
7. NÅGRA SPECIELLA DISKRETA SANNOLIKHETSFÖRDELNINGAR

Några sannolikhetsfördelningar förekommer ofta i tillämpade problem. Eftersom de förekommer ofta har de fått speciella namn. I detta kapitel skall vi studera några vanliga diskreta fördelningar.

7.1 Binomialfördelningen

En diskret sannolikhetsfördelning som förekommer ofta i tillämpningar är binomialfördelningen. Den beskriver antal gånger en viss händelse inträffar då ett slumpmässigt experiment upprepas. För att definiera binomialfördelningen kan vi först tänka på ett slumpmässigt försök som har två möjliga utfall. Det kan t ex vara en kund i en butik som antingen köper en utbjuden vara eller inte. Två andra exempel på försök med två möjliga utfall är en student som klarat en tentamen eller inte och en tillverkad produkt som fungerar enligt specifikationerna eller inte. Ett sådant försök brukar kallas *Bernoulliförsök* och allmänt brukar utfallen kallas "lyckad" respektive "inte lyckad". Här använder vi också beteckningarna A respektive $\bar{A}$ för de två utfallen.

Exempel 7.1

Antag att vi vet att 20 % av alla kunder som får ett visst rabatterbjudande i en affär utnyttjar erbjudandet. Att se om en slumpmässigt vald kund utnyttjar rabatterbjudandet eller inte är alltså ett Bernoulliförsök. Om A får beteckna händelsen att kunden utnyttjar rabatterbjudandet är alltså $P(A) = 0,20$ och följaktligen $P(\bar{A}) = 0,80$, där $\bar{A}$ betecknar händelsen att kunden inte utnyttjar rabatterbjudandet. ■

Antag nu att vi har ett Bernoulliförsök med $P(A) = p$, där p är något givet tal. Antag vidare att vi upprepar Bernoulliförsöket ett antal gånger, säg n gånger, och att upprepningarna är oberoende av varandra. Antal gånger

som händelsen A inträffar är då en stokastisk variabel. Låt oss beteckna den stokastiska variabeln med X . De värden som X kan anta är tydligen $0, 1, 2, \dots, n$ och sannolikhetsfördelningen för X kallas binomialfördelningen med parametrarna n och p . Vi betecknar detta med $X \sim \text{bin}(n, p)$.

Exempel 7.1 (fortsättning)

Låt oss igen betrakta exemplet med rabatterbudandet. I varje försök har vi sannolikheten $0,2$ för att händelsen "kunden utnyttjar erbjudandet" skall inträffa. Om vi har två kunder som har fått rabatterbudandet kan vi se det som två upprepningar av Bernoulliförsöket ($n = 2$) och rabatterbudandet kan tydligen utnyttjas av $0, 1$ eller 2 kunder.

Låt A beteckna händelsen att en kund utnyttjar rabatterbudandet i ett försök och definiera den stokastiska variabeln X som antalet kunder som utnyttjar rabatterbudandet. Låter vi $(\overline{A}, \overline{A})$ beteckna händelsen "första kunden utnyttjar inte rabatterbudandet och andra kunden utnyttjar inte rabatterbudandet" får vi

$$P(\text{ingen utnyttjar rabatterbudandet}) = f(0) = P(\overline{A}, \overline{A})$$

Eftersom de två försöken är oberoende är

$$P(\overline{A}, \overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64.$$

Vidare får vi på motsvarande sätt

$$\begin{aligned} P(\text{en utnyttjar rabatterbudandet}) &= f(1) = P((A, \overline{A}) \cup (\overline{A}, A)) \\ &= P(A, \overline{A}) + P(\overline{A}, A) \\ &= 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,32. \end{aligned}$$

Vi kan skriva på detta sätt och använda additionssatsen, ty $(A, \overline{A})$ och $(\overline{A}, A)$ kan inte inträffa samtidigt eftersom den första kunden kan inte både utnyttja erbjudandet och inte utnyttja erbjudandet. Slutligen får vi

$$\begin{aligned} P(\text{båda utnyttjar rabatterbudandet}) &= f(2) = P(A, A) = P(A) \cdot P(A) \\ &= 0,2 \cdot 0,2 = 0,04. \end{aligned}$$

Vi sammanfattar i följande tabell

Händelse	x	$f(x)$	$x \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$
$\overline{A}, \overline{A}$	0	0,64	0	0
$A, \overline{A}$	1	0,32	0,32	0,32
$\overline{A}, A$	1			
A, A	2	0,04	0,08	0,16
Summa		1,00	0,40	0,48

Tabell 7.1 Frekvensfunktionen $f(x)$ för en binomialfördeladstokastisk variabel med $n = 2$ och $p = 0,2$.

