
5. BERÄKNING AV SANNOLIKHETER

5.1 Additionssatsen

Vi har nu kommit fram till det steg där vi kan börja att räkna praktiskt med sannolikheter. Vi skall utveckla olika regler och begrepp som är nödvändiga för att praktiskt kunna utföra sannolikhetsberäkningar.

Händelser symboliseras ofta med stora bokstäver i början av alfabetet, t ex $A, B, C, \dots$. Sannolikheten för att händelsen A skall inträffa symboliserar vi med $P(A)$. Vi har redan konstaterat att

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

En omöjlig händelse har sannolikheten noll. T ex är sannolikheten att få en "sju" i nästa kast med en vanlig tärning lika med noll. En omöjlig händelse symboliseras ofta med $\emptyset$ så att vi får

$$P(\text{omöjlig händelse}) = P(\emptyset) = 0.$$

En säker händelse, dvs en händelse som alltid inträffar, har sannolikheten ett. T ex sannolikheten att få "krona eller klave" vid kast med ett vanligt mynt är ett. En säker händelse betecknar vi med Ω och vi får att

$$P(\text{säker händelse}) = P(\Omega) = 1.$$

Händelsen att A eller B , eller att både A och B inträffar skriver vi som $A \cup B$ och dess sannolikhet blir med andra ord

$$P(A \text{ och/eller } B \text{ inträffar}) = P(A \cup B).$$

Händelsen att både A och B inträffar symboliserar vi med $A \cap B$ och följaktligen skriver vi sannolikheten för den händelsen som

$$P(A \text{ och } B) = P(A \cap B).$$

Händelsen att A inte inträffar kallas komplementhändelsen till A och betecknas med $\overline{A}$. Därmed skriver vi sannolikheten att A inte inträffar som

$$P(A \text{ inträffar inte}) = P(\overline{A}).$$

När man löser sannolikheteosteoretiska problem med två händelser har man ofta stor hjälp av en så kallad fyrfältstabell. I fyrfältstabellen skriver man upp sannolikheterna för olika händelser och kombinationer av händelser. När fyrfältstabellen är ifylld är det lätt att ”plocka ut” de sannolikheter man behöver för eventuella ytterligare beräkningar. Fyrfältstabellen består av två rader, två kolumner och två marginaler. Uppgifter om händelsen A skrivs in i den första kolumnen och uppgifter om dess komplementhändelse, $\overline{A}$, skrivs in i den andra kolumnen. På motsvarande sätt skrivs uppgifter om händelserna B och $\overline{B}$ in på de två raderna. I marginalerna skriver vi sannolikheterna för den händelse som står på motsvarande rad respektive kolumn.

I de fyra fälten i mitten av fyrfältstabellen skrivs sannolikheterna för händelserna $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ och $\overline{A} \cap \overline{B}$ in, se tabell 5.1.

Händelse	A	$\overline{A}$	Marginal
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Marginal	$P(A)$	$P(\overline{A})$	$P(A) + P(\overline{A}) = P(B) + P(\overline{B}) = 1$

Tabell 5.1 Principen för en fyrfältstabell

Om $A \cap B$ eller $A \cap \overline{B}$ inträffar, så måste händelsen A inträffa. Eftersom händelserna $A \cap B$ och $A \cap \overline{B}$ är ömsesidigt uteslutande får vi enligt Kolmogorovs axiom att

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

dvs sannolikheten i A 's marginal fås genom att summera sannolikheterna i A 's kolumn. På motsvarande sätt visar man att varje kolumn respektive rad summerar till sannolikheterna i marginalerna.

