

# BESLUT UNDER OSÄKERHET

## BAKGRUND: St PETERSBURG-PARADOXEN

Företag och individer måste ofta fatta beslut under osäkerhet.

Man måste med andra ord fatta beslut utan att veta vilken situation  $s_i$ ,  $i=1,2,...,S$  som kommer att råda. Man vill kanske, som Kåren på 1980-talet, driva en uteservering (Pinellan) utan att veta om sommaren blir solig eller regnig.

Vi tänker oss i allmänhet att osäkerheten begränsar sig till att man inte vet vilket  $s_i$  som kommer att gälla.

2.

Beslutsfattarna antas i allmänhet känna till sannolikheten  $p_i$  för en given situation  $s_i$ , eller åtminstone ha bildat sig en uppfattning som kan vara realistisk eller orealistisk (*subjektiv sannolikhet*).

Val under osäkerhet betyder att man under dessa omständigheter måste välja mellan olika handlingar  $A_j$ ,  $j=1,2,\dots,n$  (att t.ex satsa på en uteservering, låta bli, eller rentav satsa på att sälja paraplyer).

Varje handling och situation antas vara förknippad med konsekvenser  $y_{ij}$ .

3.

Beslutssituationen kan då struktureras som ett val mellan de  $n$  raderna i följande tabell:

|       | $s_1$    | $s_2$    | . | . | . | $s_S$    |
|-------|----------|----------|---|---|---|----------|
| $a_1$ | $y_{11}$ | $y_{12}$ | . | . | . | $y_{1S}$ |
| $a_2$ | $y_{21}$ | $y_{22}$ | . | . | . | $y_{2S}$ |
| .     |          |          |   |   |   | .        |
| .     |          |          |   |   |   | .        |
| .     |          |          |   |   |   | .        |
| $a_n$ | $y_{n1}$ | $y_{n2}$ | . | . | . | $y_{nS}$ |

4.

När det gäller ekonomiskt beteende ligger det nära till hands att konsekvenserna handlar om den ekonomiska utdelningen. Om  $y_{ij}$  står för den payoff som förknippas med situationen  $i$  och handlingen  $j$ , så skulle handlingen  $a_j$  vara förknippad med följande förväntade utdelning:

$$\bar{y}_j = \sum_{i=1}^S p_i y_{ij}.$$

(Men vi kan också tänka oss att situationerna representeras av någon kontinuerlig variabel som konsekvenserna är en funktion av.)

5.

Man tänker sig ofta att beslut baseras på ett sådant väntevärde, men det kan finnas goda skäl att beakta också andra parametrar.

Exempel: Antag två situationer med sannolikheterna 0.9 och 0.1. Om den ekonomiska utdelningen är 101 miljoner euro respektive 91 miljoner så blir väntevärdet 100.

Men vi får samma väntevärde om sannolikheterna är 0.8 och 0.2 men utfallen är –100 respektive 900, även om beslutet leder till konkurs med en sannolikhet av 80%!

6.

Att det förväntade ekonomiska utfallet kan vara ett ohållbart beslutskriterium illustreras också av den så kallade St Petersburgsparadoxen, påvisad av Bernoulli.

Vad skulle en rationell individ vara villig att betala för att delta i följande spel:

En slant ger krona och klave med lika sannolikhet. Spelaren erhåller  $2^n$  euro om den måste kastas  $n$  gånger för att det skall bli krona. Krona vid första försöket skulle således ge 2 euro, men vid tredje försöket 8 euro och vid fjärde försöket 16.

7.

Sannolikheten för krona i det  $n$ :te försöket är produkten av sannolikheten för klave i  $n-1$  försök, dvs

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

och sannolikheten för krona i ett givet försök, som är  $1/2$ .

Produkten blir då

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

vilket betyder att den förväntade utdelningen  $\bar{y}$  blir

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k 2^k = \infty.$$

8.

Det finns med andra ord inget pris för att delta i detta spel som är för högt för att avskräcka spelaren.