De tre möjliga utfallen hos den stokastiska variabeln, 0, 1 och 2 kunder, representerar tillsammans en säker händelse som inträffar med sannolikheten 1,

$$f(0) + f(1) + f(2) = 0,64 + 0,32 + 0,04 = 1.$$

Ur tabellen framgår också att

$$E(X) = 0,40$$

och

$$V(X) = 0,48 - (0,40)^2 = 0,32. \blacksquare$$

Låt nu allmänt X vara antal gånger en händelse A inträffar. Med beteckningarna $P(A) = p$ och $P(\overline{A}) = q (= 1 - p)$ får vi med två oberoende upprepningar av försöket

$$f(0) = q \cdot q = q^2$$

$$f(1) = pq + qp = 2pq$$

$$f(2) = p \cdot p = p^2$$

Om vi gör tre oberoende upprepningar av försöket kan A inträffa 0, 1, 2 eller 3 gånger och utfallsrummet för X blir därför $\Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Om A inträffar 0 gånger måste vi få sekvensen $\overline{A}, \overline{A}, \overline{A}$ av Bernoulliförsök, så att

$$f(0) = q \cdot q \cdot q = q^3$$

Att A inträffar 1 gång kan ske på tre olika sätt, nämligen antingen får vi sekvensen $A, \overline{A}, \overline{A}$, eller $\overline{A}, A, \overline{A}$ eller $\overline{A}, \overline{A}, A$, vilket ger sannolikheten

$$f(1) = pq\overline{q} + \overline{p}q\overline{q} + \overline{p}\overline{q}q = 3pq^2$$

På motsvarande sätt finns det tre olika sekvenser av Bernoulliförsök som gör att A inträffar 2 gånger, nämligen $A, A, \overline{A}$, $A, \overline{A}, A$ och $\overline{A}, A, A$, vilket ger

$$f(2) = pp\overline{q} + p\overline{p}q + \overline{p}pq = 3p^2q$$

Slutligen kan A inträffa 3 gånger på bara ett sätt, A, A, A , så att

$$f(3) = p \cdot p \cdot p = p^3.$$

Dessa termer kan vi helt allmänt få genom formeln

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

Med hjälp av kombinatorik kan man visa att antal sätt som x lyckade kan förekomma bland n försök är

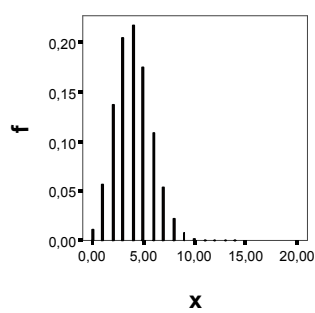
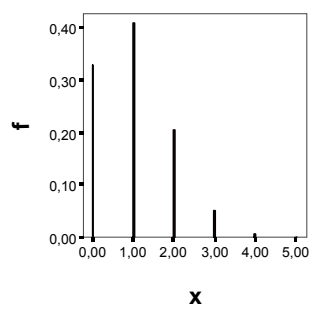
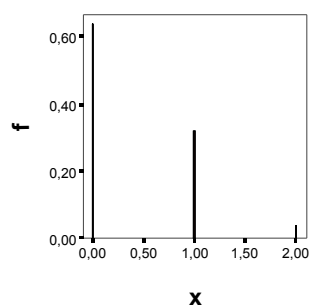
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

