätt är händelsen $\{\text{ingen i mål efter 100 minuter}\} = \{Y > 100\}$ så den sökta sannolikheten är

$$P\left(Y > 100\right) = 1 - F_Y(100) = \left(1 - F_{X_1}(100)\right) \cdots \left(1 - F_{X_n}(100)\right) = \left(1 - F_X(100)\right)^8 = \left(\frac{25}{36}\right)^8 \approx 0.0541.$$

4.19 Om X och Y är stokastiska variabler med möjliga värden $S_X = \{0, 1, 2\}$ respektive $S_Y = \{0, 1, 2\}$ så ges de möjliga värdena på Z av $S_Z = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

För dessa värden har vi att

$$
\begin{aligned}
p_Z(0) &= P(Z=0) = P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0)\,P(Y=0) = \frac{3}{36} \\
p_Z(1) &= P(Z=1) = P(X+Y=1) = P(\{X=0, Y=1\} \cup \{X=1, Y=0\}) \\
&= P(X=0)\,P(Y=1) + P(X=1)\,P(Y=0) = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{8}{36} \\
p_Z(2) &= P(Z=2) = P(X+Y=2) = P(\{X=0, Y=2\} \cup \{X=1, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\}) \\
&= P(X=0)\,P(Y=2) + P(X=1)\,P(Y=1) + P(X=2)\,P(Y=0) = \frac{14}{36} \\
p_Z(3) &= P(Z=3) = P(X+Y=3) = P(\{X=1, Y=2\} \cup \{X=2, Y=1\}) \\
&= P(X=1)\,P(Y=2) + P(X=2)\,P(Y=1) = \frac{8}{36} \\
p_Z(4) &= P(Z=4) = P(X+Y=4) = P(X=2, Y=2) = P(X=2)\,P(Y=2) = \frac{3}{36}.
\end{aligned}
$$



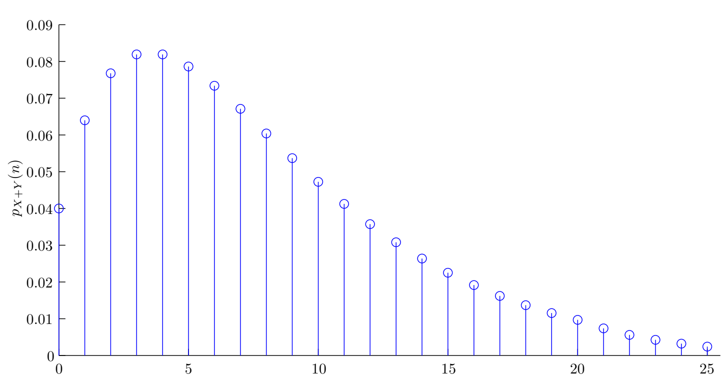
Sannolikhetsfunktionen $p_Z(k)$ för $Z = X + Y$.

4.20 Låt X och Y vara oberoende och geometriskt fördelade med parameter p, det vill säga

$$p_X(k) = p_Y(k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Då ges de möjliga värdena på $Z = X + Y$ av $S_Z = \{0, 1, 2, \ldots\}$ där för $n \in S_Z$ är

$$
\begin{aligned}
p_Z(n) &= P(Z=n) = P(X+Y=n) = P\left(\bigcup_k \{X=k, Y=n-k\}\right) \\
&= \sum_k P(X=k)\,P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} (1-p)^k p \cdot (1-p)^{n-k} p = (n+1)(1-p)^n p^2.
\end{aligned}
$$



Sannolikhetsfunktionen för $X + Y$ där X och Y är oberoende Geo(0.2)-fördelade stokastiska variabler.

4.21 Låt p vara sannolikheten att spelare A vinner en spelomgång

Om X beskriver antalet spelomgångar som spelare A vinner av $n = 5$ oberoende spelomgångar ges möjliga värden på X av $S_X = \{0, 1, \dots, 5\}$. Att händelsen $\{X = k\}$ inträffar betyder att man sett en sekvens av n spelomgångar varav k vanns av spelare A, och om vi antar att i varje spelomgång vinner någon av spelarna, så vanns $n - k$ spelomgångar av spelare B. En sekvens av k A och $n - k$ B

$$\underbrace{\text{AAA}\cdots\text{A}}_{k \text{ st}}\underbrace{\text{BB}\cdots\text{B}}_{n-k \text{ st}}$$

har sannolikhet $p^k(1-p)^{n-k}$. Vi har $\binom{n}{k}$ sådana sekvenser så

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

för $k = 0, 1, \dots, n$.

Om A och B har samma vinstsannolikhet, det vill säga $p = 1 - p = 1/2$ så är

$$P(X = k) = \binom{n}{k}(1/2)^k(1/2)^{n-k} = \binom{n}{k}2^{-n}$$

för $k = 0, 1, \dots, n$.

Med Y som antalet spelomgångar som spelare B vinner är $Y = n - X$ och $Z = X - Y = X - (n - X) = 2X - n$, det vill säga möjliga värden på $Z = X - Y$ ges av $S_Z = \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\} = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ och för $k \in S_Z$ är

$$p_Z(k) = P(Z = k) = P(2X - n = k) = P\left(X = \frac{k+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}}2^{-n}.$$

c) Den sökta skillnaden är $|Z|$ där de möjliga värdena är $S_{|Z|} = \{1, 3, 5\}$ och för $k \in S_{|Z|}$ är

$$P(|Z| = k) \quad = \quad P(Z = k) + P(Z = -k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}}2^{-n} + \underbrace{\binom{n}{\frac{-k+n}{2}}}_{=\binom{n}{(n+k)/2}}2^{-n} = 2\binom{n}{\frac{k+n}{2}}2^{-n} = \binom{n}{\frac{k+n}{2}}2^{-4}.$$

4.22 De stokastiska variablerna X och Y är oberoende och likformigt fördelade på talen $\{1, 2, \dots, n\}$.

Då ges de möjliga värdena på $X - Y$ av $S_{X-Y} = \{-n+1, -n+2, \dots, n-2, n-1\}$ och för $|X - Y|$ är motsvarande $S_{|X-Y|} = \{0, 1, \dots, n-2, n-1\}$. För $k > 0$ ur denna mängd är

$$\begin{aligned} P(|X - Y| = k) &= P(X - Y = k) + P(X - Y = -k) = P(X - Y = k) + P(Y - X = k) \\ &= 2P(X - Y = k) \end{aligned}$$

eftersom X och Y har samma fördelning. För $k = 0$ så är

$$P(|X - Y| = 0) = P(X = Y) = P\left(\bigcup_i \{X = i, Y = i\}\right) = \sum_i P(X = i)P(Y = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

För $k = 1, 2, \dots, n - 1$ är

$$P(X - Y = k) = \sum_i P(X = i, Y = i - k) = \sum_i P(X = i)P(Y = i - k) = \sum_{i=1+k}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-k}{n^2}$$

så

$$p_{|X+Y|}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{om } k = 0 \\ \frac{2(n-k)}{n^2} & \text{om } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

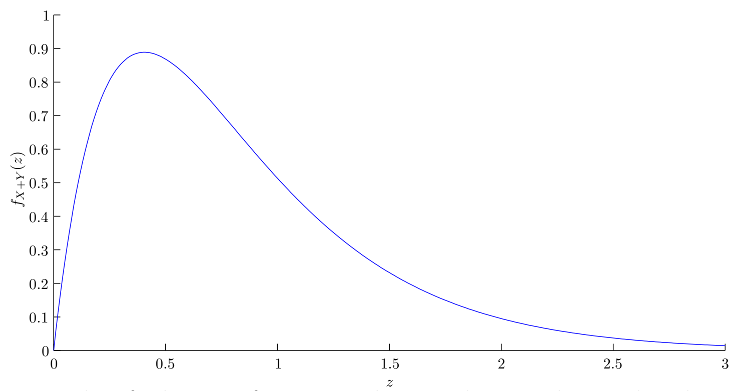
4.23 Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler med tätheter

$$f_X(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad f_Y(x) = 3\mathrm{e}^{-3y}$$

för $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Summan $X+Y$ har möjliga värden $[0, \infty)$ och för $z \geq 0$ är

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, z-u)\, du = \int_0^z f_X(u) f_Y(z-u)\, du = \int_0^z 2\mathrm{e}^{-2u} 3\mathrm{e}^{-3(z-u)}\, du \\ &= 6\mathrm{e}^{-3z} \int_0^z \mathrm{e}^u\, du = 6\mathrm{e}^{-3z} \left[\mathrm{e}^u\right]_0^z = 6\mathrm{e}^{-3z} \left[\mathrm{e}^z - 1\right]. \end{aligned}$$



Täthetsfunktionen för $X+Y$ där X och Y är oberoende och exponentialfördelade med olika intensiteter.

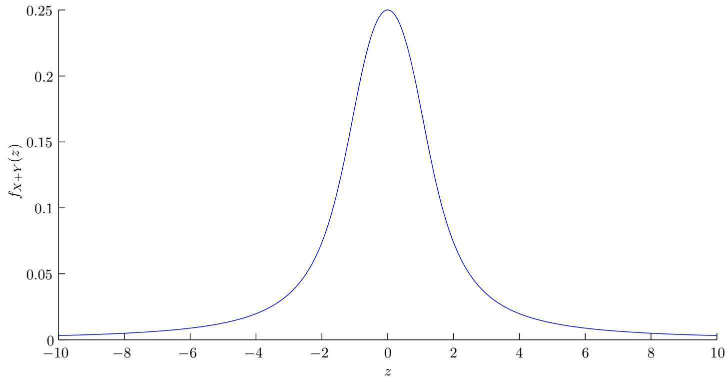
4.24 Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler med tätheter

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \text{ (Cauchy)} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{2} \text{ (Likformig)}$$

för $-\infty < x < \infty$ och $-1 < y < 1$.

De möjliga värdena på $X+Y$ ges av $S_{X+Y} = (-\infty, \infty)$ och

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-u, u)\, du = \int_{-1}^{1} f_X(z-u) f_Y(u)\, du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(z-u)^2} \cdot \frac{1}{2}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\tan^{-1}(z-u)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1}(z+1) - \tan^{-1}(z-1)\right]. \end{aligned}$$



Täthetsfunktionen för $X+Y$ där X och Y är oberoende och X är Cauchyfördelad och Y är likformigt fördelad på intervallet $(-1,\ 1)$.

4.25 Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler med tätheter

$$f_X(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ (Exponential)} \qquad f_Y(y) = 1 \text{ (Likformig)}$$

för $x \geq 0$ och $0 \leq y \leq 1$. De möjliga värdena på $X+Y$ ges av $S_{X+Y} = [0, \infty)$ och

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-u, u)\, du = \int_0^{\min(1,z)} f_X(z-u) f_Y(u)\, du$$

Om $z > 1$ så är

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(z-u)} \cdot 1\, du = \mathrm{e}^{-z} \left[\mathrm{e}^u\right]_0^1 = [\mathrm{e} - 1]\, \mathrm{e}^{-z},$$

annars för $0 \leq z \leq 1$ är

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z \mathrm{e}^{-(z-u)} \cdot 1\, du = \mathrm{e}^{-z} \left[\mathrm{e}^u\right]_0^z = 1 - \mathrm{e}^{-z}.$$

Dessa två uttryck kan sammantaget skrivas som

$$f_{X+Y}(z) = \left[\mathrm{e}^{\min(z,1)} - 1\right] \mathrm{e}^{-z}.$$

4.26 Tåget ankommer stationen X minuter efter 12:00 och lämnar stationen $X+Y$ minuter efter 12:00, dock tidigast 12:07.

Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler där X är likformigt fördelad på $[-2,\ 3]$ och Y är likformigt fördelad på $[3,\ 5]$, det vill säga X och Y har tätheter

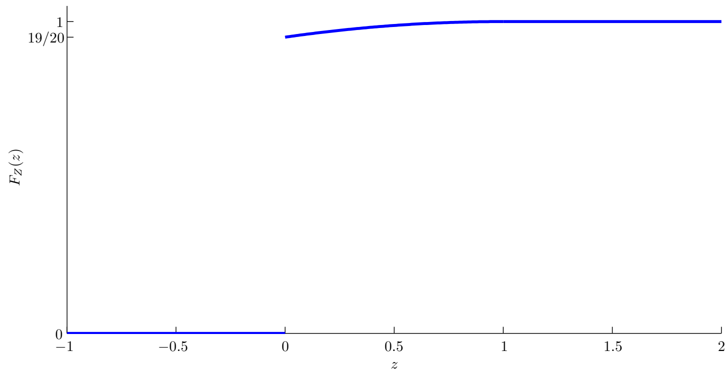
$$f_X(x) = \frac{1}{5},\ -2 \leq x \leq 3 \quad f_Y(y) = \frac{1}{2},\ 3 \leq y \leq 5. \qquad \Rightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{10}.$$

Om $X+Y \leq 7$ kommer tåget att avgå i tid klockan 12:07, det vill säga förseningen Z kan skrivas $Z = \max(X+Y-7, 0)$. Möjliga värden på Z ges av intervallet $S_Z = [0,\ 1]$. För $0 \leq z \leq 1$ så uppfyller förseningen Z

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= P(X+Y-7 > z) = \iint_{(x,y):x+y>z+7} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = \int_{z+2}^{3} \int_{z+7-x}^{5} \frac{1}{10}\, dy\, dx \\ &= \int_{z+2}^{3} \frac{x-(z+2)}{10}\, dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^2}{2} + (z+2)x\right]_{z+2}^{3} = \frac{(1-z)^2}{20} \end{aligned}$$

så

$$F_Z(z) = 1 - P(Z > z) = \begin{cases} 0 & \text{om } z < 0 \\ 1 - \frac{(1-z)^2}{20} & \text{om } 0 \leq z < 1 \\ 1 & \text{om } z \geq 1. \end{cases}$$



Fördelningsfunktionen för förseningen Z. Notera att detta är en blandfördelning med en diskret komponent, fördelningsfunktionen gör ett språng i $z = 0$ motsvarande $P(Z = 0)$, och en kontinuerliga komponent där $F_Z(z)$ växer kontinuerligt.