Med hjälp av fyrfältstabellen skall vi nu utveckla en formel för beräkning av sannolikheten $P(A \cup B)$. Om händelsen $A \cup B$ inträffar så måste också en av händelserna $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ och $\overline{A} \cap B$ inträffa. På grund av att dessa tre händelser är ömsesidigt uteslutande får vi enligt Kolmogorovs axiom att

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B).$$

Genom att lägga till och dra ifrån $P(A \cap B)$ förändras ingenting, dvs

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B).$$

Men, eftersom

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

och

$$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

får vi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Detta är en av de mest grundläggande formlerna i sannolikhetsläran och kallas för *sannolikhetslärans additionssats*. Om A och B är ömsesidigt uteslutande så är $A \cap B$ en omöjlig händelse, $A \cap B = \emptyset$, dvs $P(A \cap B) = 0$. Detta ger oss specialfallet

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ då } A \cap B = \emptyset$$

vilket visar att sannolikhetslärans additionssats inte står i konflikt med Kolmogorovs axiom. (I själva verket är ju satsen härledd från Kolmogorovs axiom.)

Låt nu B vara händelsen $\overline{A}$. Eftersom $A \cap \overline{A} = \emptyset$ får vi enligt Kolmogorovs axiom

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Men det gäller också att $A \cup \overline{A} = \Omega$ och att $P(\Omega) = 1$. Därför har vi att

$$1 = P(A) + P(\overline{A})$$

dvs

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Speciellt innebär detta att fyrfältstabellens marginaler summerar till ett (se tabell 5.1).

Exempel 5.1

Vi ska nu utnyttja additionssatsen för att beräkna sannolikheten att få minst en sexa vid kast med två tärningar. Låt A vara händelsen att vi får en sexa på den ena tärningen och B vara händelsen att vi får sexa på den andra. Eftersom sannolikheten att få sexa på en tärning är $1/6$ (klassiska sannolikhetsdefinitionen) och sexa på båda tärningarna är $1/36$ vet vi att

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Alltså är sannolikheten att vi får en sexa på minst en av tärningarna

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Övning 5.1

Vad är sannolikheten att få en femma eller en sexa på någon av tärningarna när man kastar två tärningar?

Övning 5.2

Enligt en föräldraförening förekommer för mycket våld och dåligt språk i TV-program från en viss kanal. En undersökning som föreningen gjorde visade att det förekom dåligt språk i 42 % av programmen, 27 % av programmen innehöll för mycket våld och 10 % av programmen hade både dåligt språk och för mycket våld. Hur stor andel av programmen var fri från både dåligt språk och för mycket våld, enligt föreningens bedömning?

Övning 5.3

Enligt expertbedömningar är sannolikheten att ett visst fotbollslag vinner nästa match 10 %. Sannolikheten att laget vinner även nästa match bedöms vara 30 % och sannolikheten att laget förlorar båda matcherna är 65 %. Vad är sannolikheten att laget vinner exakt en av matcherna?

5.2 Betingad sannolikhet - Multiplikationssatsen

Betingad sannolikhet är ett viktigt begrepp inom sannolikhetsteorin. Sannolikheten för en händelse A , betingad på eller givet en händelse B , är det samma som sannolikheten att A inträffar under förutsättning att B inträffar. Den betingade händelsen ” A givet B ” skrivs $A | B$. Vi skall nu bestämma sannolikheten $P(A | B)$.

Vi skall betrakta betingade händelser som resultat av ett betingat försök. Med ett betingat försök givet händelsen B menar vi ett slumpmässigt försök som utförs under den specifika betingelsen att händelsen B har inträffat. Låt utfallsrummet till det betingade försöket betecknas med Ω_B . Om vi vet att händelsen B har inträffat, så är de möjliga utfallen precis de utfall som bildar B , dvs $\Omega_B = B$. Därmed är utfallsrummet för det betingade försöket klart. För att bestämma sannolikheterna i det betingade försöket betraktar vi fyrfältstabellen igen, se tabell 5.1. Om händelsen B skall vara utfallsrum i det betingade försöket måste $P(B | B) = P(\Omega_B) = 1$. Men sannolikheterna i B-raden i fyrfältstabellen summerar ju endast till $P(B)$. Om vi därför normerar sannolikheterna i B-raden så att de summerar till ett, får vi de sökta betingade sannolikheterna, se tabell 5.2. Vi måste här förutsätta att $P(B) \neq 0$.