där

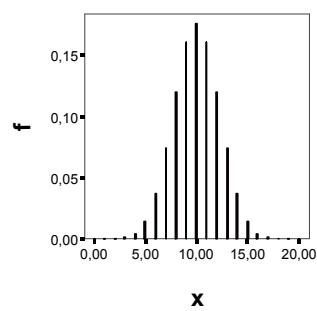
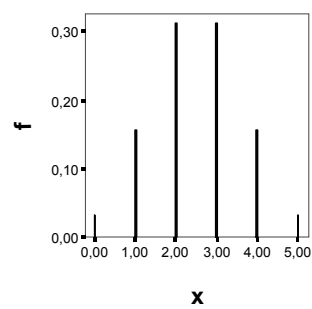
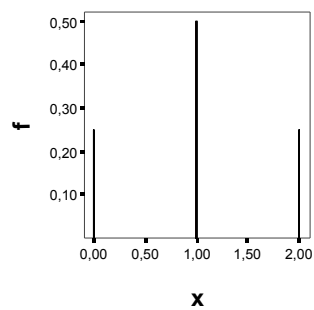
$$\begin{aligned} x! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x \\ n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

Lite enklare skriver vi därför frekvensfunktionen för en binomialfördelad stokastisk variabel som

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}.$$



Figur 7.1 Frekvensfunktionen för binomialfördelningen med $p = 0,2$ och $n = 2, 5$ respektive 20.



Figur 7.2 Frekvensfunktionen för binomialfördelningen med $p = 0,5$ och $n = 2, 5$ respektive 20 .

För att förenkla beräkningar med binomialfördelade stokastiska variabler har man konstruerat tabeller med sannolikheter. I tabellbilagan finns en tabell över fördelningsfunktionen för binomialfördelningen för några värden på n och p . Om $X \sim \text{bin}(n = 3, p = 0,2)$ kan vi med hjälp av tabellen beräkna t ex

$$f(1) = P(X = 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,8960 - 0,512 = 0,3840.$$

Tabellen ger bara sannolikheter för $p \leq 0,50$. Vill vi beräkna sannolikheter för fördelningar med $p > 0,50$ kan vi i stället definiera variabeln som räknar antal gånger som komplementhändelsen inträffar. Vi betecknar den variabeln med Y . Om t ex $X \sim \text{bin}(n = 3, p = 0,8)$ och vi vill beräkna $P(X = 1)$ vet vi att om A inträffar en gång måste $\bar{A}$ inträffa två gånger, dvs om $x = 1$ så är $y = 2$. Vidare vet vi att $\bar{A}$ inträffar med sannolikheten 0,2, dvs $Y \sim \text{bin}(n = 3, p = 0,2)$, så att

$$P(X = 1) = P(Y = 2) = P(Y \leq 2) - P(Y \leq 1) = 0,9920 - 0,8960 = 0,0960.$$

Allmänt gäller det att

$$P(X \leq x) = P(Y \geq n - x)$$

där $Y \sim \text{bin}(n, q)$.

Den binomiala fördelningen illustreras i figurerna 7.1 och 7.2. I figur 7.1 visas vårt exempel med rabatterbjudanden med $p = 0,2$ och för $n = 2, 5$ respektive 20 kunder. I figur 7.2 visas ett exempel med $p = 0,5$. Det sista exemplet kan förslagsvis hänföra sig till n stycken kast med ett symmetriskt mynt med registrering av antalet "klave". Som framgår av figurerna är fördelningen symmetrisk för alla värden på n då $p = 0,5$. När $p = 0,2$ är fördelningen däremot sned. Snedheten blir dock mindre markant då n ökar. Allmänt gäller att fördelningen är snedare ju mer p avviker från 0,5 och mer symmetrisk ju större n är.

I definitionen av en binomialfördelad stokastisk variabel tänker vi oss att vi gör oberoende upprepningar av ett Bernoulliförsök. Men vad menar vi då med att försöken är oberoende? Vi kan anknyta till de tidigare exemplen på beroende och oberoende samt uttrycka saken så att vilket par av försök vi

än tar ut, säg det i -te och det j -te försöket, så skall sannolikheten för att händelsen A inträffar i det i -te försöket vara oberoende av om den inträffar i det j -te försöket. Antag att händelsen inträffar i det i -te försöket betecknas med A_i , och i det j -te med A_j . Uttryckt i formler har vi oberoende om det gäller att

$$P(A_i | A_j) = P(A_i).$$

Att sannolikheten är konstant över upprepningar innebär att

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n).$$

Huruvida oberoende och konstant sannolikhet föreligger kan vi inte - inte ens teoretiskt - verkställa en fullständig prövning av.