4.27 Låt X och Y vara oberoende och Poissonfördelade med parametrar μ_A respektive μ_B. Eftersom $X \geq 0$ och $Y \geq 0$ så är de möjliga värdena på Y, betingat att $X + Y = n$, $0, 1, \ldots, n$. För $k = 0, 1, \ldots, n$ är enligt definitionen av betingad sannolikhet och oberoende stokastiska variabler

$$P(Y = k | X + Y = n) = \frac{P(Y = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(Y = k, X = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(Y = k)\, P(X = n - k)}{P(X + Y = n)}.$$

Fördelningen för $X + Y$ fås med hjälp Binomialteoremet

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= P\left(\bigcup_k \{X = k, Y = n - k\}\right) = \sum_k P(X = k, Y = n - k) = \{\text{oberoende}\} \\ &= \sum_k P(X = k)\, P(Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_B^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu_B} \cdot \frac{\mu_A^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\mu_A} \\ &= \frac{1}{n!} \mathrm{e}^{-(\mu_A + \mu_B)} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \mu_B^k \mu_A^{n-k}}_{=(\mu_A + \mu_B)^n} = \frac{(\mu_A + \mu_B)^n}{n!} \mathrm{e}^{-(\mu_A + \mu_B)} = \frac{\mu^n}{n!} \mathrm{e}^{-\mu}, \end{aligned}$$

det vill säga $X + Y$ är Poissonfördelad med parameter $\mu = \mu_A + \mu_B$. Vidare så är enligt definitionen av betingad sannolikhet

$$\begin{aligned} P(Y = k | X + Y = n) &= \frac{\frac{\mu_B^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu_B} \frac{\mu_A^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\mu_A}}{\frac{(\mu_A + \mu_B)^n}{n!} \mathrm{e}^{-(\mu_A + \mu_B)}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\mu_B^k \mu_A^{n-k}}{(\mu_A + \mu_B)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B}\right)^k \left(\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \end{aligned}$$

det vill säga den betingade fördelningen för Y, givet $X + Y = n$, är $\mathrm{Bin}(n, p)$,där $p = \mu_B / (\mu_A + \mu_B)$.

4.28 En partikel registereras med sannolikhet p oberoende av tidigare partiklar. Med X som antalet utsöndrade partiklar, X är Poissonfördelad med parameter μ, så uppfyller antalet registrerade partiklar Y

$$P(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p(1 - p)^{n-k},$$

det vill säga Y är, betingad $X = n$, Binomialfördelad.

Med lagen om total sannolikhet fås

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_n P(Y=k|X=n)\,P(X=n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{\mu^n}{n!} \mathrm{e}^{-\mu} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\mu(1-p))^{n-k} = \frac{(\mu p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu(1-p))^n}{n!}}_{=\mathrm{e}^{\mu(1-p)}} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} \mathrm{e}^{\mu(1-p)} = \frac{(\mu p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu p}, \end{aligned}$$

det vill säga Y är Poissonfördelad med parameter μp.

4.29 Marginalfördelningarna bestäms för $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-y}\,dy = \left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_x^{\infty} = \mathrm{e}^{-x},$$

det vill säga exponentialfördelad med intensitet 1, och

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{y} \mathrm{e}^{-y}\,dx = y\mathrm{e}^{-y}$$

(en Gammafördelning).

Den betingade tätheten för Y, givet $X = x$, ges för $0 \le x \le y$ av

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-(y-x)}.$$

c) Den betingade tätheten för $Y - x$, givet $X = x$, ges för $y \ge 0$ av

$$f_{Y-x|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,x+y)}{f_X(x)} = \frac{\mathrm{e}^{-(y+x)}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-y},$$

det vill säga $Y - x$ är exponentialfördelad, givet $X = x$. Sålunda,

$$f_{Y-X}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y-X|X=x}(y) f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y} f_X(x)\,dx = \mathrm{e}^{-y} \int_0^{\infty} f_X(x)\,dx = \mathrm{e}^{-y}$$

skillnaden $Y - X$ är exponentialfördelad med parameter 1.

Låt X_1 och X_2 vara oberoende och exponentialfördelade med parameter 1. Låt $X = X_1$ och $Y = X_1 + X_2$. Då är den simultana fördelningen för $0 \le x \le y$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X_1,X_1+X_2}(x,y) = f_{X_1,X_2}(x,y-x) = \{\text{oberoende}\} = f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-(y-x)} = \mathrm{e}^{-y}.$$

4.30 Låt X vara (den stokastiska) sannolikheten att apparaten går sönder under garantitiden. Möjliga värden på X är $S_X = [0,1]$ och

$$f_X(x) = 2(1-x) \qquad 0 \le x \le 1.$$

Låt A vara händelsen att en på måfå vald apparat håller garantitiden ut. Då är

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x)\,f_X(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\cdot 2(1-x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x)^2\,dx = 2\left[\frac{-(1-x)^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5.1 Lotterna i lotteriet fördelas enligt

vinstbelopp (k kr)	0	5	20	100
antal lotter	964	30	5	1
$P(X = k)$	0.964	0.030	0.005	0.001

Låt X beskriva vinstbeloppet av en på måfå vald lott. De möjliga värdena på X är $S_X = \{0, 5, 20, 100\}$. Det förväntade vinstbeloppet är

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k kP(X = k) \\ &= 0 \cdot P(X = 0) + 5 \cdot P(X = 5) + 20 \cdot P(X = 20) + 100 \cdot P(X = 100) \\ &= 0.35. \end{aligned}$$

Variansen kan beräknas på två sätt:

Alternativ 1: Ur definitionen

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_k (k - 0.35)^2 P(X = k) \\ &= (0 - 0.35)^2 \cdot P(X = 0) + (5 - 0.35)^2 \cdot P(X = 5) + (20 - 0.35)^2 \cdot P(X = 20) \\ &\quad + (100 - 0.35)^2 \cdot P(X = 100) \\ &= 12.628. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Via

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \sum_k k^2 P(X = k) \\ &= 0^2 \cdot P(X = 0) + 5^2 \cdot P(X = 5) + 20^2 \cdot P(X = 20) + 100^2 \cdot P(X = 100) \\ &= 12.75 \end{aligned}$$

och sedan

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 12.75 - 0.35^2 = 12.628.$$

Standardavvikelsen fås till $D(X) = \sqrt{V(X)} = 3.5535$.

Nettovinsten Y ges av

$$Y = X - 0.50.$$

Väntevärdet och variansen för Y kan bestämmas på tre sätt.

Alternativ 1: Ur fördelningen för nettovinsten Y. De möjliga värdena är $\{-0.5,\ 4.5,\ 19.5,\ 99.5\}$ med sannolikheter 0.964, 0.030, 0.005, 0.001 respektive.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_k kP(Y = k) \\ &= (-0.5) \cdot P(Y = -0.5) + 4.5 \cdot P(Y = 4.5) + 19.5 \cdot P(Y = 19.5) \\ &\quad + 99.5 \cdot P(Y = 99.5) = -0.15 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left((Y - E(Y))^2\right) = \sum_k (k + 0.15)^2 P(Y = k) \\ &= (-0.5 + 0.15)^2 \cdot P(Y = -0.5) + \cdots + (99.5 + 0.15)^2 \cdot P(Y = 99.5) = 12.628. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Via fördelningen för X.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X-0.50) = \sum_k (k-0.50)P(X=k) \\ &= (0-0.50)P(X=0)+\cdots+(100-0.50)P(X=100) = -0.15 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left((Y-E(Y))^2\right) = E\left(((X-0.5)+0.15)^2\right) = E\left((X-0.35)^2\right) \\ &= \sum_k (k-0.35)^2 P(X=k) = 12.628. \end{aligned}$$

Alternativ 3: Via lineariteten för väntevärden.

$$E(Y) = E(X-0.50) = E(X) - 0.50 = 0.35 - 0.50 = -0.15$$

och

$$V(Y) = V(X-0.50) = V(X) = 12.628.$$

5.2 Uppgiften kan lösas på två sätt.

Alternativ 1: Låt X beskriva antalet steg som en löpare flyttar. Då är

tärningsresultat	1	2	3	4	5	6
antal steg	6	2	3	4	5	6

De möjliga värdena på X ges av $S_X = \{2,3,4,5,6\}$ där $p_X(k) = P(X=k) = 1/6$ för $k = 2,\ldots,5$ och $p_X(6) = P(X=6) = 1/6+1/6 = 1/3$.

Väntevärdet för X är enligt definitionen

$$E(X) = \sum_k k p_X(k) = 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + \cdots + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{3}.$$

Alternativ 2: Låt X beskriva resultatet av tärningskastet. Möjliga värden på X är $\{1,2,\ldots,6\}$ och $p_X(k) = 1/6$ för $k = 1,\ldots,6$. Låt $g(x)$ vara funktionen $g: S_X \to \{2,3,\ldots,6\}$ given av:

tärningsresultat (x)	1	2	3	4	5	6
antal steg $g(x)$	6	2	3	4	5	6

Då är

$$E(g(X)) = \sum_k g(k)p_X(k) = 6\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + \cdots + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{13}{3}.$$

5.3 Mätinstrumentet ger ett mätfel X med täthet $f_X(x) = 100(1-100|x|)$ för $-0.01 \le x \le 0.01$. Då är

$$\begin{aligned} E(X) &= \int x\, f_X(x)\, dx = \int_{-0.01}^{0.01} x\cdot 100(1-100|x|)\, dx \\ &= \{\text{Symmetriskt intervall, udda integrand}\} = 0. \end{aligned}$$

Vidare så är

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X-E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) = \int x^2\, f_X(x)\, dx = \int_{-0.01}^{0.01} x^2\cdot 100(1-100|x|)\, dx \\ &= \{\text{Symmetriskt intervall, jämn integrand}\} = 2\int_0^{0.01} x^2\cdot 100(1-100x)\, dx \\ &= 200\left[\frac{x^3}{3} - 100\frac{x^4}{4}\right]_0^{0.01} = \frac{10^{-4}}{6} \end{aligned}$$

så
$$D\,(X) = \sqrt{V\,(X)} = 10^{-2}/\sqrt{6}.$$

5.4 Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_X(x) = 2x/a^2$, $0 \le x \le a$. Då är
$$E\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^a x \cdot \frac{2x}{a^2} = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\cdot\left[\frac{a^3-0}{3}\right] = \frac{2}{3}\,a.$$

5.5 Låt X vara en diskret stokastisk variabel med möjliga värden givna av $S_X = \{1,2,3,\ldots\}$ och
$$p_X(k) = P\,(X = k) = \frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}, \quad k = 1,2,\ldots$$

Notera att detta är en giltig fördelning: $p_X(k) \ge 0$ för $k \in S_X$ och
$$\sum_{k\in S_X} p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{=\pi^2/6} = \frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = 1.$$

För denna fördelning är
$$\sum_{k\in S_X} k p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{6}{\pi^2\,k^2} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$
eftersom den harmoniska serien är divergent, alltså existerar inte väntevärdet $E\,(X)$ som annars hade definierats av vänsterledet.

5.6 Låt X vara tiden som en bil parkeras i parkeringshuset. De möjliga värdena för X ges av intervallet $S_X = [0,\infty)$ och X har täthet $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}$, det vill säga X är exponentialfördelad med parameter 1.

Låt Y beskriva kostnaden för att parkera en bil. Då är $Y = 10 + 5X$. Här följer tre alternativ för att bestämma $E\,(Y)$.

Alternativ 1: Via fördelningen för Y. De möjliga värdena för $Y = 10+5X$ ges av $S_Y = [10,\ \infty)$. För $t \in S_Y$ så är fördelningsfunktionen för Y
$$F_Y(t) = P\,(Y \le t) = P\,(10+5X \le t) = P\,(X \le (t-10)/5) = F_X((t-10)/5).$$

Deriveras denna fås tätheten
$$f_Y(t) = \frac{d}{dt}F_Y(t) = \frac{d}{dt}F_X((t-10)/5) = f_X((t-10)/5)\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-10)}.$$
för $t \ge 10$. Med denna täthet bestäms väntevärdet medelst partiell integration.
$$\begin{aligned} E\,(Y) &= \int t f_Y(t)\,dt = \int_{10}^{\infty} t\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-10)}\,dt = \underbrace{\left[-t\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-10)}\right]_{10}^{\infty}}_{=10} + \int_{10}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-10)}\,dt \\ &= 10 + \left[-5\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-10)}\right]_{10}^{\infty} = 10 + [5-0] = 15 \text{ kr.} \end{aligned}$$

Alternativ 2: Via fördelningen för X. Eftersom $E\,(g(X)) = \int g(x) f_X(x)\,dx$ så är via partiell integration
$$\begin{aligned} E\,(Y) &= E\,(5+10X) = \int_x (5+10x) f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty}(5+10x)\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= \underbrace{\left[-(5+10x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty}}_{=5} + \int_0^{\infty} 10\mathrm{e}^{-x}\,dx = 5 + 10\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 5+10 = 15 \text{ kr.} \end{aligned}$$

Alternativ 3: Via $E(X)$ och räknelagarna för väntevärden. För X gäller att

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx = \underbrace{\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 1.$$

Alltså

$$E(Y) = E(10 + 5X) = 10 + 5E(X) = 10 + 5 = 15 \text{ kr}.$$

5.7 Låt X vara en stokastisk variabel med täthet $f_X(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$ för $x \geq 0$. Då är

$$E\left(\mathrm{e}^X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\, f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^x\, 2\mathrm{e}^{-2x}\, dx = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = 2\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = 2.$$

Kommentar: Funktionen $m_X(s) = E\left(\mathrm{e}^{sX}\right)$ kallas för den momentgenererande funktionen till den stokastiska variabeln X. Här beräknades $m_X(1)$.