Men man kan visa att serien konvergerar om man ersätter utdelningen med en konkav funktion  $v(2^n)$  av utdelningen.

Vi skulle med andra ord behöva en indirekt nyttofunktion som uppvisar avtagande gränsnytta av inkomst.

Det här innebär strängare antaganden om de individuella preferenserna än i teorin om konsumentens beteende, eftersom alla indirekta nyttofunktioner som är förenliga med våra axiom inte är konkava.

9.

## TEORIN OM FÖRVÄNTAD NYTTA

Vi skall nu visa att det under vissa antaganden är rationellt att maximera den förväntade nyttan, det vill säga väntevärdet av en sådan konkav funktion.

En handling eller ett beslut  $A$  förknippas med ett *prospekt* som betecknas

$$Q^A = (p, y^A),$$

där  $p$  är en vektor av sannolikheter för ett finit antal situationer och  $y^A$  en vektor som representerar utfallet i respektive situation. Utfallen antas representera inkomstnivåer.

10.

Vi kan också tänka på prospekten som inkomstnivåernas sannolikhetsfördelningar.

Vi ställer nu upp ett antal axiom för individernas preferenser i förhållande till prospekten.

***Axiom 1) Fullständighet och transitivitet:***

a)  $\forall i, j \text{ gäller } Q^i R Q^j \vee Q^j R Q^i$

b)  $Q^i R Q^j \wedge Q^j R Q^k \Rightarrow Q^i R Q^k$

11.

Nästa axiom baseras på begreppet *jämförelseprospekt* eller *standardprospekt*.

Det finns  $n$  prospekt och  $S$  situationer, och således  $nS$  olika inkomstnivåer. Låt  $y_U$  beteckna den högsta nivån av alla, och  $y_L$  den lägsta. Varje utfall måste då finnas i intervallet  $[y_L, y_U]$ .

Ett jämförelseprospekt kan bara avkasta antingen  $y_U$  med sannolikheten  $v$  eller  $y_L$  med sannolikheten  $1-v$ . Ett givet jämförelseprospekt med  $v=v_1$  betecknas:

$$Q_0^1 = (v^1, y_U, y_L).$$

12.

Vi får ett annorlunda jämförelseprospekt om sannolikheten för det bättre utfallet i stället är  $v^2$ , nämligen

$$Q_0^2 = (v^2, y_U, y_L).$$

***Axiom 2. Jämförelseprospekt rangordnas på basen av sannolikhet:***

*Givet två jämförelseprospekt  $Q_0^1$  och  $Q_0^2$  gäller:*

$$Q_0^1 P Q_0^2 \Leftrightarrow v^1 > v^2,$$

$$Q_0^1 \sim Q_0^2 \Leftrightarrow v^1 = v^2.$$

13.

***Axiom 3. Det ekvivalenta jämförelseprospektet:***

*Betrakta en säker inkomstnivå  $y^1 \in [y_U, y_L]$ . Det existerar då en unik sannolikhet  $v^1$  som är sådan att*

$$y^1 \sim Q_0^1 = (v^1, y_U, y_L).$$

Vi kan med andra ord alltid hitta en sannolikhet för det bättre utfallet i ett jämförelseprospekt som gör att det väger jämnt mellan detta och den säkra inkomsten (även om sannolikheten i extrema fall är 0 eller 1).

14.

Axiom 3 definierar en funktion som avbildar intervallet  $[y_L, y_U]$  på intervallet  $[0, 1]$ , för varje inkomstnivå mellan  $y_L$  och  $y_U$  är ju förknippad med en unik sannolikhet:

$$v(y^1): [y_L, y_U] \rightarrow [0, 1].$$

Eftersom mera inkomst föredras framom mindre, följer av Axiom 2 att funktionen  $v(y^1)$  måste vara tilltagande i  $y^1$ .

Funktionen är unik för givna  $y_L$  och  $y_U$ , men en annan kombination av ändpunkter skulle ge en annan funktion.

15.

Det fjärde axiomet förutsätter att vi definierar ett så kallat *sammansatt prospekt* (compound prospect).