Händelse	A	B	Marginal
B	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	$P(\bar{A} B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$	$P(B B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Tabell 5.2 Betingade sannolikheter för händelsen A givet händelsen B

Den betingade sannolikheten för $A | B$ är således

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

förutsatt att $P(B) \neq 0$. Multiplicerar vi både vänster och höger led i denna formel får vi *sannolikhetslärans multiplikationssats*:

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B)$$

Eftersom benämningarna A och B är godtyckliga inses lätt att det även följer att

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B) = P(B | A) P(A).$$

Exempel 5.2

Antag att sannolikheten för att ett visst antal olyckor i en fabrik skall inträffa är enligt nedanstående tabell

Antal olyckor	0	1	2	3	Fler än 3
Sannolikhet	0.80	0.10	0.05	0.03	0.02

Vi vill beräkna sannolikheten att fler än två olyckor inträffar givet att minst en olycka inträffar.

$$\begin{aligned}
 & P(\text{Fler än två} \mid \text{minst en}) \\
 = & \frac{P(\text{Fler än två och minst en})}{P(\text{minst en})} \\
 = & \frac{P(\{3, 4, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, \dots\})}{1 - P(0)} \\
 = & \frac{P(\{3, 4, \dots\})}{1 - P(0)} = \frac{P(3) + P(\text{Fler än 3})}{1 - P(0)} \\
 = & \frac{0.03 + 0.02}{1 - 0.80} = 0.25
 \end{aligned}$$

Om inga olycksförebyggande åtgärder vidtas vid fabriken kommer alltså i det långa loppet 25 % av olycksdagarna att ha tre eller fler olyckor. ■

Exempel 5.3

Vi skall nu studera expertbedömningarna om fotbollslaget i övning 5.3 något mer. Låt därför A vara händelsen "laget vinner nästa match" och B händelsen

”laget vinner ännu nästa match” så att

$$P(A) = 0.10$$

$$P(B) = 0.30$$

De resterande sannolikheterna i marginalerna i fyrfältstabellen är därför

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.10 = 0.90$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.30 = 0.70.$$

Låt oss genast skriva in detta i en fyrfältstabelle:

Händelse	A	$\overline{A}$	marginal
B			0,30
$\overline{B}$			0,70
marginal	0,10	0,90	1,00

Vi vet dessutom att sannolikheten att laget förlorar båda matcherna är 0,65, dvs

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.65$$

så att den kompletta fyrfältstabellen är

Händelse	A	$\overline{A}$	marginal
B	0,05	0,25	0,30
$\overline{B}$	0,05	0,65	0,70
marginal	0,10	0,90	1,00

Sannolikheten att laget vinner ännu nästa match givet att laget vinner nästa match är därför

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,10} = 0,50$$

medan sannolikheten att laget vinner ännu nästa match givet att laget förlorar nästa match är

$$P(B | \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,25}{0,90} \approx 0,28.$$

Tydligt är sannolikheten för händelsen B i detta exempel olika om händelsen A inträffar eller om händelsen A inte inträffar. Vi säger då att händelsen B är beroende av händelsen A , betingelsen A spelar roll för hur stor sannolikheten att händelsen B inträffar. Om, å andra sidan, det är lika stor sannolikhet att händelsen B inträffar oavsett om A inträffar eller inte, säger vi att händelsen B är stokastiskt oberoende av händelsen A . Oberoende händelser är ett mycket viktigt begrepp inom sannolikhetsläran. I nästa avsnitt kommer vi att mer ingående diskutera oberoendebegreppet. ■

Övning 5.4

I anslutning till fyrfältstabellen nedan är givet $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ och $P(A \mid B) = 0.5$. Komplettera tabellen.