5.8 Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktion $F_X(x) = 1 - (1+x)^{-a}$ för $x \geq 0$ och en parameter $a > 0$. Här följer två alternativ för att beräkna $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Alternativ 1: Låt $Y = \frac{1}{1+X}$. Då ges de möjliga värdena för Y av $S_Y = (0,\ 1]$ och för $t \in S_Y$ är

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P\left(\frac{1}{1+X} \leq t\right) = P\left(X \geq \frac{1}{t} - 1\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{t} - 1\right) \\ &= 1 - \left[1 - \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^{-a}\right] = t^a. \end{aligned}$$

Då har Y täthetsfunktion

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = a t^{a-1}, \qquad 0 < t \leq 1,$$

och väntevärde

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f_Y(t)\, dt = \int_0^1 t \cdot a t^{a-1}\, dt = a\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{a}{a+1}.$$

Alternativ 2: Deriveras fördelningsfunktionen för X fås

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 0 - (-a)(1+x)^{-a-1} = a(1+x)^{-a-1}, \quad x \geq 0.$$

Nu kan väntevärdet beräknas enligt

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x} \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{a}{(1+x)^{a+1}}\, dx = a\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^{a+2}}\, dx \\ &= a\left[\frac{1}{(1+x)^{a+1}} \frac{-1}{a+1}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{a+1}. \end{aligned}$$

5.9 Om X är en stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_X(x) = \frac{1}{10}$ då $-5 \leq x \leq 5$, det vill säga X är likformigt fördelad på intervallet $[-5,\ 5]$, så är

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{-5}^{5} g(x)\frac{1}{10}\, dx = \int_{-5}^{0} (-1)\frac{1}{10}\, dx + \int_0^5 2\frac{1}{10}\, dx = 5 \cdot \frac{-1}{10} + 5 \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{2}.$$

5.10 Låt X beskriva mängden vätska som tappas upp. Då är

$$f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad x \geq 0.$$

Mängden vätska i kärlet beskrivs av den stokastiska variabeln $g(X)$ där funktionen $g(x)$ är

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{om } 0 \leq x \leq a \\ a & \text{om } x > a. \end{cases}$$

Alternativ 1: Den genomsnittliga vätskemängden i kärlet är då

$$\begin{aligned} E\left(g(X)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} g(x)\, \frac{1}{(1+x)^2}\, dx \\ &= \int_0^a x \cdot \frac{1}{(1+x)^2}\, dx + \int_a^{\infty} a \cdot \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \int_1^{a+1} \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\, dy + a\left[\frac{-1}{1+x}\right]_a^{\infty} \\ &= \left[\ln(y) + \frac{1}{y}\right]_1^{a+1} + \frac{a}{1+a} = \ln(a+1). \end{aligned}$$

Alternativ 2: Med $Y = g(X)$ så ges de möjliga värdena på Y av $S_Y = [0,\ a]$. Variabeln Y är en blandfördelning med en diskret komponent,

$$P\left(Y = a\right) = P\left(X \geq a\right) = \int_a^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_a^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{1+a},$$

och en kontinuerlig komponent

$$f_Y(x) = f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad 0 \leq x < a.$$

Väntevärdet beräknas som

$$\begin{aligned} E\left(Y\right) &= aP\left(Y = a\right) + \int_0^a x f_Y(x)\, dx = a \cdot \frac{1}{1+a} + \int_0^a \frac{x}{(1+x)^2}\, dx = \frac{a}{1+a} + \int_1^{a+1} \frac{z-1}{z^2}\, dz \\ &= \frac{a}{1+a} + \left[\ln(z) + \frac{1}{z}\right]_1^{a+1} = \ln(a+1). \end{aligned}$$

5.11 Om $E\left(X\right) = 81$ och $V\left(X\right) = 81$ är standardavvikelsen $D\left(X\right) = \sqrt{V\left(X\right)} = \sqrt{81} = 9$ och variationskoefficienten

$$\frac{D\left(X\right)}{E\left(X\right)} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} \approx 11.1\%.$$

5.12 Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktion $f_X(x) = 3x^{-4}$ för $x \geq 1$. Då är väntevärdet

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}\, dx = 3\left[\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{2}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{2}.$$

Variansen kan beräknas på två sätt.

Alternativ 1: Ur definitionen:

$$\begin{aligned} V\left(X\right) &= E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E\left(X\right)\right)^2 f_X(x)\, dx = \int_1^{\infty} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{x^4}\, dx \\ &= \int_1^{\infty} \frac{3\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)}{x^4}\, dx = 3\left[\frac{-1}{x}^2 - \frac{-3}{2x^2} + \frac{-3}{4x^3}\right]_1^{\infty} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Genom att först beräkna

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx = \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\, dx = 3\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\infty} = 3$$

och sedan utnyttja

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

5.13 Låt X ha täthetsfunktion $f_X(x) = 2x$ för $0 \le x \le 1$. Då är

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 2x\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Vidare,

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

så

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

varför $\sigma = D(X) = \sqrt{V(X)} = 1/\sqrt{18}$.

Sannolikheterna i b) och c) kan beräknas på två sätt:

Alternativ 1:

$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) &= \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+\sigma} f_X(x)\, dx = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+\sigma} 2x\, dx = \left[x^2\right]_{\mu-2\sigma}^{\mu+\sigma} = (\mu+\sigma)^2 - (\mu-2\sigma)^2 \\ &= ((\mu+\sigma) - (\mu-2\sigma))((\mu+\sigma) + (\mu-2\sigma)) = 3\sigma(2\mu - \sigma) \\ &= \frac{3}{\sqrt{18}}\left(2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right) = \frac{4\sqrt{2}-1}{6}. \end{aligned}$$

Den andra sannolikheten bestäms på samma sätt. Notera att $\mu + 2\sigma > 1$.

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma) &= \int_{\mu-\sigma}^{\mu+2\sigma} f_X(x)\, dx = \int_{\mu-\sigma}^{1} 2x\, dx = \left[x^2\right]_{\mu-\sigma}^{1} \\ &= 1 - (\mu-\sigma)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Genom att först bestämma fördelningsfunktionen för X. För $t \in [0,\ 1]$ är

$$F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx = \int_0^t 2x\, dx = \left[x^2\right]_0^t = t^2.$$

Sedan bestäms sannolikheterna enligt, notera att $0 \le \mu - 2\sigma, \mu + \sigma \le 1$,

$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma) &= F_X(\mu+\sigma) - F_X(\mu-2\sigma) = (\mu+\sigma)^2 - (\mu-2\sigma)^2 \\ &= ((\mu+\sigma) - (\mu-2\sigma))((\mu+\sigma) + (\mu-2\sigma)) = 3\sigma(2\mu - \sigma) \\ &= \frac{3}{\sqrt{18}}\left(2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right) = \frac{4\sqrt{2}-1}{6}, \end{aligned}$$

och, notera att $0 \le \mu - \sigma \le 1 \le \mu + 2\sigma$,

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma) = F_X(\mu+2\sigma) - F_X(\mu-\sigma) = 1 - (\mu-\sigma)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

5.14 Vi beräknar $V\left(X^2\right)$ genom att utnyttja

$$V\left(X^2\right) = E\left((X^2)^2\right) - \left(E\left(X^2\right)\right)^2.$$

Om X är likformigt fördelad på intervallet $[0,\ 1]$ så är $f_X(x) = 1$, $0 \le x \le 1$, och

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

På samma sätt är

$$E\left(X^4\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^4 \cdot 1\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

(Generellt är $E\left(X^k\right) = 1/(k+1)$.) Alltså är

$$V\left(X^2\right) = E\left(X^4\right) - \left(E\left(X^2\right)\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

5.15 Låt X beskriva resultatet vid mätningen av surhetsgrad med en pH-meter. Då är

$$X = (\text{surhetsgrad}) + (\text{mätfel}) = 5.8 + Y$$

där mätfelet Y är en stokastisk variabel med $E(Y) = d$ (det systematiska felet) och $D(Y) = \sigma$. Notera att Y kan skrivas $Y = d + \epsilon$ där det slumpmässiga felet ϵ är en stokastisk variabel med $E(\epsilon) = 0$, $D(\epsilon) = \sigma$.

Med räknelagarna för väntevärden och varianser erhålls

$$E(X) = E(5.8 + Y) = 5.8 + E(Y) = 5.8 + d = 6.2$$

om $d = 0.4$, och

$$V(X) = V(5.8 + Y) = V(Y) = \sigma^2$$

så $D(X) = \sigma = 0.05$.

5.16 Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med simultan fördelning:

$p_{X,Y}(j,k)$		$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$p_Y(k)$
k	1	0.1	0.2	0.3	0.6
	2	0.4	0	0	0.4
$p_X(j)$		0.5	0.2	0.3	

där marginalfördelningarna $p_X(j)$ och $p_Y(k)$ bestämts ur

$$p_X(j) = \sum_{k:(j,k)\in S_{X,Y}} p_{X,Y}(j,k) \qquad p_Y(k) = \sum_{j:(j,k)\in S_{X,Y}} p_{X,Y}(j,k).$$

Då är

$$E(X) = \sum_j j \cdot p_X(j) = 0\cdot 0.5 + 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.3 = 0.8.$$

och

$$E(Y) = \sum_k k \cdot p_Y(k) = 1\cdot 0.6 + 2\cdot 0.4 = 1.4$$

Vidare,

$$E(XY) = \sum_{(j,k)} jk\cdot p_{X,Y}(j,k) = (0\cdot1)\cdot0.1+(0\cdot2)\cdot0.4+(1\cdot1)\cdot0.2+(1\cdot2)\cdot0+(2\cdot1)\cdot0.3+(2\cdot2)\cdot0 = 0.2+0.6 = 0.8$$

så kovariansen fås till

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.8 - 0.8 \cdot 1.4 = -0.32.$$

5.17 Låt X beskriva värdet av det första och Y värdet av det andra på måfå valda myntet. Då är $S_X = S_Y = \{1, 5\}$ och

$$P(X=1) = \frac{2}{3}, \qquad P(X=5) = \frac{1}{3}.$$

Nu är

$$P(Y=1|X=1) = \frac{1}{2} \quad P(Y=5|X=1) = \frac{1}{2} \qquad P(Y=1|X=5) = 1 \quad P(Y=5|X=5) = 0$$

vilket med $P(X=x, Y=y) = P(Y=y|X=x)P(X=x)$ ger den simultana fördelningen:

$p_{X,Y}(j,k)$	$j=1$	$j=5$	$p_Y(k)$
$k=1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$k=5$	$1/3$	0	$1/3$
$p_X(j)$	$2/3$	$1/3$	

Notera att X och Y har samma fördelning.

Nu är

$$E(X) = \sum_j j \cdot p_X(j) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = E(Y)$$

och

$$E\left(X^2\right) = \sum_j j^2 \cdot p_X(j) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 5^2 \cdot \frac{1}{3} = 9$$

så

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 9 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{32}{9} = V(Y).$$

Nu är

$$E(XY) = \sum_{(j,k)} jk \cdot p_{X,Y}(j,k) = (1 \cdot 1) \cdot \frac{1}{3} + (1 \cdot 5) \cdot \frac{1}{3} + (5 \cdot 1) \cdot \frac{1}{3} + (5 \cdot 5) \cdot 0 = \frac{11}{3}$$

så kovariansen fås till

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{33}{9} - \frac{49}{9} = -\frac{16}{9}.$$

Korrelationen $\rho(X,Y)$ bestäms av

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = -\frac{16/9}{32/9} = -\frac{1}{2}.$$

5.18 De möjliga värdena på (X,Y) är $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$ och $(1,0)$ med sannolikhet $1/4$ vardera. De möjliga värdena på X är -1, 0, 1 med sannolikhet $1/4$, $1/4+1/4 = 1/2$ och $1/4$ respektive. Notera att X och Y är *beroende* stokastiska variabler. Detta kan visas formellt genom att till exempel visa att

$$P(X=1, Y=1) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(X=1)P(Y=1).$$

Nu är

$$E(X) = \sum_k k p_X(k) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Av symmetriskäl har Y samma fördelning så $E(Y) = 0$. Nu är

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) = \sum_{i,j} (i \cdot j)\, P(X = i, Y = j) \\ &= (0 \cdot 1)\frac{1}{4} + (0 \cdot (-1))\frac{1}{4} + ((-1) \cdot 0)\frac{1}{4} + (1 \cdot 0)\frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

Korrelationen $\rho(X,Y) = C(X,Y)/\sqrt{V(X)V(Y)} = 0$.

5.19 Låt X beskriva positionen efter ett hopp och Y positionen efter två hopp.

Alternativ 1: De möjliga värdena på (X,Y) ges av $(-1,-2)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ och $(1,2)$ med sannolikhet $1/4$ vardera. De möjliga värdena för X är -1 och 1 med sannolikhet $1/2$ vardera medan för Y är värdena -2, 0 och 2 med sannolikhet $1/4$, $1/2$ och $1/4$ respektive.