Med ett sammansatt prospekt avses att (minst) ett av dess utfall är ett annat prospekt, inte en säker inkomstnivå.

Exempel: Om den häst som en spelare satsat på vinner, så använder han utdelningen till att satsa på en annan häst i följande lopp.

16.

$y$  = inkomst

$t$  = satsning i omgång 1

$p_1$  = förlustchans i första omgången

$p_2$  = förlustchans i en eventuell andra omgång

$W_1$  = vinst i omgång 1

$W_2$  = vinst i omgång 2

$W_1 + t$  = satsning i en eventuell andra omgång

17.

Det sammansatta prospektet kan betecknas

$$\begin{aligned} Q_c^d &= [p_1, y - t, (p_2, y + W_1 - t - W_1, y + W_2)] = \\ &= [p_1, y - t, (p_2, y - t, y + W_2).] \end{aligned}$$

Låt  $Q^1$  stå för det utfall som innebär ett prospekt, dvs.

$(p_2, y - t, y + W_2)$ . Det sammansatta prospektet kan då skrivas:

$$Q_c^d = (p_1, y - t, Q^1).$$

18.

Beslutet att satsa en eventuell vinst i omgång 2 innebär att det egentligen bara är två utfall som är relevanta:

1) Förlust i *antingen* omgång 1 eller 2, med sannolikheten

$$\hat{p} = p_1 + (1 - p_1)p_2,$$

vilket betyder att insatsen  $t$  går förlorad;

2) Vinst i både omgång 1 och 2, med sannolikheten

$$1 - \hat{p} = (1 - p_1)(1 - p_2),$$

varvid utdelningen blir  $y + W_2$ .

19.

Spelaren behåller inte en eventuell vinst  $W_1$  i omgång 1. Följande enkla prospekt innebär således samma villkor som det sammansatta prospektet  $P_c^d$  ovan:

$$Q^d = (\hat{p}, y - t, y + W_2).$$

En rationell spelare borde vara indifferent mellan  $Q_c^d$  och  $Q^d$ .

20.

Vi betraktar nu sådana sammansatta prospekt vars samtliga utfall utgörs av jämförelseprospekt:

$$Q_c^1 = [p^1, (v^1, y_U, y_L), (v^2, y_U, y_L), \dots, (v^S, y_U, y_L)],$$

eller

$$Q_c^1 = (p^1; Q_0^1, Q_0^2, \dots, Q_0^S),$$

där  $p^1$  är en vektor vars element representerar sannolikheterna för de  $S$  situationerna. Varje situation ger ett utfall som är förknippat med en given sannolikhet  $v^i$  för det högsta utfallet  $y_U$ .

21.

Den sannolikhet för det bättre utfallet  $y_U$  som prospektet  $Q_c^1$  förknippas med är då

$$\bar{v} = p_1^1 v^1 + p_2^1 v^2 + \dots + p_S^1 v^S.$$

Varje term representerar sannolikheten för att få  $y_U$  via något av jämförelseprospekten  $Q_0^i$ . Summan representerar den förväntade sannolikheten för att överhuvudtaget få  $y_U$ .

Sannolikheten för att få  $y_L$  är då  $1 - \bar{v}$ .

22.

Vi kan därmed definiera det sammansatta prospektet  $Q_c^1$ :s *rationella ekvivalent* så här:

$$Q_r^1 = (\bar{v}, y_U, y_L).$$

***Axiom 4. Den rationella ekvivalentens likvärdighet:***

*Givet vilket som helst sammansatt prospekt  $Q_c^1$  vars utfall representeras av jämförelseprospekt, samt dess rationella ekvivalent  $Q_r^1$ , gäller:*

$$Q_c^1 \sim Q_r^1$$

Detta antagande beträffande beslutsfattarens rationalitet är rätt strängt. Det förutsätter en avancerad förmåga att kalkulera.

23.

Notera att Axiom 3 innebar att varje inkomstnivå  $y^1$  kunde ersättas av ett likvärdigt jämförelseprospekt genom en lämpligt vald sannolikhet för det högsta utfallet  $y_U$ .