Händelse	A	$\bar{A}$	marginal
B			0.2
$\bar{B}$			
marginal	0.3		

Övning 5.5

Antag att talen i nedanstående fyrfältstabell ger sannolikheterna för motsvarande händelser i det slumpmässiga försöket "en person väljs slumpmässigt ut och vi noterar om personen får cancer eller ej respektive röker eller ej".

Händelse	Får cancer	Får ej cancer	marginal
Rökare	0.0054	0.1546	
Ej rökare	0.0006	0.8394	
marginal			

Beräkna sannolikheten att en rökare får lungcancer och att en icke-rökare får lungcancer. Hur många gånger större sannolikhet löper rökaren att drabbas av lungcancer än icke-rökaren?

Övning 5.6

För att studera alkoholens konsekvenser vid bilkörning studerades ett stort antal trafikolyckor. Studien visade att 20 % av alla olyckor var svåra och

hälften av alla svåra olyckor orsakades av onyktra bilförare. Av samtliga olyckor hade 12 % orsakats av onyktra bilförare. Beräkna sannolikheten att en olycka är svår, givet att den orsakas av en onykter förare.

Övning 5.7

- a) I en trebarnsfamilj är alla barnen flickor. Vad är sannolikheten att det fjärde barnet också blir en flicka?
- b) Vad är sannolikheten att alla barnen i en fyrbarnsfamilj är flickor?
- c) Varför är sannolikheterna i a) och b) olika?

Övning 5.8

Låt A vara en händelse sådan att $P(A) \neq 0$. Beräkna $P(\bar{A} | A)$.

Övning 5.9

En grönsaksgrossist har utvecklat ett test att kontrollera kvaliteten hos tomater. Efter att ha inspekterat ett urval från ett parti tomater accepteras eller förkastas hela partiet. Det har visat sig att 15 % av alla testade partier har förkastats och 6 % av de accepterade partierna har varit dåliga. Antag att sannolikheten att ett parti är dåligt är 0.1. Sätt upp en fullständig fyrfältstabell och beräkna sannolikheten att ett fullgott parti kommer att accepteras med den använda testmetoden.

Övning 5.10

- a) Antag att en persom har två mynt i sin ficka. Det ena myntet är ett vanligt mynt (med krona på den ena sidan och klave på den andra sidan). Det andra myntet har krona på båda sidorna. Personen väljer slumpmässigt ut ett av mynten och kastar det. Det visar krona. Vad är sannolikheten att myntet är ett vanligt mynt?
- b) Antag att personen kastar myntet en gång till och det visar krona även den andra gången. Vad är sannolikheten att myntet är ett vanligt mynt?

Övning 5.11

Ett stort observationsmaterial skall genomgå en automatisk databearbetning. För att möjliggöra denna måste materialet först kodas och därefter skrivas in på en datafil. Fel i samband med kodning och/eller inskrivning förekommer med frekvensen 5 på 100 poster på filen.

I den maskinella bearbetningen är en automatisk rättningsrutin för att upptäcka fel av ovannämnda typ inbyggd. Sannolikheten för att en felaktig post upptäcks av rättningsrutinen är 0,95. Vidare är sannolikheten att en fel-fri post kommer att tolkas som felaktig av rättningsrutinen lika med 0,001.

- a) Bestäm sannolikheten för att en slumpmässigt vald post ur det bearbetade datamaterialet är felaktig om den vid granskningen noterades som felaktig.
- b) Bestäm sannolikheten att en post är felaktig om den vid granskningen noterades som korrekt.