Nu är

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k k p_X(k) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) = \sum_k k^2 p_X(k) = 1 \\ E(Y) &= \sum_k k p_Y(k) = -2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0 \\ V(Y) &= E\left((Y - E(Y))^2\right) = E\left(Y^2\right) = \sum_k k^2 p_Y(k) = 2 \\ C(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) = \sum_{i,j} (i \cdot j) \cdot P(X = i, Y = j) \\ &= (-2)(-1)\frac{1}{4} + 0(-1)\frac{1}{4} + 0 \cdot 1\frac{1}{4} + 2 \cdot 1\frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alternativ 2: Låt X_1 och X_2 vara förflyttningarna i tidsteg 1 och 2. Då är

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

och X_1 och X_2 är oberoende. Vidare,

$$E(X_i) = \sum_k k P(X_i = k) = 0$$

och

$$V(X_i) = E\left((X_i - E(X_i))^2\right) = E\left(X_i^2\right) = \sum_k k^2 P(X_i = k) = 1.$$

Nu är $X = X_1$ och $Y = X_1 + X_2$ och

$$C(X,Y) = C(X_1, X_1 + X_2) = \underbrace{C(X_1, X_1)}_{=V(X_1)} + \underbrace{C(X_1, X_2)}_{=0} = V(X_1) = 1,$$

$$V(Y) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2$$

så

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5.20 Låt (X,Y) ha simultan täthet

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x}, \quad x>0,\ -x \le y \le x$$

Eftersom de möjliga värdena på Y beror på X är de stokastiska variablerna beroende. För att visa detta formellt kan man se att obetingat ges de möjliga värdena på Y av $S_Y = (-\infty,\infty)$ och motsvarande för X är $S_X = [0,\infty)$. Dessa värden har positiva tätheter, dvs $f_X(x) > 0$ och $f_Y(y) > 0$ för $x \in S_X$ och $y \in S_Y$, men $f_{X,Y}(x,y) = 0$ då $y > x$ så alltså är $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ vilket visar att X och Y är beroende.

Vi noterar att

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x}\,dy = 2x\cdot\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x},$$

det vill säga X är exponentialfördelad med intensitet 1. Alltså är $E(X) = 1$. Av symmetriskäl är $E(Y) = 0$.

Slutligen

$$E(XY) = \int_0^{\infty}\int_{-x}^{x} xy\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{e}^{-x}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\underbrace{\int_{-x}^{x} y\,dy}_{=0}\,dx = 0$$

så $C(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 0 - 1\cdot 0 = 0$. Detta medför att $\rho(X,Y) = 0$ och variablerna är okorrelerade men ej oberoende.

Notera att för att lösa uppgiften behöver inte varianserna $V(X)$ och $V(Y)$ bestämmas. Vill man räkna ut dessa är $V(X) = 1$ (eftersom X är exponentialfördelad med parameter 1 och $V(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = E\left(Y^2\right)$ där

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= \int_0^{\infty}\int_{-x}^{x} y^2\frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x}\,dy\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{1}{3}\left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} + \frac{2}{3}\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &= 0 + \frac{2}{3}\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} + \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{2}{3}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

så $V(Y) = 2/3$. Observera att $E\left(Y^2\right)$ beräknades genom att utnyttja den simultana fördelningen $f_{X,Y}(x,y)$ och inte med marginalfördelningen $f_Y(y)$.

5.21 Låt X_i vara antalet test som behövs vid grupp i. Då ges de möjliga värdena på X_i av $\{1,\ k+1\}$ och

$$P(X_i = 1) = P(\text{Alla } k \text{ lampor hela}) = (1-p)^k \qquad P(X_i = k+1) = 1 - P(X_i = 1) = 1-(1-p)^k.$$

Alltså är

$$E(X_i) = 1\cdot(1-p)^k + (k+1)\cdot(1-(1-p)^k) = (k+1) - k(1-p)^k.$$

Det totala antalet test som behövs är

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

där $X_1,\ldots,X_n$ är oberoende stokastiska variabler. Nu är

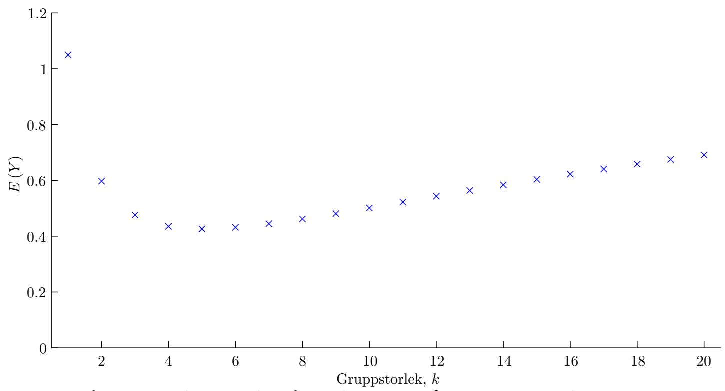
$$E(X) = E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n\left[(k+1) - k(1-p)^k\right]$$

och med $Y = X/(nk)$ är

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{nk}X\right) = \frac{1}{nk}E(X) = \frac{1}{nk}\cdot n\left[(k+1) - k(1-p)^k\right] = 1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k.$$

Bestämning av vilket k som ger minimum för givna p löstes numeriskt och följande tabell erhölls.

Felsannolikhet, p	k: $E(Y)$ minimal	$\min_k E(Y)$
0.05	5	0.42622
0.01	11	0.19557
0.001	32	0.062759
0.0001	101	0.019951



Det förväntade antalet försök som måste göras vid gruppstorlek k då $p = 0.05$. Den förväntade antalet är som lägst för $k = 5$ vilket ger $E(Y) \approx 0.426$.

5.22 Låt X_1, X_2 och X_3 vara oberoende och $E(X_i) = 2$ och $D(X_i) = 3$ för $i = 1, 2, 3$. Med $Y = 3X_1 - 2X_2 + X_3 - 6$ så är

$$E(Y) = E(3X_1 - 2X_2 + X_3 - 6) = 3E(X_1) - 2E(X_2) + E(X_3) - 6 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 - 6 = -2.$$

Vidare, för $i = 1, 2, 3$ så är

$$V(X_i) = (D(X_i))^2 = 9$$

och

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(3X_1 - 2X_2 + X_3 - 6) = V(3X_1 - 2X_2 + X_3) = \{\text{oberoende}\} \\ &= V(3X_1) + V(-2X_2) + V(X_3) = 3^2 V(X_1) + (-2)^2 V(X_2) + V(X_3) \\ &= 9 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 9 = 126 \end{aligned}$$

så

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{126}.$$

5.23 Låt X beskriva längden av en typisk planka. Modell: X har väntevärde $E(X) = 2$ och $D(X) = \sigma = 5 \cdot 10^{-3}$. Då $n = 10$ plankor sågas till, låt Y beskriva plankornas sammanlagda längd om...

1.) ... alla plankorna sågas på samma gång. Då är $Y = 10X$ och

$$E(Y) = E(10X) = 10E(X) = 10 \cdot 2 = 20$$

och

$$V(Y) = V(10X) = 10^2 V(X) = 100\sigma^2$$

och

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = 10\sigma = 0.05.$$

2.) ... plankorna sågas till individuellt och får oberoende längder $X_1, \ldots, X_n$. Då är $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ och

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10 \cdot 2 = 20$$

och

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \sum_{i=1}^{10} V(X_i) = 10\sigma^2$$

och

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{10}\sigma \approx 0.0158.$$

b) Metoden i 2 ger mindre standardavvikelse för den totala längden Y.

5.24 Låt X, Y och Z vara oberoende stokastiska variabler sådana att

$$E(X+Y) = 1, \quad E(X-Z) = -4, \quad E(Y-Z) = -3.$$

Då är

$$\begin{aligned} 2E(X) &= E(2X) = E((X+Y)+(X-Z)-(Y-Z)) \\ &= E(X+Y) + E(X-Z) - E(Y-Z) = 1-4+3 = 0, \end{aligned}$$

det vill säga $E(X) = 0$. Detta medför att

$$E(Y) = E(Y) + E(X) = E(X+Y) = 1$$

och

$$E(Z) = E(Z) - E(X) = (-1)(E(X) - E(Z)) = (-1)E(X-Z) = (-1)(-4) = 4.$$

b) Då alla variabler är oberoende så är de automatisk okorrelerade varför

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 4+3 = 7 \neq 25,$$

$$V(X-Y) = V(X+(-1)Y) = V(X) + V((-1)Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 7.$$

Av samma anledning som $X-Y$ och $X+Y$ har samma varians måste $(X+Y)-Z$ och $(X+Y)+Z$ ha samma varians, varför

$$V(X \pm Y \pm Z) = V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) = 4+3+12 = 19.$$

Sålunda, det första påståendet b_1 är falskt, de två andra (b_2 och b_3) är sanna.

5.25 Låt X_1 och X_2 beskriva resultaten av två oberoende tärningskast. Då är $P(X_i = k) = 1/6$ för $k = 1, 2, \ldots, 6$ och

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \frac{7}{2} = 3.5$$

och

$$V(X_i) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) - (3.5)^2 = \frac{35}{12}$$

för $i = 1, 2$. Summan $X = X_1 + X_2$ har väntevärde

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 7$$

och varians

$$V(X) = V(X_1 + X_2) = \{\text{oberoende}\} = V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{6}.$$

För produkten $Y = X_1 X_2$ gäller

$$E(X_1 X_2) = \{\text{oberoende}\} = E(X_1)\,E(X_2) = \frac{49}{4}.$$

Variansen är lite krångligare, men upprepad användning av $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$ ger

$$\begin{aligned} V(X_1X_2) &= E\left((X_1X_2)^2\right) - (E(X_1X_2))^2 = E\left(X_1^2X_2^2\right) - \left(\frac{49}{4}\right)^2 = \{\text{oberoende}\} \\ &= E\left(X_1^2\right)E\left(X_2^2\right) - \frac{2401}{16}. \end{aligned}$$

Men $E\left(X_1^2\right) = V(X_1) + (E(X_1))^2 = \frac{35}{12} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6}$ så

$$V(Y) = V(X_1X_2) = \frac{91}{6}\cdot\frac{91}{6} - \frac{2401}{16} = \frac{11515}{144}.$$

Slutligen

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E((X_1+X_2)X_1X_2) - E(X_1+X_2)E(X_1X_2)$$

där

$$\begin{aligned} E((X_1+X_2)X_1X_2) &= E\left(X_1^2X_2 + X_2^2X_1\right) = \{\text{oberoende}\} \\ &= E\left(X_1^2\right)E(X_2) + E\left(X_2^2\right)E(X_1) = \frac{91}{6}\cdot\frac{7}{2} + \frac{91}{6}\cdot\frac{7}{2} = \frac{637}{6}, \end{aligned}$$

dvs

$$C(X,Y) = E((X_1+X_2)X_1X_2) - E(X_1+X_2)E(X_1X_2) = \frac{637}{6} - 7\cdot\frac{49}{4} = \frac{245}{12}.$$

Korrelationen fås till

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{245/12}{\sqrt{\frac{35}{6}\cdot\frac{11515}{144}}} = \sqrt{\frac{42}{47}}.$$

5.26 Vi låter X_A och X_B vara två stokastiska variabler sådana att

$$E(X_A) = E(X_B) = \mu \quad \text{och} \quad V(X_A) = \sigma_A^2,\ V(X_B) = \sigma_B^2.$$

Med $Y = aX_A + bX_B$ så är

$$E(Y) = E(aX_A + bX_B) = aE(X_A) + bE(X_B) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu$$

vilket ger $E(Y) = \mu$ om $a + b = 1$. Uttrycker vi a i b får vi att $a = 1 - b$ och $Y = (1-b)X_A + bX_B$. Variansen för Y ges av

$$\begin{aligned} V(Y) &= V((1-b)X_A + bX_B) = \{\text{oberoende}\} = (1-b)^2V(X_A) + b^2V(X_B) \\ &= (1-b)^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2. \end{aligned}$$

Denna minimeras med avseende på b genom lösning av

$$0 = \frac{d}{db}V(Y) = -2(1-b)\sigma_A^2 + 2b\sigma_B^2 = 2\left[(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)b - \sigma_A^2\right]$$

vilket ger

$$b = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad \text{och} \quad Y = (1-b)X_A + bX_B = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}X_A + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}X_B.$$

Kontroll av andraderivatan ger att detta verkligen är ett minimum.