Betrakta följande prospekt:

$$Q^j = (p, y^j) = (p_1, p_2, \dots, p_S; y_1^j, y_2^j, \dots, y_S^j).$$

Ersätt nu varje utfall med ett ekvivalent jämförelseprospekt:

$$y_i^j \sim Q_0^{ji} = (v^{ji}, y_U, y_L),$$

där  $v^{ji}$  står för  $v(y_i^j)$ .

24.

Betrakta nu det sammansatta prospekt som erhålles genom att ersätta varje  $y_i^j$  med ett jämförelseprospekt enligt ovan:

$$Q_c^j = (p, Q_0^{j1}, Q_0^{j2}, \dots, Q^{jS}).$$

***Axiom 5. Oberoende av sammmanhang:***

$$Q^j \sim Q_c^j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Vi kan med andra ord ersätta inkomstutfallen i ett prospekt  $j$  med jämförelseprospekt utan att  $j$ :s rangordning förändras.

25.

Ett exempel på vad Axiom 5 innebär:

Antag a) att den givna inkomstnivån 70 uppfattas som likvärdig med ett spel som ger 200 och 10 med lika sannolikhet;

b) att den givna nivån 100 uppfattas som likvärdig med ett spel som ger 200 med sannolikheten 0.75 (och således 10 med sannolikheten 0.25).

Då säger Axiom 5 att följande spel är likvärdiga:

i) utfallen 70 och 100 med lika sannolikhet;

ii) ett spel som med lika sannolikhet ger antingen ett spel där man får 200 respektive 10 med lika sannolikheter, eller ett spel där sannolikheten för 200 är 0.75 (och 0.25 för 10).

26.

Med andra ord skall följande gälla:

$$(0.5;70, 100) \sim [0.5;(0.5;200, 10), (0.75;200, 10)]$$

Vi kan nu använda dessa axiom för att representera beslutsfattarens preferensordning.

A5: Om vi skall välja mellan ett antal prospekt  $Q^j$ , så kan de ersättas med sammansatta prospekt bestående av jämförelseprospekt. Varje prospekt ses således som bestående av ett antal olika möjligheter att erhålla det bästa utfallet.

27.

A4: Vart och ett av de sammansatta prospekten  $Q_c^j$  kan ersättas av sin rationella ekvivalent:

$$Q^j \sim Q_c^j \sim Q_r^j,$$

eller

$$(p, y^j) \sim (p; Q_0^{j1}, Q_0^{j2}, \dots, Q_0^{js}) \sim (\bar{v}^j, y_U, y_L),$$

där  $Q_0^{ji} = (v^{js}; y_U, y_L)$  och  $\bar{v}^j = \sum_i p_i v^{js} = \sum_j p_s v(y_i^j)$ .

28.

A2: De rationella ekvivalenterna  $Q_r^j$  kan rangordnas på basen av sannolikheterna  $\bar{v}$ , dvs.

$$Q_r^j P Q_r^k \Leftrightarrow \bar{v}^j > \bar{v}^k,$$

$$Q_r^j \sim Q_r^k \Leftrightarrow \bar{v}^j = \bar{v}^k.$$

Det betyder att beslutsfattaren väljer mellan (de jämförelseprospekt som utgör) rationella ekvivalenter *som om* det gällde att erhålla ett så högt värde som möjligt på  $\bar{v}$ . Kan detta utsträckas till att gälla valet mellan alla prospekt?

29.

A1: Preferensordningen över alla prospekt inklusive jämförelseprospekten är transitiv, dvs.

$$Q^j \sim Q_r^j P Q_r^k \sim Q^k \Rightarrow Q^j P Q^k.$$

Vi kan således konstruera en funktion  $v(y)$  utgående från parvisa jämförelser mellan inkomstnivåerna i intervallet  $[y_L, y_U]$  och jämförelseprospekten  $Q_0$ .