5.3 Oberoende försök och händelser

I många problemställningar vill man klarlägga om beroende mellan två händelser föreligger eller inte. Exempelvis kan man vara intresserad av att undersöka om och i så fall hur kassationen i en tillverkningsprocess beror av den utbildning man gett de anställda eller hur konsumenternas köpmönster beror av desra inkomstnivå. Vidare förutsätter många statistiska analysmetoder att observationer kan göras oberoende av varandra t ex att ett slumpmässigt mätfel man får vid en viktbestämning är oberoende av det mätfel man kan få i andra viktbestämningar.

Vi har tidigare sett exempel på oberoende händelser. Om man på måfå drar ett kort ur en vanlig kortlek, läser av och lägger tillbaka kortet, blandar leken samt drar ett kort på nytt, så är sannolikheten att få ett rött kort i andra dragningen oberoende av vilket kort man fick i den första dragningen. Vi har samma sannolikhet att få ett rött kort i varje dragning.

Vad detta innebär skulle kunna beskrivas på följande sätt. Låt oss betrakta två försök i vilka händelserna A respektive B kan inträffa - säg att A markerar rött kort i första dragningen och B rött kort i andra dragningen. Rent

definitions­mässigt föreligger *stokastiskt oberoende* om

$$P(B | A) = P(B),$$

dvs sannolikheten att B skall inträffa är densamma vare sig A inträffar (inträffat) eller ej. Följaktligen är

$$P(B | A) = P(B | \overline{A}) = P(B)$$

vid oberoende.

Exempel 5.4

Antag att vi drar ett kort från en vanlig kortlek, observerar vilket kort det blev och sedan, utan att lägga tillbaka kortet, drar ett kort till. Om A betecknar rött kort i första dragningen gäller tydligen

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

eftersom det finns 26 röda kort av totalt 52 kort. Låt nu B beteckna rött kort i andra dragningen. Vid den andra dragningen finns det 51 kort kvar i kortleken. Om A har inträffat är 25 av dessa röda, dvs

$$P(B | A) = \frac{25}{51},$$

medan om $\overline{A}$ har inträffat, dvs det första kortet var svart, är 26 kort röda vid den andra dragningen, dvs

$$P(B | \overline{A}) = \frac{26}{51}.$$

Därmed drar vi slutsatsen att

$$P(B | A) \neq P(B | \overline{A})$$

och det föreligger ett stokastiskt beroende mellan händelserna A och B . Något annat var ju heller inte att vänta, eftersom vi inte kan få det först dragna kortet vid den andra dragningen. ■

Exempel 5.5

I samband med sjötransporter av farligt gods är det viktigt att ha en uppfattning om sannolikheten att en olycka som är miljöförstörande inträffar. Antag att man från studier av sjötrafik bedömer sannolikheten att en olycka inträffar är 0,00016. Bland alla olycka som inträffar bedömer man att 2 olyckor av 10000 skadar naturen. Låter vi A beteckna händelsen att en olycka inträffar och B händelsen att miljön förstörs, har vi alltså att

$$P(A) = 0,00016$$

$$P(B | A) = 0,0002.$$

Vi söker nu sannolikheten att en olycka som förstör miljön inträffar. Vi ser att

$$\begin{aligned} & P(\text{en olycka som förstör miljön inträffar}) \\ = & P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = 0,0002 \cdot 0,00016 = 0,000000032. \blacksquare \end{aligned}$$

Exempel 5.6

Låt oss betrakta det slumpmässiga försöket ”kast med två tärningar” igen. A och B får som vanligt vara händelserna att vi får en sexa på den ena respektive den andra tärningen. Vi beräknar först $P(B | A)$, och får

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

Denna sannolikhet är samma som då vi inte känner resultatet av första kastet. Alltså är $P(B | A) = P(B)$. $\blacksquare$

Om A och B är två stokastiskt oberoende händelser får vi enligt multiplikationssatsen

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A) = P(A) P(B).$$

Omvänt gäller det också att om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ så är händelserna A och B stokastiskt oberoende.