5.27 Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ beskriva personens vinst under $n = 12$ månader. Med modellen att

$$E(X_i) = -0.5, \quad D(X_i) = \sqrt{15}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

och att $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende (okorrelerade räcker) är den totala vinsten under n månader $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Här är

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 12 \cdot (-0.5) = -6$$

och

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = 12 \cdot (\sqrt{15})^2 = 180.$$

5.28 Vi vet att korrelationen $\rho(X, Y) = C(X, Y) / \sqrt{V(X) V(Y)}$ uppfyller $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. Alltså är

$$-4 = -\sqrt{V(X) V(Y)} \ \leq \ C(X, Y) \ \leq \ \sqrt{V(X) V(Y)} = 4.$$

Detta medför att

$$V(X+Y) = \underbrace{V(X) + V(Y)}_{=17} + 2C(X, Y) = 17 + 2C(X, Y) \begin{cases} \leq 17 + 2 \cdot 4 = 25 \\ \geq 17 - 2 \cdot 4 = 9. \end{cases}$$

5.29 För den stokastiska variabeln X är

$$E(X) = 0 \quad V(X) = 1 \quad E\left(X^3\right) = 2 \quad V\left(X^2\right) = 4$$

Alternativ 1: Då är

$$V\left(X + X^2\right) = V(X) + V\left(X^2\right) + 2C\left(X, X^2\right) = 1 + 4 + 2C\left(X, X^2\right) = 5 + 2C\left(X, X^2\right).$$

Nu är

$$E\left(X \cdot X^2\right) = E\left(X^3\right) = 2$$

och

$$E(X) E\left(X^2\right) = 0 \cdot E\left(X^2\right) = 0$$

varför $C\left(X, X^2\right) = E\left(X \cdot X^2\right) - E(X) E\left(X^2\right) = 2$ och således

$$V\left(X + X^2\right) = 5 + 2C\left(X, X^2\right) = 5 + 2 \cdot 2 = 9.$$

Alternativ 2: Vi bestämmer först $E\left(X^k\right)$, $k = 1, 2, 3, 4$ ur det givna.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \\ E\left(X^2\right) &= V(X) + (E(X))^2 = 1 + 0 = 1 \\ E\left(X^3\right) &= 2 \\ E\left(X^4\right) &= E\left((X^2)^2\right) = V\left(X^2\right) + \left(E\left(X^2\right)\right)^2 = 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

Med detta får vi att

$$\begin{aligned} V\left(X + X^2\right) &= E\left((X + X^2)^2\right) - \left(E\left(X + X^2\right)\right)^2 = E\left(X^2 + 2X^3 + X^4\right) - \left(E(X) + E\left(X^2\right)\right)^2 \\ &= E\left(X^2\right) + 2E\left(X^3\right) + E\left(X^4\right) - (0+1)^2 = 1 + 2 \cdot 2 + 5 - 1 = 9. \end{aligned}$$

5.30 Låt skolbarnens vikter beskrivas av de oberoende stokastiska variablerna $X_1, \ldots, X_n$ med väntevärde 36 och standardavvikelse 3. Det aritmetiska medelvärdet av n skolbarns vikter beskrivs av

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

där

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = E\left(X\right) = 36 \text{ kg}$$

och

$$V\left(\overline{X}\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = \frac{V\left(X\right)}{n}.$$

Alltså är

$$D\left(\overline{X}\right) = \sqrt{V\left(\overline{X}\right)} = \frac{D\left(X\right)}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ kg}.$$

5.31 Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende stokastiska variabler som beskriver en bestämning av smältpunkten för matfett där $D\left(X_i\right) = 2$, $i = 1, \ldots, n$. Det aritmetiska medelvärdet av n smältpunktsbestämningar beskrivs av

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

där

$$V\left(\overline{X}\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = \frac{V\left(X\right)}{n}$$

så

$$D\left(\overline{X}\right) = \sqrt{V\left(\overline{X}\right)} = \frac{D\left(X\right)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Kravet $D\left(\overline{X}\right) \leq 0.4$ ger $n \geq (2/0.4)^2 = 25$.

5.32 Beteckna $E\left(X\right) = \mu_x$ och $E\left(Y\right) = \mu_y$. Upprepad användning av $V\left(Z\right) = E\left(Z^2\right) - \left(E\left(Z\right)\right)^2$ ger

$$\begin{aligned}
V\left(XY\right) &= E\left((XY)^2\right) - \left(E\left(XY\right)\right)^2 = E\left(X^2Y^2\right) - \left(E\left(XY\right)\right)^2 = \{\text{oberoende}\} \\
&= E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) - \left(E\left(X\right)E\left(Y\right)\right)^2 = E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) - \mu_x^2\mu_y^2 \\
&= (V\left(X\right) + \mu_x^2)(V\left(Y\right) + \mu_y^2) - \mu_x^2\mu_y^2 \\
&= V\left(X\right)V\left(Y\right) + V\left(X\right)\mu_y^2 + V\left(Y\right)\mu_x^2 + \mu_x^2\mu_y^2 - \mu_x^2\mu_y^2 \\
&= V\left(X\right)V\left(Y\right) + \mu_y^2 V\left(X\right) + \mu_x^2 V\left(Y\right).
\end{aligned}$$

Generellt sett är $V\left(XY\right) \neq V\left(X\right)V\left(Y\right)$, men likhet gäller om $\mu_x = \mu_y = 0$.

5.33 Vi utnyttjar först att

$$\begin{aligned}
C\left(X+Y, X-Y\right) &= C\left(X, X-Y\right) + C\left(Y, X-Y\right) \\
&= \underbrace{C\left(X, X\right)}_{=V(X)} - C\left(X, Y\right) + \underbrace{C\left(Y, X\right)}_{=C(X,Y)} - \underbrace{C\left(Y, Y\right)}_{V(Y)} = V\left(X\right) - V\left(Y\right).
\end{aligned}$$

Nu är

$$\begin{aligned}
V\left(X+Y\right)V\left(X-Y\right) &= (V\left(X\right) + V\left(Y\right) + 2C\left(X, Y\right))(V\left(X\right) + V\left(Y\right) - 2C\left(X, Y\right)) \\
&= (V\left(X\right))^2 + (V\left(Y\right))^2 + 2V\left(X\right)V\left(Y\right) = (V\left(X\right) + V\left(Y\right))^2
\end{aligned}$$

så

$$\rho\left(X+Y, X-Y\right) = \frac{C\left(X+Y, X-Y\right)}{\sqrt{V\left(X+Y\right)V\left(X-Y\right)}} = \frac{V\left(X\right) - V\left(Y\right)}{\sqrt{(V\left(X\right) + V\left(Y\right))^2}} = \frac{V\left(X\right) - V\left(Y\right)}{V\left(X\right) + V\left(Y\right)}.$$

5.34 Beteckna $V(X) = \sigma^2$. Först har vi att

$$C\left(\overline{X}_n, \overline{X}_n\right) = V\left(\overline{X}_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{okorrelerade}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Nu är

$$C\left(\overline{X}_n, \overline{X}_k\right) = C\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_j\right) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} C(X_i, X_j)$$

Om $X_1, \ldots, X_n$ är okorrelerade är $C(X_i, X_j) = 0$ för $j \neq i$ och

$$\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} C(X_i, X_j) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k} C(X_i, X_i) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k} V(X_i) = \frac{1}{nk}\cdot k\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

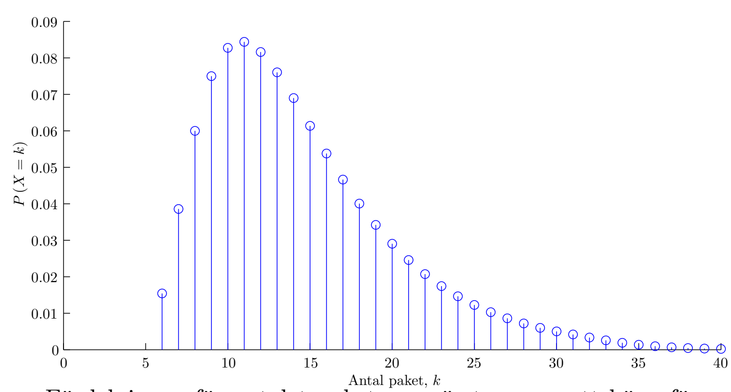
så

$$C\left(\overline{X}_n, \overline{X}_n - \overline{X}_k\right) = C\left(\overline{X}_n, \overline{X}_n\right) - C\left(\overline{X}_n, \overline{X}_k\right) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

vilket skulle visas.

5.35 För $i = 1, \ldots, 6$, låt Y_i vara antalet paket man måste köpa för att öka samlingen från $i-1$ till i djur. Möjliga värden Y_i är $\{1, 2, 3, \ldots\}$. När man har $i-1$ djur är sannolikheten $p_i = (n-(i-1))/n$ att ett köpt paket innehåller ett nytt djur oberoende av tidigare paket. Alltså är Y_i för-första-gången-fördelad med parameter p_i vilket medför att $E(Y_i) = 1/p_i$. Nu är det totala antalet köpta paket $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_6$ där

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_6) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_6) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_6} \\ &= \frac{6}{6} + \frac{6}{6-1} + \cdots + \frac{6}{1} = 6\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k} = 14.7. \end{aligned}$$



Fördelningen för antalet paket man är tvungen att köpa för att samla alla 6 plastdjur. Väntevärdet i fördelningen är 14.7.

5.36 Låt $U_1, \ldots, U_4$ vara de positionerna för punkterna. Då är $U_1, \ldots, U_4$ oberoende och likformigt fördelade på intervallet $[0,\ 1]$, det vill säga

$$f_U(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

vilket medför att

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_U(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

och

$$E\left(U^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_U(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

så $V(U) = E\left(U^2\right) - (E(U))^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$. De fyra trianglarna har tillsammans area T där

$$T = \frac{(1-U_4)\cdot U_1}{2} + \frac{(1-U_1)\cdot U_2}{2} + \frac{(1-U_2)\cdot U_3}{2} + \frac{(1-U_3)\cdot U_4}{2}$$

Då $i \neq j$ är

$$E((1-U_i)U_j) = E(U_j) - E(U_iU_j) = \{\text{oberoende}\} = E(U_j) - E(U_i)E(U_j) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

och

$$E((1-U_i)U_i) = E(U_i) - E\left(U_i^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

så

$$E(T) = \frac{1}{2}E((1-U_4)U_1) + \frac{1}{2}E((1-U_1)U_2) + \frac{1}{2}E((1-U_2)U_3) + \frac{1}{2}E((1-U_3)U_4) = \frac{1}{2}.$$

Fyrhörningen har area $A = 1 - T$ så $E(A) = 1 - E(T) = 1/2$. För att bestämma $V(T)$ och $D(T)$ utnyttjas att $V(T) = E\left(T^2\right) - (E(T))^2$. Definiera $U_0 = U_4$ så kan man skriva

$$\begin{aligned} E\left((2T)^2\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^{4}(1-U_{i-1})U_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(1-U_{i-1})U_i(1-U_{j-1})U_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}E((1-U_{i-1})U_i(1-U_{j-1})U_j). \end{aligned}$$

Vi skiljer på fallen $i = j$, $|i-j| = 1$ och $|i-j| > 1$.

- Då $i = j$ är

$$E((1-U_{i-1})U_i(1-U_{j-1})U_j) = E\left((1-U_{i-1})^2U_i^2\right) = E\left((1-U_{i-1})^2\right)E\left(U_i^2\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

- Då $i = j - 1$ är

$$\begin{aligned} E((1-U_{i-1})U_i(1-U_{j-1})U_j) &= E((1-U_{i-1})U_i(1-U_i)U_{i+1}) \\ &= E(1-U_{i-1})E(U_i(1-U_i))E(U_{i+1}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

  Samma väntevärde fås då $i - 1 = j$.

- Då $|i-j| > 1$ är

$$E((1-U_{i-1})U_i(1-U_{j-1})U_j) = E(1-U_{i-1})E(U_i)E(1-U_{j-1})E(U_j) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

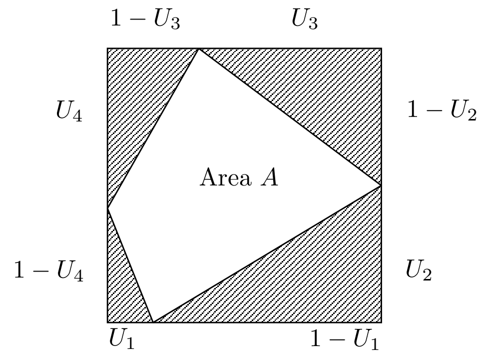
Sålunda fås

$$4E\left(T^2\right) = E\left((2T)^2\right) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}E((1-U_{i-1})U_i(1-U_{j-1})U_j) = 4\cdot\frac{1}{9} + 8\cdot\frac{1}{24} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{37}{36}$$

och

$$V(T) = E\left(T^2\right) - (E(T))^2 = \frac{37}{4\cdot 36} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\cdot 36}$$

så $D(T) = 1/12$.



Arean A bestäms som kvadratens area (1) minus trianglarnas totala area.

5.37 Låt Y_i, $i=1,\dots,n$, vara stokastiska variabler sådana att

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{om lapp med nummer } i \text{ dras i omgång } i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då är $P(Y_i=1)=1/n$ och

$$E(Y_i)=\sum_k k\cdot P(Y_i=k)=0\cdot P(Y_i=0)+1\cdot P(Y_i=1)=\frac{1}{n}.$$

Med $Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ så är

$$E(Y)=E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)=E(Y_1)+E(Y_2)+\cdots+E(Y_n)=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

För att beräkna variansen måste beroendet mellan variablerna redas ut. Först beräknar vi

$$E\left(Y_i^2\right)=\sum_k k^2\cdot P(Y_i=k)=0^2\cdot P(Y_i=0)+1^2\cdot P(Y_i=1)=\frac{1}{n}$$

och

$$C(Y_i,Y_i)=V(Y_i)=E\left(Y_i^2\right)-(E(Y_i))^2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}.$$

Tag nu $i\neq j$. Då är

$$P(Y_i=1,Y_j=1)=P(Y_i=1|Y_j=1)\,P(Y_j=1)=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Sålunda är

$$E(Y_iY_j)=\sum_{(k,l)} kl\cdot P(Y_i=k,Y_j=l)=1\cdot 1\cdot P(Y_i=1,Y_j=1)=\frac{1}{n(n-1)}.$$

Alltså är

$$C(Y_i,Y_j)=E(Y_iY_j)-E(Y_i)\,E(Y_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Nu är

$$\begin{aligned} V(Y) &= V\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)=C\left(\sum_{i=1}^n Y_i,\sum_{j=1}^n Y_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n C(Y_i,Y_j)=\sum_{i=1}^n C(Y_i,Y_i)+\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n C(Y_i,Y_j) \\ &= n\cdot\frac{n-1}{n^2}+n(n-1)\cdot\frac{1}{n^2(n-1)}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=1 \end{aligned}$$

5.38 Låt $\mu_n = E(N)$ och $\mu_x = E(X)$. Genom att betinga på N får man att

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N = n\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i|N = n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu_x$$

Så enligt lagen om total förväntan erhålles

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= \sum_n E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N = n\right) P(N = n) = \sum_n n\mu_x P(N = n) = \mu_x \underbrace{\sum_n n\, P(N = n)}_{E(N)} \\ &= \mu_x \mu_n. \end{aligned}$$

Låt $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Då är $V(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2$ där

$$E\left(Y^2\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j\right)$$

Betingat $N = n$ är

$$E\left(Y^2|N = n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_i X_j) = nE\left(X^2\right) + n(n-1)\mu_x^2 = nV(X) + n^2\mu_x^2$$

Alltså är enligt lagen om total förväntan

$$E\left(Y^2\right) = \sum_n E\left(Y^2|N = n\right) P(N = n) = \sum_n (nV(X) + n^2\mu_x^2) P(N = n) = V(X)\mu_n + \mu_x^2 E\left(N^2\right)$$

och således är

$$V(Y) = (V(X)\mu_n + \mu_x^2 E\left(N^2\right)) - (\mu_x\mu_n)^2 = V(X)\mu_n + \mu_x^2 V(N).$$

Med värden

$$\mu_x = 10,\ D(X) = 5 \qquad \mu_n = 7,\ V(N) = 7$$

fås

$$E(Y) = \mu_n\mu_x = 70 \qquad V(Y) = V(X)\mu_n + \mu_x^2 V(N) = 25\cdot 7 + 100\cdot 7 = 875,$$

dt vill säga $D(Y) = \sqrt{875} \approx 29.58$.