Om vi kastar ett mynt upprepade gånger så skall utfallet i säg det 17-e kastet vara oberoende av utfallen i vart och ett av de föregående kasten. Vi får t ex inte göra det 17-e kastet så att vi bara lyfter upp myntet efter det 16-e kastet och inte singlar iväg det utan bara kastar det platt på golvet ungefär som man kastar varpa. Då är sannolikheten att få samma resultat som i 16-e kastet tydligen större än 0,5. Varje kast måste vara helt oberoende, dvs vi måste singla ordentligt.

Man kan visa att om X är en binomialfördelad stokastisk variabel med parametrarna n och p , dvs $X \sim \text{bin}(n, p)$, så kan väntevärdet och variansen för X enkelt beräknas genom formlerna

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ V(X) &= npq. \end{aligned}$$

Vi bryr oss här inte om att bevisa dessa formler.

Exempel 7.1 (fortsättning)

Betrakta exemplet med rabatterbjudanden igen. Parametrarna är $n = 2$ och $p = 0,2$ och enligt ovanstående formler får vi

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \\ V(X) &= n \cdot p \cdot q = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,32 \end{aligned}$$

vilket överensstämmer med de väntevärdes- och variansberäkningar som redovisas i tabell 7.1. ■

Övning 7.1

Låt X vara en binomialfördelad stokastisk variabel. Använd en tabell för att finna värdet på sannolikheten $P(X = x)$ för

- a) $x = 2, n = 5, p = 0.2$
- b) $x = 3, n = 5, p = 0.8$
- c) $x = 7, n = 10, p = 0.6$
- d) $x = 13, n = 20, p = 0.5$

Övning 7.2

Sannolikheten att en viss typ av glödlampor skall lysa mer än 1000 timmar är 0.9. Tre sådana lampor kopplas in i ett belysningsnät. Händelserna att de olika lamporna slocknar antas vara oberoende. Beräkna sannolikheten att efter 1000 timmar

- a) ingen lampa lyser
- b) exakt en lampa lyser
- c) minst två lampor lyser

Övning 7.3

I en grupp på tio personer får var och en i uppdrag att på måfå skriva ner någon av siffrorna 0, 1, 2, ..., 9. Försöksledaren tror att personer gärna väljer siffrorna 3 eller 7. Om siffrorna verkligen valdes på måfå (med lika sannolikhet för alla siffror), hur stor är då sannolikheten att fyra personer eller fler skulle välja någon av siffrorna 3 eller 7?

Övning 7.4

En tillverkare av rengöringsmedel för golv har utvecklat två nya produkter, A och B. Produkterna utprovas bl a genom att 15 hushåll använder dem under

en tidsperiod och sedan anger vilken produkt de tyckte bäst om. Antag att det inte är någon skillnad mellan de två produkterna.

- a) Vad är sannolikheten att produkt A föredras av minst 10 av hushållen?
- b) Vad är sannolikheten att en av produkterna, A eller B, föredras av minst 10 av hushållen?

Övning 7.5

Antag att man vet att 75 % av alla familjer med en inkomst mindre än 15.000 per månad har (minst) en TV apparat. Om 12 familjer slumpmässigt väljs ut för en sociologisk undersökning, vad är sannolikheten att exakt tio familjer har TV? (Antag att totala antalet familjer med inkomst under 15.000 kr per månad är så stort att förutsättningarna för binomialmodellen är approximativt uppfyllda.)

Övning 7.6

I en tillverkningsprocess är det känt att 40 % av alla felaktiga enheter kan repareras. Vid ett tillfälle levereras sex felaktiga enheter till reparationsavdelningen. Vad är sannolikheten att minst tre av dessa kan repareras?

Övning 7.7

Ett företag har följande beslutsregel vid kvalitetskontroll av inköpta partier råmaterial: "Tag ett slumpmässigt urval om 100 enheter. Om urvalet innehåller högst två felaktiga enheter accepteras partiet. Om fler än två felaktiga enheter påträffas återsänds partiet till leverantören."