Vi kan därefter jämföra två prospekt, t.ex  $Q^1$  och  $Q^2$ , genom att sätta de inkomstvärden  $y_i^1$  och  $y_i^2$  som de innebär i funktionen ovan, så att vi får  $v(y_i^1)$  och  $v(y_i^2)$ . Vi väljer sedan mellan prospekten utgående från vilket av väntevärdena  $\bar{v}^1 = \sum_i p_i v(y_i^1)$  och  $\bar{v}^2 = \sum_i p_i v(y_i^2)$  som är högre.

30.

Funktionen  $v(y)$  brukar kallas nyttofunktion, för den är en funktion som rangordnar på samma sätt som en preferensordning, men skall inte tolkas som ett mått på livskvalitet.

Uttrycket  $\bar{v}^j = \sum_i p_i v(y_i^j)$  kallas *den förväntade nyttan* av prospekt  $j$ .

Axiomen A1-A5 innebär att man väljer mellan prospekten *som om* man maximerade den förväntade nyttan. Den teori som baseras på dessa axiom brukar kallas teorin om förväntad nytta.

31.

Välj alltså mellan t.ex prospekten  $Q^1$  och  $Q^2$  genom att

i) finna  $v(y)$  genom parvisa jämförelser mellan inkomstnivåerna i  $[y_L, y_U]$  och olika jämförelseprospekt  $Q_0$ ;

ii) sätta in prospektens inkomstnivåer  $y_i^1$  och  $y_i^2$  i  $v(y)$  för att få  $v_i^1 = v(y_i^1)$  och  $v_i^2 = v(y_i^2)$ ;

iii) räkna ut den förväntade nyttan som vägda summor där vikterna utgörs av sannolikheten för respektive situation, dvs.  $\bar{v}^1 = \sum_i p_i v(y_i^1)$  och  $\bar{v}^2 = \sum_i p_i v(y_i^2)$ ;

iv) välj  $Q^1$  om  $\bar{v}^1 > \bar{v}^2$  och *vice versa*.

32.

### EXEMPEL

| $p_i$   | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $y_i^1$ | 0   | 10  | 20  | 40  | 50  | 100 |
| $y_i^2$ | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  | 20  |

$$\sigma_y^2 = 749$$

$$\bar{y}^1 = 31$$

33.

Tag först intuitivt ställning till prospekten. Fyll sedan i den sannolikhet som du anser att nedanstående jämförelseprospekt måste ha för utfallet 100 för att vara likvärdigt med de olika utfallsnivåerna:

$$0 \sim ( \quad ; 0, 100)$$

$$10 \sim ( \quad ; 0, 100)$$

$$20 \sim ( \quad ; 0, 100)$$

$$40 \sim ( \quad ; 0, 100)$$

$$50 \sim ( \quad ; 0, 100)$$

$$100 \sim ( \quad ; 0, 100)$$

34.

Rita ett diagram utfallsnivåerna på den horisontella axeln och med de sannolikhetsnivåer  $v(y_i^j)$  som motsvarar dina egna subjektiva preferenser på den vertikala axeln!

Använd sedan sannolikheten för de givna utfallsnivåerna som vikter när du summerar över alla  $v(y_i^j)$ :

$$\bar{v}^1 = 0.1v(0) + 0.2v(10) + 0.3v(20) + \\ + 0.2v(40) + 0.1v(50) + 0.1v(100).$$

$Q^2$  representerar ett säkert prospekt, så det som  $\bar{v}^1$  skall jämföras med är  $\bar{v}^2 = v(20)$ . Stämmer rangordningen mellan  $\bar{v}^1$  och  $v(20)$  överens med ditt intuitiva val?

35.

### **NYTTOFUNKTIONENS EGENSKAPER**

Följande siffror skulle kunna svara mot en nyttofunktion:

|     |   |                |
|-----|---|----------------|
| 0   | ~ | (0; 0, 100)    |
| 10  | ~ | (0.4; 0, 100)  |
| 20  | ~ | (0.6; 0, 100)  |
| 40  | ~ | (0.87; 0, 100) |
| 50  | ~ | (0.9; 0, 100)  |
| 100 | ~ | (1.0; 0, 100)  |

Denna nyttofunktion ger  $\bar{v}=0.62$ , som är större än  $v(20):0.6$ . Det osäkra projektet föredras således. Notera att  $\bar{v}$  värderas lika högt som en säker inkomst på ca 24. Projektets väntevärde är 31;  $v(31)=0.72$ .