6.1 Låt Z vara $\mathrm{N}(0,1)$ med fördelningsfunktion $\Phi(x) = P(Z \le x)$. Då är

a) $P(Z \le 1.82) = \Phi(1.82) = 0.9656$.

b) $P(Z \le -0.35) = \Phi(-0.35) = 1 - \Phi(0.35) = 1 - 0.6368 = 0.3632$.

c) $P(-1.2 < Z < 0.5) = P(-1.2 < Z \le 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-1.2) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(1.2)) = 0.6915 - (1 - 0.8849) = 0.5764$.

d) a sådan att $0.05 = P(Z > a) = 1 - \Phi(a) = 1 - \Phi(\lambda_{0.05})$, vilket ger $a = \lambda_{0.05} = 1.6449$.

e) $a > 0$ sådan att $0.95 = P(|Z| < a) = 1 - (P(Z < -a) + P(Z > a)) = 1 - (\Phi(-a) + (1 - \Phi(a))) = 1 - (1 - \Phi(a) + 1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$. Vilket ger $\Phi(a) = 0.975$ eller $1 - \Phi(a) = 0.025 = 1 - \Phi(\lambda_{0.025})$ så $a = \lambda_{0.025} = 1.9600$.

6.2

Låt Z vara N$(0,1)$ med fördelningsfunktion $\Phi(x) = P(Z \le x)$. Då är

$$\begin{aligned}
P(0.21 < X < 0.29) &= \Phi(0.29) - \Phi(0.21) = 0.61409 - 0.58317 = 0.030926 \\
P(-0.21 < X < 0.29) &= \Phi(0.29) - \Phi(-0.21) = \Phi(0.29) - [1 - \Phi(0.21)] = 0.61409 - 0.41683 \\
&= 0.19726 \\
P(-0.29 < X < -0.21) &= \Phi(-0.21) - \Phi(-0.29) = [1 - \Phi(0.21)] - [1 - \Phi(0.29)] \\
&= \Phi(0.29) - \Phi(0.21) = P(0.21 < X < 0.29) = 0.030926
\end{aligned}$$

6.3 Om X är N$(0,1)$ så är $E(X) = 0$ och $D(X) = 1$, det vill säga $V(X) = 1$. Alltså är

$$E(Y) = E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

och

$$V(Y) = V(3X+2) = V(3X) = 3^2 V(X) = 9 \cdot 1 = 9$$

så $D(Y) = 3$. Notera att Y är N$(2,3)$.

6.4 Låt X vara N(μ,σ) med $\mu = 5$ och $\sigma = 2$. Då är $Z = (X-\mu)/\sigma$ N$(0,1)$ och

a)

$$P(X \le 6) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{1}{2}\right) = \Phi(0.5) = 0.6915.$$

b)

$$\begin{aligned}
P(1.8 < X < 7.2) &= P(1.8 < X \le 7.2) = P\left(\frac{1.8-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{7.2-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P(-1.6 < Z \le 1.1) = \Phi(1.1) - \Phi(-1.6) = \Phi(1.1) - (1 - \Phi(1.6)) \\
&= 0.80953.
\end{aligned}$$

c) a sådan att $P(X \le a) = 0.05$ bestäms ur

$$\begin{aligned}
1 - \Phi(\lambda_{0.05}) = 0.05 &= P(X \le a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{a-\mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Alltså är

$$-\frac{a-\mu}{\sigma} = \lambda_{0.05}$$

eller

$$a = \mu - \lambda_{0.05}\sigma = 5 - 1.6449 \cdot 2 = 1.7103.$$

6.5 Låt X vara N(μ,σ) med $\mu = -1$ och $\sigma = 0.01$. Då är $Z = (X-\mu)/\sigma$ N$(0,1)$ och således

$$
\begin{aligned}
P\left(X<0.99\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{0.99-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\leq 199\right)=\Phi\left(199\right)\approx 1\\
P\left(X<-0.99\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{-0.99-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\leq 1\right)=\Phi\left(1\right)\approx 0.84134\\
P\left(X>-0.99\right) &= 1-P\left(X\leq -0.99\right)=1-P\left(X<-0.99\right)\approx 1-0.84134=0.15866\\
P\left(-1.3<X\leq -1.03\right) &= P\left(\frac{-1.3-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{-1.03-\mu}{\sigma}\right)=P\left(-30<Z\leq -3\right)\\
&= \Phi\left(-3\right)-\Phi\left(-30\right)=\left[1-\Phi\left(3\right)\right]-\left[1-\Phi\left(30\right)\right]=\Phi\left(30\right)-\Phi\left(3\right)\\
&\approx 1-0.99865=0.0013499.
\end{aligned}
$$

6.6 Låt X vara N(μ,σ) med $\mu=20$ och $\sigma=3$. Då är $(X-\mu)/\sigma$ N$(0,1)$. Bestäm x så att

$$
0.01=P\left(X\leq x\right)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right).
$$

Kvantilen $\lambda_{0.01}=2.3263$ är sådan att $1-\Phi\left(\lambda_{0.01}\right)=0.01$ det vill säga

$$
\lambda_{0.01}=-\frac{x-\mu}{\sigma}
$$

eller

$$
x=\mu-\lambda_{0.01}\sigma=20-2.3263\cdot 3=13.021.
$$

6.7 Låt X vara N(μ,σ) med $\mu=180$ och $\sigma=5$. Då är $Z=(X-\mu)/\sigma$ N$(0,1)$. Då är

$$
\begin{aligned}
P\left(X\geq 170\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{170-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\geq -2\right)=1-P\left(Z\leq -2\right)=1-\Phi\left(-2\right)\\
&= 1-\left[1-\Phi\left(2\right)\right]=\Phi\left(2\right)=0.97725.
\end{aligned}
$$

Vidare så är

$$
\begin{aligned}
P\left(170\leq X\leq 200\right) &= P\left(\frac{170-\mu}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{200-\mu}{\sigma}\right)=P\left(-2\leq Z\leq 4\right)=\Phi\left(4\right)-\Phi\left(-2\right)\\
&= \Phi\left(4\right)-\left[1-\Phi\left(2\right)\right]\approx 0.99997-1+0.97725=0.97722.
\end{aligned}
$$

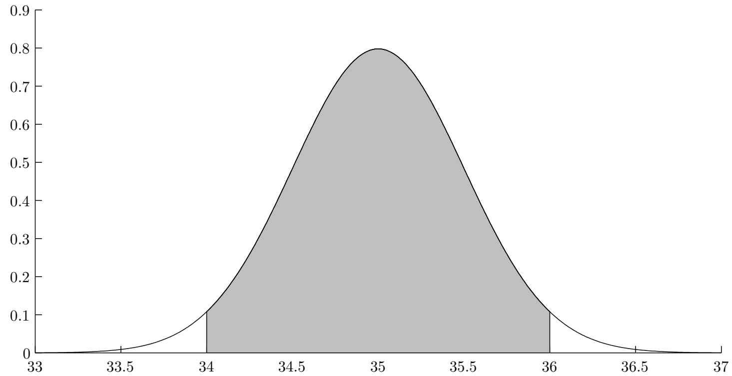
6.8 Låt X beskriva mängden kaffe i säcken, X är N(μ,σ) där $\mu=35$ och $\sigma=0.5$.

a) Då är sannolikheten att säcken räcker till minst 36 burkar

$$
\begin{aligned}
P\left(X\geq 36\right) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{36-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{36-\mu}{\sigma}\right)\\
&= 1-\Phi\left(2\right)=1-0.97725=0.02275.
\end{aligned}
$$

b) Då är sannolikheten att säcken räcker till 34 men inte till 36 burkar

$$
\begin{aligned}
P\left(34\leq X<36\right) &= P\left(\frac{34-\mu}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{36-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(2\right)-\Phi\left(-2\right)\\
&= \Phi\left(2\right)-\left(1-\Phi\left(2\right)\right)=2\Phi\left(2\right)-1=2\cdot 0.97725-1=0.9545.
\end{aligned}
$$



Tätheten $f_X(x)$ för $\mathrm{N}(35, 0.5)$.

6.9 Låt X vara $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ med $\mu = 0.5$kg och $\sigma = 0.003$kg. Då är $Z = (X-\mu)/\sigma$ $\mathrm{N}(0,1)$ och

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.495) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{0.495-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq -\frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right] \\ &= \Phi(5/3) = 0.95221. \end{aligned}$$

Vi söker nu d så att

$$P(0.5 - d \leq X \leq 0.5 + d) = 1 - \alpha.$$

Då är

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(0.5 - d \leq X \leq 0.5 + d) = P\left(\frac{0.5 - d - \mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.5 + d - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{d}{\sigma} \leq Z \leq \frac{d}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{d}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

eller $1 - \Phi(d/\sigma) = \alpha/2$. Eftersom $1 - \Phi\left(\lambda_{\alpha/2}\right) = \alpha/2$ är $d/\sigma = \lambda_{\alpha/2}$ eller $d = \lambda_{\alpha/2}\sigma$. Sålunda erhålles

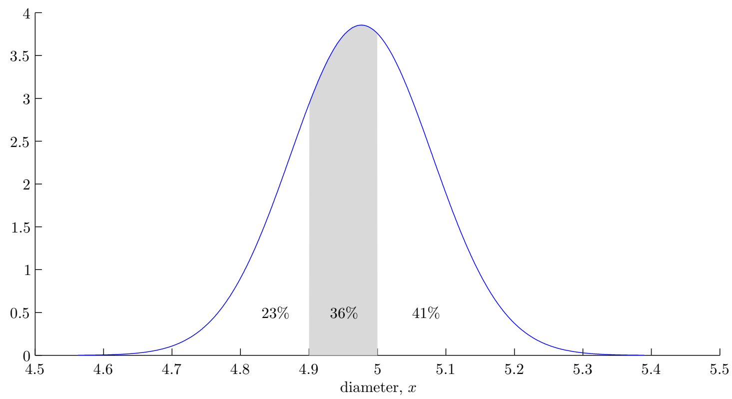
$1-\alpha$	$\lambda_{\alpha/2}$	d [kg]
0.50	0.67449	$2.0235 \cdot 10^{-3}$
0.95	1.9600	$5.8799 \cdot 10^{-3}$
0.99	2.5758	$7.7275 \cdot 10^{-3}$

6.10 Låt X beskriva en kulas diameter. Med modellen att X är $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ så kan de givna antagandena formuleras

$$\begin{aligned} 0.23 &= P(X \leq 4.9) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{4.9-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4.9-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu - 4.9}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(\lambda_{0.23}) \\ 0.59 &= P(X \leq 5.0) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5.0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5.0-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu - 5.0}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(\lambda_{0.59}) \end{aligned}$$

Ur tabell får man att $\lambda_{0.23} = 0.7388$ och $\lambda_{0.59} = -\lambda_{1-0.59} = -\lambda_{0.41} = -0.2275$. Alltså är

$$\begin{cases} \frac{\mu - 4.9}{\sigma} = \lambda_{0.23} \\ \frac{\mu - 5.0}{\sigma} = \lambda_{0.59} \end{cases} \quad \text{vilket ger} \quad \begin{cases} \mu = \frac{9.9}{2} + \frac{0.1}{2}\frac{\lambda_{0.23}+\lambda_{0.59}}{\lambda_{0.23}-\lambda_{0.59}} = 4.9765 \\ \sigma = \frac{0.1}{\lambda_{0.23}-\lambda_{0.59}} = 0.1035 \end{cases}$$



Täthetsfunktionen för kullagrenas diametrar.

6.11

6.12 Låt X beskriva vikten av en typisk person. Modell: X är N$(70, 10)$. Låt Y beskriva vikten för $n = 10$ personer,

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och fördelade som X. Då är Y normalfördelad med väntevärde

$$\mu = E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X) = 10 \cdot 70 = 700$$

och varians

$$\sigma^2 = V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nV(X) = 10 \cdot 10^2 = 1000$$

dvs Y är N$(\mu, \sigma) =$ N$(700, \sqrt{1000})$. Sökt är

$$P(Y > 800) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{800 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{10}\right) = 0.0007827.$$

6.13 Låt X och Y vara oberoende där X är N$(1, 1)$ och Y är N$(-1, 2)$.

a) Då är…

- … $X + Y$ normalfördelad med väntevärde $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1 + (-1) = 0$ och varians $V(X+Y) = \{\text{oberoende}\} = V(X) + V(Y) = 1^2 + 2^2 = 5$, det vill säga $D(X+Y) = \sqrt{5}$. Alltså $X + Y \in$ N$(0, \sqrt{5})$.
- … $X - Y$ normalfördelad med väntevärde $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 1 - (-1) = 2$ och varians $V(X-Y) = \{\text{oberoende}\} = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 1^2 + 2^2 = 5$, det vill säga $D(X-Y) = \sqrt{5}$. Alltså $X - Y \in$ N$(2, \sqrt{5})$.