Beräkna sannolikheten att ett parti accepteras om det innehåller

- a) 2 % felaktiga enheter
- b) 5 % felaktiga enheter
- c) 10 % felaktiga enheter.

7.2 Multinomialfördelningen

I många tillämpningar kan man identifiera oberoende upprepningar av Bernoulliförsök, dvs slumpmässiga försök med två möjliga utfall. Antal gånger som ett av de två möjliga försöken inträffar kan då modelleras med binomialfördelningen på det sätt vi diskuterade i föregående vsnitt. En generalisering av denna situation är när man har oberoende upprepningar av ett slumpmässigt försök med fler än två möjliga utfall. Ett exempel på en sådan situation är när en person slumpmässigt väljs och man undersöker vilket politiskt parti personen skulle rösta på om det var val. Ett annat exempel är blodgruppen hos en slumpmässigt vald individ. Enligt AB0-systemet finns det då fyra möjliga blodgrupper. Vid kvalitetskontroll kan man ibland ha glädje av att klassificera defekta enheter i olika grupper beroende på vilket fel de har. Antal gånger som flera möjliga utfall inträffar modelleras med den så kallade *multinomialfördelningen*. Den fördelningen definieras genom:

1. Ett slumpmässigt försök har k olika utfall. Sannolikheten att ett visst utfall inträffar, säg utfall nr i , är p_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Observera att $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$
2. n stycken identiska och stostatiskt oberoende upprepningar av det slumpmässiga experiment genomförs. Vi definierar en stostatisk variabel, Y_1 , som antal gånger utfall nr 1 inträffar, en annan stokatisk variabel, Y_2 , som antal gånger utfall nr 2 inträffar, osv. så att den stokatiska variabeln Y_k är antal gånger utfall nr k inträffar. Observera att $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k = n$.

Sannolikhetsfördelningen för $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ kallas multinomialfördelningen och har den simultana frekvensfunktionen

$$f(y_1, y_2, \dots, y_k) = \frac{n!}{y_1! y_2! \dots y_k!} p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}$$

där

$$y_1 + y_2 + \dots + y_k = n.$$

Många tillämpningar innehåller någon form av klassificering och ger därmed upphov till multinomialt fördelade stokatiska variabler. Till exempel resulterar en klassificering av hushållens inkomster i klasserna ”låg-”, ”mellan-” och ”hög inkomst” i en multinomial sannolikhetsfördelning om vi räknar antal hushåll i varje klass. Ett annat exempel är vilket färdssätt man använder

för resor till arbetet. Färdsätten skulle kunna klassificeras i de fem kategorierna egen bil, kollektivtrafik, cykel, privat samåkning eller annat färdssätt.

Observera att binomialfördelningen är specialfallet av den multinomiala fördelningen med $k = 2$.

Exempel 7.2

En brandkår har noterat att 64 % av alla bränder sker i villor, 22 % i lägenheter och 14 % i andra utrymmen. Under ett dygn får man tre uttryckningar. Vi vill beräkna sannolikheten att två av uttryckningarna gäller bränder i villor, en gäller lägenheter och ingen gäller andra utrymmen.

Vi låter Y_1 vara antal bränder i villor, Y_2 antal bränder i lägenheter och Y_3 antal bränder i övriga utrymmen. I detta exempel har vi att $n = 3$, $p_1 = 0,64$, $p_2 = 0,22$ och $p_3 = 0,14$. Vi söker sannolikheten då $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$. Enligt formeln för multinomiala sannolikhetsfördelningens frekvensfunktion får vi

$$\begin{aligned} f(2, 1, 0) &= \frac{3!}{2!1!0!} 0,64^2 \cdot 0,22^1 \cdot 0,14^0 \\ &= 3 \cdot 0,4096 \cdot 0,22 \cdot 1 = 0,270336 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Man kan visa att väntevärde, varians för en multinomialfördelad stokastisk variabel, Y_i , och kovarians för två multinomialfördelade stokastiska variabler, Y_i och Y_j , $i \neq j$, är

$$E(Y_i) = np_i$$

$$V(Y_i) = np_i q_i$$

$$Kov(Y_i, Y_j) = -np_i p_j$$

där $q_i = 1 - p_i$.