36.

En *konkav* nyttofunktion innebär att en linje som sammanbinder två av dess punkter (en lineär kombination med vikter som summerar till ett) måste ligga nedanför kurvan. Den förväntade nyttan är i så fall lägre än den nytta som representerar väntevärdet.

Det osäkra prospektet i vårt exempel hade väntevärdet 31. Eftersom kurvan är konkav, så gäller  $v(\bar{y}) = v(31) = 0.72$  större än  $\bar{v}^1 = 0.62$ .

Det är bekvämt att anta att nyttofunktionen är deriverbar åtminstone två gånger.

37.

En nyttofunktion för vilken  $v'' < 0$  är konkav och ger således uttryck för *riskaversion*.

Den motsatta situationen ( $v'' > 0$ ) betyder att man prefererar risk framom säkerhet när det gäller prospekt med samma förväntade utdelning.

En linjär nyttofunktion ( $v'' = 0$ ) innebär *riskneutralitet*.

Med  $Q$ :s *säkerhetsekvivalent* avses den säkra inkomst  $Y_c$  (ca 24 i exemplet) som ger samma nytta, dvs.

$$y_c \sim Q \text{ eller } v(y_c) = \bar{v} = \sum_i p_i y_i.$$

38.

För en *riskaversiv* person gäller  $y_c < \bar{y}$ , för man är villig att acceptera än lägre säker inkomst  $y_c$  framom ett osäkert prospekt som förväntas ge  $\bar{y}$ .

På motsvarande sätt inses att en positiv riskpreferens innebär  $y_c > \bar{y}$ , medan riskneutralitet innebär  $y_c = \bar{y}$ , dvs. att prospekten värderas enligt sitt väntevärde.

$r = \bar{y} - y_c$  kallas *riskpremium* och innebär att man är villig att köpa en försäkring: man avstår från en del av sin förväntade inkomst i utbyte mot säkerhet (31–24=7 ovan).

39.

Nyttofunktionens krökning är avgörande för avståndet mellan  $y_c$  och  $\bar{y}$ , och brukar användas som mått på graden av riskaversion. Det kan inses genom ett approximativt uttryck för  $r$ .

Vi skriver om inkomsten  $y_i$  som  $\bar{y} + z_i$ , där  $z_i$  är en positiv eller negativ avvikelse från medeltalet. Riskpremien borde då lösas ut från följande ekvation:

$$v(y_c) = v(\bar{y} - r) = \sum_{i=1}^S p_i v(\bar{y} + z_i). \quad (1)$$

40.

Vi ersätter nu vänstra ledet med en förstaordningens Taylorapproximation

$$v(\bar{y} - r) \approx v(\bar{y}) - v'(\bar{y})r$$

och varje term i högra ledet med en andraordningens Taylorapproximation:

$$v(\bar{y} + z_i) \approx v(\bar{y}) + v'(\bar{y})z_i + \frac{1}{2}v''(\bar{y})z_i^2.$$

41.

Ekvation (1) kan då approximeras på följande sätt:

$$v(\bar{y}) - v'(\bar{y})r \approx v(\bar{y})\Sigma_i p_i + v'(\bar{y})\Sigma_i p_i z_i + \frac{1}{2}v''(\bar{y})\Sigma_i p_i z_i^2.$$

Notera att

1) de första termerna i vänstra respektive högra ledet tar ut varandra;

2) väntevärdet av avvikelserna  $z_i$  måste vara noll;

3)  $\Sigma_i p_i z_i^2 = \sigma_z^2$ , dvs variansen av  $z$ .

42.