Notera att när X och Y är oberoende (okorrelerade) så har $X + Y$ och $X - Y$ samma varians.

6.14

6.15 Låt X beskriva tiden till relä 1 löser ut och Y den för relä 2. Modell: X är N$(1, 0.1)$ och Y är N$(1.5, 0.2)$ där X och Y är oberoende stokastiska variabler. Relä 2 löser ut före relä 1 om $Y < X$ eller, omformulerat, då $Y - X < 0$. Med $W = Y - X$ så är W normalfördelad med väntevärde

$$\mu = E(W) = E(Y - X) = E(Y) - E(X) = 1.5 - 1 = 0.5$$

och varians

$$\sigma^2 = V(W) = V(Y - X) = \{\text{oberoende}\} = V(Y) + (-1)^2 V(X) = 0.2^2 + 0.1^2 = 0.05$$

dvs W är $\mathrm{N}(0.5, \sqrt{0.05})$. Alltså,

$$\begin{aligned} P(Y - X < 0) &= P(W < 0) = P\left(\frac{W-\mu}{\sigma} < \frac{0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-\mu/\sigma) = \Phi\left(-\sqrt{5}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{5}\right) = 1 - 0.9873 = 0.0127. \end{aligned}$$

6.16 Låt X och Y vara oberoende där X är $\mathrm{N}(150, 3)$ och Y är $\mathrm{N}(100, 4)$.

a) Då är...

- ... $X + Y$ normalfördelad med väntevärde $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 150 + 100 = 250$ och varians $V(X+Y) = \{\text{oberoende}\} = V(X) + V(Y) = 3^2 + 4^2 = 25$, det vill säga $D(X+Y) = 5$. Alltså $X + Y \in \mathrm{N}(250, 5)$.
- ... $X - Y$ normalfördelad med väntevärde $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 150 - 100 = 50$ och varians $V(X-Y) = \{\text{oberoende}\} = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 3^2 + 4^2 = 25$, det vill säga $D(X-Y) = 5$. Alltså $X - Y \in \mathrm{N}(50, 5)$.
- ... $(X+Y)/2$ normalfördelad med väntevärde $E((X+Y)/2) = \frac{1}{2}E(X+Y) = 125$ och varians $V\left(\frac{1}{2}(X+Y)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X+Y) = \frac{25}{4}$, det vill säga $D((X+Y)/2) = 2.5$. Alltså $(X+Y)/2 \in \mathrm{N}(125, 2.5)$.

b) Låt Z vara $\mathrm{N}(0, 1)$. Nu är

$$\begin{aligned} P(X + Y < 242.6) &= P\left(\frac{(X+Y) - 250}{5} < \frac{242.6 - 250}{5}\right) = P(Z < -1.48) = \Phi(-1.48) \\ &= 1 - \Phi(1.48) \approx 1 - 0.9306 = 0.0694, \\ P(|X - Y| < 40) &= P(-40 < X - Y < 40) = P\left(\frac{-40-50}{5} < \frac{(X-Y)-50}{5} < \frac{40-50}{5}\right) \\ &= P(-4.50 < Z < -2) = \Phi(-2) - \Phi(-4.50) \\ &= [1 - \Phi(2)] - [1 - \Phi(4.50)] \approx 0.02275 - 3.4 \cdot 10^{-6} = 0.022747 \\ P\left(\left|\frac{X-Y}{2} - 125\right| > 5\right) &= 1 - P\left(-5 \leq \frac{X-Y}{2} - 125 \leq 5\right) = 1 - P\left(\frac{-5}{2.5} \leq \frac{\frac{X-Y}{2} - 125}{2.5} \leq \frac{5}{2.5}\right) \\ &= 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 1 - (\Phi(2) - [1 - \Phi(2)]) \\ &= 2(1 - \Phi(2)) \approx 2(1 - 0.9772) = 0.0455. \end{aligned}$$

6.17

6.18

6.19

6.20 Låt X beskriva vikten i ton av en typisk järnvägsvagn. Modell: X har $E(X) = 10$ och $D(X) = 0.5$. Låt Y beskriva vikten för $n = 25$ vagnar,

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och fördelade som X. Då har Y väntevärde

$$\mu = E\left(Y\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = nE\left(X\right) = 25 \cdot 10 = 250$$

och varians

$$\sigma^2 = V\left(Y\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = nV\left(X\right) = 25 \cdot (0.5)^2 = 25/4$$

dvs $D\left(Y\right) = 5/2$ ton. Enligt Centrala gränsvärdessatsen är Y approximativt $\mathrm{N}(\mu, \sigma) = \mathrm{N}(250, 2.5)$. Sökt är

$$P\left(Y > 255\right) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{255-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(2\right) = 0.02275.$$

6.21 Låt X beskriva antalet barn i förskoleålder i ett hushåll. Modell: X har sannolikhetsfunktion

$$p_X(0) = 0.40 \quad p_X(1) = 0.20 \quad p_X(2) = 0.30 \quad p_X(3) = 0.10.$$

Då är

$$E\left(X\right) = \sum_k kP\left(X = k\right) = 0 \cdot 0.40 + \cdots 3 \cdot 0.10 = 1.1$$

och

$$V\left(X\right) = E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right) = \sum_k (k-1.1)^2 P\left(X = k\right) = 1.09.$$

Låt Y beskriva antalet barn i förskoleåldern i ett område med $n = 1000$ hushåll,

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och fördelade som X. Då har Y väntevärde

$$\mu = E\left(Y\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = nE\left(X\right) = 1000 \cdot 1.1 = 1100$$

och varians

$$\sigma^2 = V\left(Y\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \{\text{oberoende}\} = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = nV\left(X\right) = 1000 \cdot 1.09 = 1090.$$

dvs $D\left(Y\right) = \sqrt{1090}$ barn. Enligt CGS är Y approximativt $\mathrm{N}(\mu, \sigma) = \mathrm{N}(1100, \sqrt{1090})$. Vi söker y så att $P\left(Y < y\right) = 0.90$.

$$1 - \Phi\left(\lambda_{0.10}\right) = 0.10 \quad = \quad P\left(Y > y\right) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{y-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right).$$

Alltså är approximativt

$$\frac{y-\mu}{\sigma} = \lambda_{0.10}$$

eller

$$y = \mu + \lambda_{0.10}\sigma = 1100 + 1.2816 \cdot \sqrt{1090} = 1142.3.$$

Alltså, bygg 1143 platser.

6.22

6.23 Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n = 50$, beskriva livslängderna för elektronrören. Modell: X_i är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 200 (intensitet 1/200). Den totala tiden som lagret räcker beskrivs av $T = \sum_{i=1}^n X_i$ som har väntevärde

$$\mu = E(T) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 50 \cdot 200 = 10000$$

och varians

$$\sigma^2 = V(T) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \{\text{ober.}\} = \sum_{i=1}^n \underbrace{V(X_i)}_{=200^2} = 50 \cdot 200^2 = 2 \cdot 10^6.$$

Vi säker tiden t sådan att $P(T > t) = 0.90$. Enligt Centrala gränsvärdessatsen är T approximativt normalfördelat och

$$0.90 = P(T > t) = P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} > \frac{t-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right),$$

dvs $(t-\mu)/\sigma \approx \lambda_{0.90} = -\lambda_{0.10} = -1.2816$, eller

$$t \approx \mu - \lambda_{0.10}\sigma = 10000 - 1.2816 \cdot 1414.2 = 8187.6 \text{ timmar.}$$

6.24

6.25 Låt X beskriva vikten för en magnecyltablett. Modell: X är en stokastisk variabel med $E(X) = 0.65$ och $D(X) = 0.02$ [gram].

a) Låt Y beskriva den sammanlagda vikten av $n = 100$ tabletter. Då är $Y = X_1 + \cdots + X_n$ där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och fördelade som X. Vidare så är

$$E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = 0.65 + \cdots + 0.65 = 65 \text{ gram}$$

och

$$V(Y) = V(X_1 + \cdots + X_n) = \{\text{oberoende}\} = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = 0.02^2 + \cdots + 0.02^2 = 0.04 \text{ gram}^2,$$

det vill säga $D(Y) = 0.2$ gram.

b) Enligt Centrala gränsvärdessatsen är Y approximativt normalfördelad med väntevärde $\mu = 65$ och standardavvikelse $\sigma = 0.2$. Alltså är

$$P(Y \leq 65.3) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{65.3-\mu}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{65.3-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.50) = 0.9332.$$

6.26 Låt X beskriva vikten för en magnecyltablett. Modell: X är en stokastisk variabel med $E(X) = 0.65$ och $D(X) = 0.02$ [gram].

Låt Y beskriva den sammanlagda vikten av $n = 99$ tabletter. Då är $Y = X_1 + \cdots + X_n$ där $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende och fördelade som X. Vidare så är

$$\mu = E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = 0.65 + \cdots + 0.65 = 64.35 \text{ gram}$$

och

$$V(Y) = V(X_1 + \cdots + X_n) = \{\text{oberoende}\} = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = 0.02^2 + \cdots + 0.02^2 = 0.0396 \text{ gram}^2,$$

det vill säga $\sigma = D(Y) = 0.1990$. Enligt Centrala gränsvärdessatsen är Y approximativt normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse σ.

Alltså asken innehåller minst 100 tabletter om

$$P(Y < 65) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{65-\mu}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{65-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(3.266) \approx 0.9995.$$

6.27

6.28

6.29

7.1 Låt X beskriva antalet defekta bland de $n = 15$ utvalda. Modell: enheter är defekta oberoende av varandra med sannolikhet $p = 0.10$ så X är $\mathrm{Bin}(n, p)$, det vill säga

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Då är

$$E(X) = np = 15 \cdot 0.10 = 1.5$$

och

$$V(X) = np(1-p) = 15 \cdot 0.10 \cdot 0.90 = 1.35,$$

dvs $D(X) = \sqrt{V(X)} = 1.1619$. Vidare så är

$$P(X > 3) = P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.055556$$

alternativt

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - 0.94444 = 0.055556.$$

7.2 Låt Y beskriva antalet klave en person får i 2 oberoende slantsinglingar. Då är Y binomialfördelad, Y är $\mathrm{Bin}(2, 1/2)$.

Att en person får samma resultat i båda sina kast har sannolikhet

$$p = P(\{\text{Båda krona}\} \cup \{\text{Båda klave}\}) = P(Y = 0) + P(Y = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Personer singlar oberoende av varandra så av $n = 15$ personer beskrivs antalet personer med samma resultat i sina båda kast av den stokastiska variabeln X som är $\mathrm{Bin}(n, p) = \mathrm{Bin}(15, 0.5)$.

7.3

7.4

7.5

7.6 a) Ett försök lyckas med sannolikheten $p = 0.80$. Av $n = 12$ oberoende försök låt X beskriva antalet lyckade. Då är X binomialfördelad, $\mathrm{Bin}(n, p) = \mathrm{Bin}(12, 0.80)$.

b) Ett försök misslyckas med sannolikheten $q = 1 - p = 0.20$. Av $n = 12$ oberoende försök är antalet misslyckade försök $Y = n - X$ binomialfördelad, $\mathrm{Bin}(n, q) = \mathrm{Bin}(12, 0.20)$.

c) Nu är

$$\begin{aligned} P(2 \le Y \le 4) &= P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4) \\ &= \binom{n}{2} q^2(1-p)^{n-2} + \binom{n}{3} q^3(1-p)^{n-3} + \binom{n}{4} q^4(1-p)^{n-4} \\ &= 0.28347 + 0.23622 + 0.13288 = 0.65257. \end{aligned}$$

d) En liknande uträkning som i c) kan användas för att bestämma $P(7 < X \le 10)$. Vi kan även utnyttja sambandet mellan X och Y, sambandet mellan antalet lyckade och antalet misslyckade försök: $X+Y=n$. Alltså

$$\begin{aligned} P(7 < X \le 10) &= P(X=8)+P(X=9)+P(X=10) \\ &= P(Y=n-8)+P(Y=n-9)+P(Y=n-10) \\ &= P(Y=4)+P(Y=3)+P(Y=2) = 0.65257. \end{aligned}$$

7.7 Antag att ett frö gror med sannolikhet $p = 0.75$ oberoende av andra frön. Av $n = 15$ sådda frön låt X beskriva antalet frön som gror. Då är X binomialfördelad, X är $\mathrm{Bin}(n,p)$ och

$$P(0.65n \le X \le 0.90n) = P(9.75 \le X \le 13.5) = \sum_{k=10}^{13} P(X=k) = \sum_{k=10}^{13} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.77145.$$

Om man har tillgång till tabell för fördelningsfunktionen för binomialfördelningen kan man utnyttja den för att bestämma sannolikheten ovan.

$$P(0.65n \le X \le 0.90n) = P(9 < X \le 13) = F_X(13) - F_X(9) = 0.91982 - 0.14837 = 0.77145.$$

7.8

7.9 (Jämför med uppgift 7.2.)