Exempel 7.2 (fortsättning)

Antag att en brand i en villa i medeltal orsakar skador för 300.000 kr, brand i en lägenhet orsakar skador för 150.000 kr i medeltal och i övriga utrymmen

30.000 kr i medeltal. Vi söker nu förväntad kostnad som orsakas av tre bränder. Det gäller tydligen att förväntat antal bränder i villor är

$$E(Y_1) = 3 \cdot 0,64 = 1,92.$$

Eftersom kostnaden i medeltal är 300.000 kr blir förväntad kostnad för bränder i villor $300.000 \cdot 1,92 = 576.000$ kr. På motsvarande sätt blir förväntat antal bränder i lägenheter

$$E(Y_2) = 3 \cdot 0,22 = 0,66$$

så att förväntad kostnad för bränder i lägenheter blir $150.000 \cdot 0,66 = 99.000$ kr. För bränder i övriga utrymmen får vi förväntat antal

$$E(Y_3) = 3 \cdot 0,14 = 0,42$$

och förväntade kostnaden blir $30.000 \cdot 0,42 = 12.600$ kr. Totalt blir den förväntade kostnaden för tre bränder följaktligen $576.000 + 99.000 + 12.600 = 687.600$ kr. ■

Övning 7.8

Tabellen nedan visar åldersfördelningen i en population. Antag att ett slumpmässigt urval om fem personer dras ur populationen. Bestäm sannolikheten att urvalet kommer att innehålla exakt två personer i åldern 25-34 år, två i åldern 45-64 och en person över 64 år.

Ålder	Proportion
18 - 24	0,21
25 - 34	0,24
35 - 44	0,14
45 - 64	0,26
65 -	0,15

Övning 7.9

I ett stort parti med tillverkade enheter har 10 % av enheterna exakt ett fel och 5 % har mer än ett fel. Övriga enheter är felfria. Tio enheter väljs slumpmässigt från partiet. Låt X_1 beteckna antal enheter i urvalet med ett fel och X_2 antalet enheter med mer än ett fel.

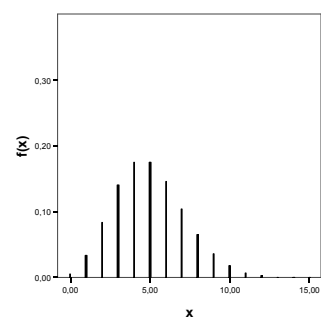
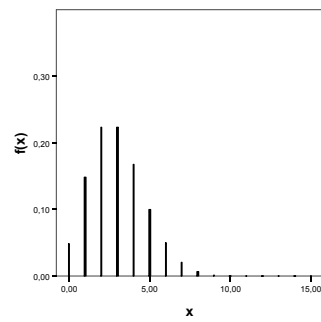
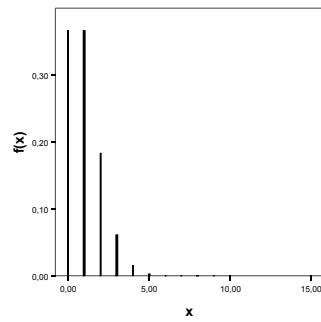
- a) Bestäm sannolikheten att det är minst en enhet med mer än ett fel i urvalet.
- b) Bestäm sannolikheten att det är en enhet med ett fel och en enhet med mer än ett fel i urvalet.
- c) Reparationskostnaderna är $2X_1 + 5X_2$. Bestäm väntevärde och varians för reparationskostnaden.