Exempel 5.7

Sannolikheten att en viss basketspelare kastar ett straffkast i korgen är 0.7. Antag att hon får kasta fyra straffkast under en match. Vi vill beräkna sannolikheten att hon kastar alla fyra straffkast i korgen. Vi antar därför att kasten är oberoende av varandra. (Diskutera rimligheten i detta antagande.) Vi får

$$\begin{aligned} & P(\text{alla fyra kasten går i korgen}) \\ &= 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,7^4 \approx 0,2401 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

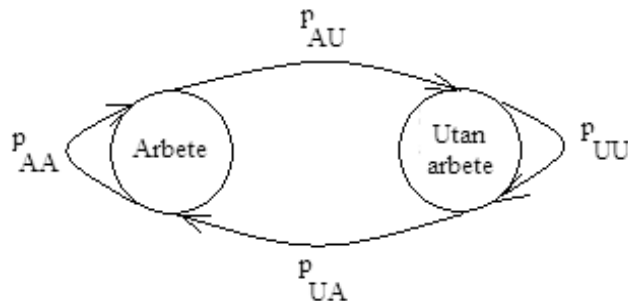
5.4 Tillämpningar

5.4.1 Arbetskraft

I det här avsnittet beskriver vi några enkla modeller för att studera hur personer vid vissa tidpunkter kan ha ett arbete och vid vissa tidpunkter sakna arbete. I den enklaste modellen gör vi förenklingen att en person endast kan befinna sig i ett av de två möjliga tillstånden "Har arbete" respektive "Saknar arbete". Från en tidpunkt till en annan, t.ex. nästa månad eller nästa kvartal eller nästa år, kan personen antingen stanna kvar i det tillstånd hon eller han befann sig i eller byta till det andra tillståndet. Händelserna att stanna kvar i ett tillstånd och att byta till det andra tillståndet antas vara slumpmässiga och ske med vissa sannolikheter, Schematiskt kan modellen representeras som i figur 5.1. Här representeras de två tillstånden som cirklar och de slumpmässiga händelserna, stanna kvar respektive byta tillstånd, som pilar.

De betingade sannolikheterna i figuren definieras som

$$\begin{aligned} p_{AA} &= P(\text{Arbete vid nästa tidpunkt} \mid \text{Arbete vid innevarande tidpunkt}) \\ p_{AU} &= P(\text{Utan arbete vid nästa tidpunkt} \mid \text{Arbete vid innevarande tidpunkt}) \\ p_{UA} &= P(\text{Arbete vid nästa tidpunkt} \mid \text{Utan arbete vid innev. tidpunkt}) \\ p_{UU} &= P(\text{Utan arbete vid nästa tidpunkt} \mid \text{Utan arbete vid innev. tidpunkt}). \end{aligned}$$



Figur 5.1 En enkel modell med två tillstånd

Vi antar nu att alla sannolikheter är konstanta över tiden och att en händelse vid en viss tidpunkt är stokastiskt oberoende av händelser vid andra tidpunkter.

En person som arbetar vid en viss tidpunkt och har ett arbete två tidsenheter senare har antingen stannat kvar i tillståndet "Arbete", vilket inträffar med sannolikheten $p_{AA}p_{AA}$, eller så har personen först bytt till tillståndet "Utan arbete" och sedan bytt tillbaka till tillståndet "Arbete", vilket inträffar med sannolikheten $p_{AU}p_{UA}$. Eftersom dessa två möjligheter är ömsesidigt uteslutande händelser, får vi enligt additionssatsen att sannolikheten att en person som har arbete vid en tidpunkt också har det två tidsperioder senare är

$$p_{AA}^{(2)} = p_{AA}p_{AA} + p_{AU}p_{UA}.$$

Om t.ex. $p_{AA} = 0,95$, $p_{AU} = 0,05$, $p_{UA} = 0,20$ och $p_{UU} = 0,80$ blir