Vi får med andra ord:

$$-v'(\bar{y})r \approx \frac{1}{2} v''(\bar{y})\sigma_z^2,$$

eller

$$r \approx -\frac{1}{2} \frac{v''(\bar{y})}{v'(\bar{y})} \sigma_z^2 = \frac{1}{2} A(\bar{y}) \sigma_z^2.$$

$r$  kallas också *riskkostnaden*, medan vissa författare använder benämningen riskpremium för  $r/\bar{y}$ .)

$A(\bar{y})$  kallas *Arrow-Pratt måttet på absolut riskaversion* och uttrycker nyttofunktionens kurvatur. Vårt exempel ger 0.02, för  $\sigma_z^2 = 749$ .

43.

En viktig klass av nyttofunktioner kännetecknas av konstant (absolut) riskaversion  $A$ . Definitionen av den absoluta riskaversionen definierar i så fall en lineär första-gradens differentialekvation för gränsnyttan:

$$v''(y) = -Av'(y).$$

En sådan differentialekvation har lösningen

$$v'(y) = Ae^{-Ay},$$

vilket kan verifieras, för

$$-v''(y)/v'(y) = -(-A^2e^{-Ay}/Ae^{-Ay}) = A.$$

44.

När vi integrerar uttrycket för gränsnyttan ovan, erhålles

$$v(y) = k - e^{-Ay},$$

där  $k$  är en integrationskonstant. Derivatan av uttrycket ovan är mycket riktigt  $Ae^{-Ay}$ .

Integrationskonstanten kan väljas godtyckligt och påverkar inte rangordningen av olika alternativ. Vi kan emellertid fastställa ett värde genom att till exempel anta att  $v(0) = 0$ :

$$k - e^{-0 \times A} = 0.$$

45.

Av detta följer att  $k=1$ . I så fall gäller att  $v(y)$  går mot 1.0 när  $y$  går mot oändligheten.

Med den *relativa riskversionen* avses gränsnyttans elasticitet med avseende  $y$ , eller i punkten  $\bar{y}$

$$R = -v''(\bar{y})\bar{y}/v'(\bar{y}).$$

Konstant relativ riskaversion innebär att individens benägenhet att ta risker stiger med inkomsten. Låt  $R$  vara en parameter i intervallet  $[0,1[$ . Nyttofunktionen

$$v(y) = \frac{1}{1-R} (1 + y^{1-R})$$

upvisar då den konstanta relativa riskversionen  $R$ , medan  $\log y$  har denna egenskap med  $R=1$ .

46.

Vi kunde ovan fritt välja  $k$  i nyttofunktionen  $v(y) = k - \exp[-Ay]$ . Men vi kan inte göra vilka monotona transformationer som helst utan att ändra attityden till risk.

Nyttofunktionen  $\sqrt{y}$  har till exempel andraderivatan  $-y^{3/2}/4$  och kännetecknas således av riskaversion.

Konsumenten rangordnar varukorgar på samma sätt även om nyttofunktionen kvadreras, men i detta fall skulle den bli lineär och således uppvisa riskneutralitet. Högre potenser skulle göra  $v''$  positiv.

Vi kan emellertid göra positiva lineära transformationer av en nyttofunktion utan att ändra rangordningen av prospekten.

47.

## KRITIK MOT TEORIN OM FÖRVÄNTAD NYTTA

Teorin, och i synnerhet A4-A5, innebär starka antaganden om beslutsfattarnas förmåga att kalkylera.

Psykologiska experiment tyder på att systematiska felslut är vanliga när det gäller att uppskatta till exempel sannolikheter. Kahneman och Tversky nämner följande problem:

1) **Representativitetsfel:** Individ  $N$  är undehållande, och 90% av alla nationalekonomer är underhållande. Kan vi alltså gissa oss till att  $N$  är en nationalekonom?

2) **Oberoende av stickprovsstorlek:** Behövs det en stor förlossningsavdelning för att det oftare skall hända att över 60% av de nyfödda är pojkar?

48.

3) **'Gambler's fallacy':** Minskar det sannolikheten för att någon annan skall ha en bomb med sig på ett flygplan om man själv tar en med sig?