7.3 Poissonfördelningen

En viktig typ av problem handlar om att räkna antal händelser som inträffar under en viss tid. Det kan till exempel vara antal kunder som kommer till ett betjäningställe under en timme, antal tillfällen ett företag ger information om sina planer under ett kvartal och antal olyckor av en viss sort under en vecka. Antal händelser som inträffar under en viss tidsperiod kan ibland modelleras med Poissonfördelningen. Ett sätt att tänka på problem av detta slag är att dela in den tidsperiod man studerar i n stycken delintervall, där varje delintervall är så kort att högst en händelse kan inträffa i delintervallet. Att se om en händelse inträffar eller inte i ett delintervall blir därför ett Bernoulliförsök. Om händelser i olika delintervall är stokastiskt oberoende av varandra och sannolikheten att en händelse inträffar i ett visst delintervall är p blir därför antal händelser under hela tidsperioden binomialfördelad med parametrarna n och p . Betecknar vi antalet händelser under tidsperioden med X , får vi alltså $X \sim \text{bin}(n, p)$. Vi tänker oss nu att vi gör indelningen i delintervall finare och finare så att antalet delintervall n ökar. Det är då rimligt att tänka sig att sannolikheten p att en händelse inträffar minskar. Vi låter n öka och p minska på ett sådant sätt att produkten $\lambda = np$ är konstant. Man kan då visa att då antalet delintervall går mot oändligheten, $n \rightarrow \infty$, så går frekvensfunktionen för antal händelser under tidsperioden mot

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

En stokastisk variabel med denna frekvensfunktion säges vara Poissonfördelad med parametern λ och vi betecknar det med $X \sim \text{Po}(\lambda)$. Figur 7.3 visar frekvensfunktionen för Poissonfördelningen då $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ respektive $\lambda = 5$. Figuren indikerar att Poissonfördelningen är positivt sned men blir mer och



Figur 7.3 Frekvensfunktionen för Poissonfördelningen då $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ respektive $\lambda = 5$.

mer symmetrisk då λ blir större. Man kan visa att för en Poissonfördelad stokastisk variabel X är väntevärde och varians lika med

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Sannolikheter för Poissonfördelade stokastiska variabler kan givetvis beräknas med hjälp av frekvensfunktionen. Ofta har man stor hjälp av tabeller över fördelningsfunktionen för Poissonfördelningen med ett antal olika värden på parametern λ . En sådan tabell finns i tabellbilagan.

Exempel 7.3

Antal bilar, X , som kommer till en tunnel under en tvåminutersperiod är Poissonfördelad med parametern $\lambda = 1$, dvs $X \sim Po(\lambda = 1)$. Om många bilar kommer till tunneln under en kort tidsperiod kan det uppstå problem med trafiken genom tunneln. Vi söker därför sannolikheten att tre eller fler bilar kommer till tunneln under en tvåminutersperiod.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,981 = 0,019$$

där sannolikheten $P(X \leq 3)$ fås ur tabellen över Poissonfördelningens fördelningsfunktion. ■

Vi introducerade Poissonfördelningen som ett resultat av en följd av binomialfördelningar då n växer mot oändligheten och $np = \lambda$. Därav följer också att Poissonfördelningen kan fungera som en approximation av binomialfördelningen då n är stort och p är litet. En tumregel för att approximationen skall anses vara tillräckligt bra är att $np < 7$.

Exempel 7.4

Antag att $X \sim bin(n = 20, p = 0,1)$. Då är enligt tabellen över binomialfördelningen

$$P(X \leq 3) = 0,867.$$

Eftersom $np = 20 \cdot 0,1 = 2 < 7$, n är förhållandevis stort och p förhållandevis litet, kan vi förvänta oss att sannolikheten $P(X \leq 3)$ kan approximeras relativt bra med en sannolikhet ur Poissonfördelningen. För en stokastisk variabel $Y \sim Po(2)$ får vi ur tabellen över Poissonfördelningen att

$$P(Y \leq 3) = 0,857,$$

dvs approximationsfelet är endast 0,01. ■

Övning 7.10

Antal besök mellan klockan 12.00 och 13.00 på en viss hemsida på Internet antas vara Poissonfördelad med parametern $\lambda = 4$. Bestäm sannolikheten att

- a) inga besök görs
- b) mer än tre besök görs

Övning 7.11

Antal gånger en maskin i en tillverkningsindustri går sönder och behöver repareras under en månad antas vara Poissonfördelad med parametern $\lambda = 3$. En månad går maskinen sönder sex gånger. Kan man anse att det är ovanligt många gånger och eventuellt en indikation på att maskinen åldrats och behöver bytas ut?