Låt Y beskriva antalet klave i fem slantsinglingar. Då är Y binomialfördelad, Y är $\mathrm{Bin}(5, 1/2)$. Att en person får samma resultat i alla fem kast har sannolikhet

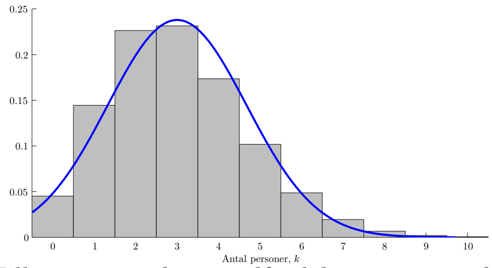
$$p = P(\{\text{Alla krona}\} \cup \{\text{Alla klave}\}) = P(Y=0)+P(Y=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

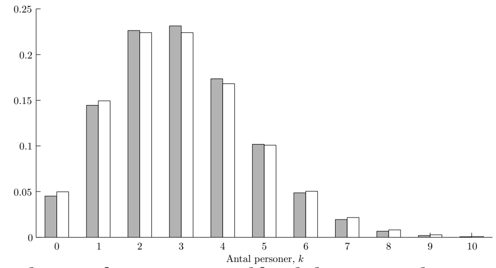
a) Personer singlar oberoende av varandra så av $n = 48$ personer beskrivs antalet personer med samma resultat i sina båda kast av den stokastiska variabeln X som är $\mathrm{Bin}(n,p) = \mathrm{Bin}(48, 1/16)$.

b) I binomialfördelningen så är

$$E(X) = np = 48 \cdot \frac{1}{16} = 3 \qquad V(X) = np(1-p) = 48 \cdot \frac{1}{16}\,\frac{15}{16} = \frac{45}{16}.$$

c) Tumregeln för normalapproximation av binomialfördelningen är att $V(X) = np(1-p) > 10$. Här är $V(X) \approx 2.81$ så normalapproximation vore olämpligt. Tumregeln för Poissonapproximation av binomialfördelningen är att $p < 0.10$. Här är $p = 1/16$ så Poissonapproximation är inte olämpligt.





Till vänster är binomialfördelningen inritad med tätheten för en normalfördelning med samma väntevärde och varians. Arean av binomialfördelningens staplar stämmer dåligt överens med motsvarande area under normalfördelningkurvan.
Till höger är binomialfördelningen (grå staplar) inritade tillsammans med Poissonfördelningen (vita staplar). Det är en hyffsad överensstämmelse mellan fördelningarna.

d) För binomialfördelningen har man att

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k) = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.64731.$$

Med Poissonapproximation, $\mu = np = 3$, erhålls

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k) \approx \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = 0.64723.$$

På samma sätt kan sannolikheten

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - 0.82083 = 0.17917$$

approximeras med

$$1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} 1 - 0.81526 = 0.18474.$$

7.10

7.11

7.12

7.13 Låt X beskriva antalet defekta byggelement bland $n = 1000$ stycken. Modell: Ett byggelement är defekt med sannolikhet $p = 0.10$ och oberoende av andra byggelement. X är $\mathrm{Bin}(n, p)$. Då är

$$P(80 \leq X \leq 120) = \sum_{k=80}^{120} P(X = k) = \sum_{k=80}^{120} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0.96948.$$

Med approximation. Vi vet att

$$E(X) = np = 100 = \mu \qquad V(X) = np(1-p) = 90 = \sigma^2$$

Då $V(X) \geq 10$ är approximation av binomialfördelningen med normalfördelningen tillåten, dvs X är approximativt $\mathrm{N}(\mu, \sigma) = \mathrm{N}(100, \sqrt{90})$. Då är

$$\begin{aligned} P(80 \leq X \leq 120) &= P\left(\frac{80-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{120-\mu}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{120-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(20/\sqrt{90}\right) - 1 = 0.96499. \end{aligned}$$

Med halvkorrektion får man svaret

$$\begin{aligned}P\left(80 \leq X \leq 120\right) &= P\left(79.5 \leq X \leq 120.5\right) = P\left(\frac{79.5-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{120.5-\mu}{\sigma}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{120.5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{79.5-\mu}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(20.5/\sqrt{90}\right) - 1 = 0.96930.\end{aligned}$$

7.14

7.15 Antag att en tillverkad enheter är defekt med sannolikhet $p = 0.005$ oberoende av andra tillverkade enheter. Av $n = 100$ tillverkade enheter låt X beskriva antalet defekta. Då är X binomialfördelad, X är $\mathrm{Bin}(n, p)$ och

$$q = P\left(X > 3\right) = 1 - P\left(X \leq 3\right) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P\left(X = k\right) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - 0.99833 = 0.00167.$$

Eftersom $p < 0.10$ är en Poissonapproximation av binomialfördelningen tillåten och approximativt erhålles med $\mu = np = 0.5$

$$P\left(X > 3\right) = 1 - P\left(X \leq 3\right) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P\left(X = k\right) \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = 1 - 0.99825 = 0.00175.$$

Alltså är en kartong med 100 enheter dålig med sannolikhet q oberoende av andra kartonger. Av $m = 10\,000$ kartonger är antalet dåliga kartonger, Y, binomialfördelat, det vill säga Y är $\mathrm{Bin}(m, q)$. Alltså är

$$P\left(Y > 25\right) = 1 - P\left(Y \leq 25\right) = 1 - \sum_{k=0}^{25} P\left(Y = k\right) = 1 - \sum_{k=0}^{25} \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} = 1 - 0.97871 = 0.02129.$$

Eftersom $q < 0.10$ är en Poissonapproximation av binomialfördelningen tillåten och approximativt erhålles med $\mu_2 = mq = 16.733$

$$P\left(Y > 25\right) = 1 - P\left(Y \leq 25\right) = 1 - \sum_{k=0}^{25} P\left(Y = k\right) \approx 1 - \sum_{k=0}^{25} \frac{\mu_2^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu_2} = 1 - 0.97862 = 0.02138.$$

Än enklare är förmodligen att utnyttja normalapproximation av binomialfördelningen. Här är $V\left(Y\right) = mq(1-q) \approx 16.7 > 10$ så normalapproximation kan göras. Med $\mu_2 = mq$ och $\sigma = \sqrt{mq(1-q)}$ erhålles

$$P\left(Y > 25\right) = P\left(\frac{Y-\mu_2}{\sigma} > \frac{25-\mu_2}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{25-\mu_2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(2.0228\right) = 1 - 0.97845 = 0.02155.$$

7.16 (Jämför med uppgift 2.21). Av $N = 100$ distinkta enheter är $s = 6$ defekta, det vill säga andelen defekta enheter är $p = 6\%$. Av $n = 5$ på måfå utvalda enheter låt X vara antalet defekta om urvalet skedde utan återläggning. Då är X hypergeometriskt fördelad och

$$P\left(X = k\right) = \frac{\begin{pmatrix}\text{\#sätt att välja} \\ k \text{ bland de de-} \\ \text{fekta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{\#sätt att välja} \\ 5-k \text{ bland de} \\ \text{hela}\end{pmatrix}}{\text{\#sätt att välja 5 bland alla}} = \frac{\binom{6}{k}\binom{94}{5-k}}{\binom{100}{5}}.$$

för $k = 0, 1, \ldots, 5$. Med andelen p som parameter är

$$E\left(X\right) = np = 5 \cdot 0.06 = 0.30 \qquad V\left(X\right) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} = 5 \cdot 0.06 \cdot 0.94\,\frac{100-5}{100-1} = 0.27061$$

dvs $D(X) = \sqrt{V(X)} = 0.5202$. Vidare så är

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{54891018 + 18297006}{75287520} = \frac{435643}{448140} = 0.97211.$$

7.17 I en population av storlek N är andelen p män, det vill säga antalet män i populationen är Np. Om n personer väljs på måfå är antalet utvalda män, X,

- hypergeometriskt fördelat om urvalet sker utan återläggning. Då är

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

- binomialfördelat om urvalet sker med återläggning. Då är

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p).$$

Med värden $n = 100$, $p = 0.60$ erhålles

		$V(X)$	
	$E(X)$	med	utan
$N = 200$	60	24	12.06
$N = 1000$	60	24	21.62

7.18 a) För att hypergeometrisk fördelning skall kunna approximeras med binomialfördelning skall populationens storlek N vara mycket större än urvalsstorleken n. Vi kräver att $n/N < 0.10$. Här är $n/N = 0.01$ så approximationen är tillåten.

b) För att hypergeometrisk fördelning skall kunna approximeras med normalfördelning skall variansen inte vara för liten. Vi kräver att $V(X) = np(1-p)d_n^2 > 10$. Här är variansen 78 så approximationen är tillåten.

c) Tvåstegsapproximation. Eftersom $n/N = 0.05 < 0.10$ så kan fördelningen approximeras med binomialfördelningen. Denna binomialfördelning låter sig approximeras med normalfördelningen om dess varians $np(1-p) > 10$. Här är $np(1-p) = 345$ så normalapproximationen är tillåten. (Bättre är dock att göra approximationen i ett steg och använda $np(1-p)d_n^2$ som varians i normalfördelningen.

d) Enstegsapproximation. Approximationen är tillåten om $p + n/N < 0.10$. Här är $p + n/N = 0.065$ så approximationen är tillåten.

Tvåstegsapproximation. Eftersom $n/N = 0.025 < 0.10$ så kan fördelningen approximeras med binomialfördelningen. Denna binomialfördelning låter sig approximeras med Poissonfördelningen om $p < 0.10$. Här är $p = 0.04$ så Poissonapproximationen är tillåten.

7.19

7.20

7.21

7.22 För en Poissonfördelad stokastisk variabel X med parameter μ är $E(X) = \mu$ och $V(X) = \mu$. Variationskoefficienten

$$\frac{D(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{2}$$

vilket ger $\mu = 4$. Då är

$$P(X = 0) = \frac{\mu^0}{0!}e^{-\mu} = e^{-\mu} = 0.018316.$$

7.23

7.24 Låt $X_1, \ldots, X_4$ beskriva antalet samtal till telefon 1,…,4 under tidsintervallet. Modell: X_i är oberoende och Poissonfördelade med väntevärden

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 1 \qquad E(X_4) = 0.5.$$

Med Y som det totala antalet samtal till kontoret är

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde

$$m = E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 3.5.$$

Sökt är

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{m^k}{k!}e^{-m} \\ &= 1 - 0.32085 = 0.67915. \end{aligned}$$

7.25

7.26 Låt X beskriva antalet blodkroppar i 1mm^3 blod hos personen. Då är X Poissonfördelad med parameter $\lambda = 6000$. Då är

$$P(X < 5000) = \sum_{k=0}^{4999} P(X = k) = \sum_{k=0}^{4999} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1.1 \cdot 10^{-40}.$$

Eftersom $\lambda > 15$ är normalapproximation av Poissonfördelningen tillåten. Med normalapproximation fås,

$$P(X < 5000) = P\left(\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < \frac{5000 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Phi\left(\frac{5000 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = \Phi(-12.91) = 2.0 \cdot 10^{-38}.$$

Antalet blodkroppar i en ml = 1000 mm^3 blod är Poissonfördelat med väntevärde 1000λ. Dessa blandas upp i en vätska om 1 liter = 10^6 mm^3. Om en mm^3 vätska plockas ut ansätter vi modellen att varje blodkropp i vätskan har sannolikheten $p = 1/10^6$ tas med i urvalet. Antalet blodkroppar i urvalet, Y, blir då Poissonfördelat med parameter $\mu = (1000\lambda)p = 6$. Då är

$$P(Y < 5) = \sum_{k=0}^{4} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = 0.28506.$$

7.27 Låt $X_1, \ldots, X_n$ beskriva antalet larm under dagar $1, \ldots, n$. Modell: X_i är oberoende och Poissonfördelade. Det totala antalet larm under ett år är

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

en summa av oberoende Poissonfördelade stokastiska variabler, alltså är Y Poissonfördelad med parameter

$$\mu = E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nE(X_i) = 365 \cdot \frac{1}{2} = 182.5.$$

Nu är

$$P(Y > 200) = 1 - P(Y \leq 200) = 1 - \sum_{k=0}^{200} P(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{200} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = 1 - 0.90717 = 0.09283.$$

Eftersom $\mu \geq 15$ så kan fördelningen för Y approximeras med en normalfördelning, $\mathrm{N}(\mu, \sqrt{\mu})$. Då är

$$P(Y > 200) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sqrt{\mu}} > \frac{200 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) = 1 - \Phi(1.2954) = 1 - 0.90241 = 0.09759.$$

Än bättre blir approximationen om man utnyttjar halvkorrektion. Då är

$$\begin{aligned} P(Y > 200) &= P(Y > 200.5) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sqrt{\mu}} > \frac{200.5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200.5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) = 1 - \Phi(1.3324) \\ &= 1 - 0.90864 = 0.09136. \end{aligned}$$

7.28 Låt X beskriva antalet flygplan av $n = 100$ som totalhavererar under ett år. Modell: plan totalhavererar med sannolikhet $p = 0.008$ och oberoende av varandra. X är $\mathrm{Bin}(n, p)$. Försäkringsbolagest vinst ges av

$$Y = n \cdot 10^4 - X10^6 = 10^6(1 - X).$$

Händelsen $Y < 0$ är samma händelse som $X > 1$ och

$$\begin{aligned} P(Y < 0) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\binom{n}{0} p^0 (1 - p)^{100} + \binom{n}{1} p^1 (1 - p)^{99}\right) = 1 - 0.80908 = 0.19092. \end{aligned}$$

Poissonapproximation av Binomialfördelningen går bra om $p < 0.10$, så här kan X sägas vara approximativt Poissonfördelad med parameter $\mu = E(X) = np = 0.8$. Då är

$$1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - \left(\frac{\mu^0}{0!} \mathrm{e}^{-\mu} + \frac{m^1}{1!} \mathrm{e}^{-\mu}\right) = 1 - 0.80879 = 0.19121.$$

7.29

7.30

7.31 Låt X vara Poissonfördelad med parameter λ och beskriva antalet ägg som insekten lägger. Varje ägg kläcks med sannolikhet p oberoende av andra ägg. Låt Y vara antalet ägg som kläcks. Då är $S_Y = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och givet att $X = n$ är antalet ägg som kläcks binomialfördelat, $\mathrm{Bin}(n, p)$. Alltså, för $k = 0, 1, 2, \ldots$ är

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k | X = n) P(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1 - p))^{n-k}}{(n - k)!} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1 - p))^n}{n!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(p\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-p\lambda} = \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu}, \end{aligned}$$

det vill säga Y är Poissonfördelad med parameter $\mu = p\lambda$.