4) **Tillgänglighetsfel:** Fantasin begränsar vår förmåga att gissa sannolikheter. Blir rökning farligare för att någon nära bekant har drabbats av lungcancer?

5) **Förankring:** Om jag skriver ett godtyckligt tal på tavlan innan någon annan har kommit in i rummet så kan det påverka folks gissningar om jag till exempel frågar efter antalet medlemsstater i FN.

49.

**Allais' paradox:** Välj mellan 0.5 milj. ( $=Q^0$ ) och prospektet

$$Q^1 = (p^1, y^1) = [(0.1, 0.89, 0.01), (2.5, 0.5, 0)].$$

För den som föredrar det säkra alternativet gäller

$$v(0.5) > 0.1v(2.5) + 0.89v(0.5) + 0.01v(0),$$

vilket innebär

$$0.11v(0.5) > 0.1v(2.5) + 0.01v(0).$$

Betrakta nu valet mellan två andra prospekt:

$$Q^2 = (p^2, y^2) = [(0.11, 0.89), (0.5, 0)],$$

$$Q^3 = (p^3, y^3) = [(0.1, 0.9), (2.5, 0)].$$

50.

För den som föredrog  $Q^3$  gäller

$$0.1v(2.5)+0.9v(0) > 0.11v(0.5)+0.89v(0),$$

vilket kan förenklas till

$$0.1v(2.5)+0.01v(0) > 0.11v(0.5)$$

Rangordningen  $Q^3 P Q^2$  är således inkonsistent med rangordningen  $Q^0 P Q^1$ , men konstateras ofta i experimentsituationer.

51.

Vi tänker oss nu att det egentligen handlar om tre situationer också i det senare valet, och att de äger rum med sannolikheterna 0.01, 0.1 och 0.89 som i samband med  $Q^1$  ovan.

Men utfallet för  $Q^2$  i både situation 1 och situation 2 är 0.5, så den sammanlagda sannolikheten för 0.5 är 0.11.

Prospektet  $Q^3$  antas inbringa 0 både i situation 1 och 3, så den sammanlagda sannolikheten för 0 blir 0.9.

De två valen kan i så fall beskrivas på följande sätt när vi beaktar att det finns tre situationer:

52

Val 1

| $p_i$    | 0.01 | 0.1 | 0.89 |
|----------|------|-----|------|
| $Q^0$    | 0.5  | 0.5 | 0.5  |
| $Q^1$    | 0.0  | 2.5 | 0.5  |
| $\Delta$ | 0.5  | -2  | 0    |

eller

val 2

| $p_i$    | 0.01 | 0.1 | 0.89 |
|----------|------|-----|------|
| $Q^2$    | 0.5  | 0.5 | 0.0  |
| $Q^3$    | 0.0  | 2.5 | 0.0  |
| $\Delta$ | 0.5  | -2  | 0    |

53.

Valen är således i övrigt identiska, men när det gäller val 1 så ger båda handlingarna 0.5 i situation 3, och när det gäller val 2 så ger båda handlingarna 0.

Existensen av situation 3 borde således vara irrelevant för valet mellan handlingarna. Vi borde inte välja annorlunda för att vi i det ena fallet får 0.5 med sannolikheten 0.89 och i det andra fallet ingenting.

Men teorin om förväntad nytta kan också tolkas normativt: vad har vi att lära den som vill fatta rationella beslut?

54.

Man har också försökt vidareutveckla resonemanget.

Enligt *ångerteorin* (regret theory) ligger det nära till hands att välja  $Q^0$  framom  $Q^1$  därför att  $Q^1$  innebär en risk för att man får ångra sitt val: man blir utan den halva miljon som  $Q^0$  skulle ha garanterat.

Valet mellan  $Q^2$  och  $Q^3$  innebär inte samma risk för ånger för det mest troliga är att man i alla händelser blir utan.

Vi kommer att tillämpa teorin om förväntad nytta vid ett antal tillfällen inom ramen för Mikroekonomi II, men det är viktigt att vara medveten om dess begränsningar.