$$p_{AA}^{(2)} = 0,95 \cdot 0,95 + 0,05 \cdot 0,20 = 0,9125.$$

På motsvarande sätt kan vi bestämma sannolikheten att en person utan arbete vid en viss tidpunkt kommer att ha arbete två tidsperioder framåt. Då har personen antingen först fått arbete och sedan stannat kvar i tillståndet "Arbete", vilket inträffar med sannolikheten $p_{UA}p_{AA}$, eller så har personen stannat i tillståndet "Utan arbete" och sedan bytt till "Arbete", vilket

inträffar med sannolikheten $p_{UU}p_{UA}$. Med hjälp av additionssatsen får vi sedan att sannolikheten att en person som är utan arbete vid en viss tidpunkt kommer att ha ett arbete två tidsperioder senare är

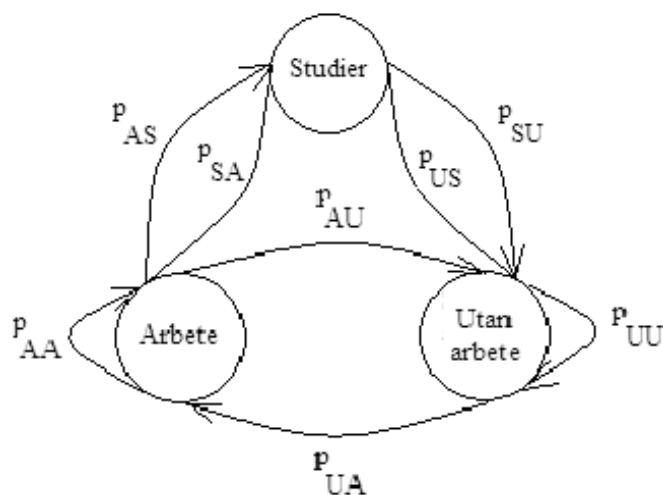
$$p_{UA}^{(2)} = p_{UA}p_{AA} + p_{UU}p_{UA}.$$

Med ovanstående sannolikheter får vi

$$p_{UA}^{(2)} = 0,20 \cdot 0,95 + 0,80 \cdot 0,20 = 0,35.$$

För att studera sannolikheter att ha förflyttat sig mellan olika tillstånd efter tre eller fler tidsperioder får man utreda vilka möjliga vägar det finns mellan tillstånden och beräkna sannolikheterna för var och en av de möjliga vägarna. En god hjälp för att genomföra sådana beräkningar är det som i matematiken kallas matrisalgebra, något som vi inte skall fördjupa oss i här.

Den enkla modellen med endast två tillstånd, "Arbete" och "Utan arbete", kan utvidgas till att innehålla fler tillstånd. T.ex. kan tillståndet "Studerar" läggas till, såsom illustreras i Figur 5.2.



Figur 5.2 Modell med tre tillstånd

Med denna modell ser vi att sannolikheten att en person som befinner sig i tillståndet "Studerar" kommer att finna sig i tillståndet "Arbete" två tidsperioder framåt är

$$p_{SA}^{(2)} = p_{SS}p_{SA} + p_{SA}p_{AA} + p_{SU}p_{UA}$$

Den typ av modeller vi har studerat här, där individer rör sig mellan olika tillstånd, kallas Markovkedjor och är en viktig typ av modeller med många olika tillämpningar.

5.4.2 Tillförlitlighet hos system

Ett kärnkraftverk är ett exempel på en anläggning där hundratals system används för att styra, kontrollera och övervaka anläggningen. För liknande ändamål finns många system i rymdfärjor och flygplan, men även administrativa rutiner kan innehålla system för styrning, kontroll och övervakning. Varje system kan i sin tur bestå av ett stort antal komponenter. Förhoppningsvis fungerar dessa komponenter tillfredsställande så att hela systemet fungerar på avsett sätt. Det kan dock inträffa att en komponent av någon anledning slutar fungera, något som kan orsaka att systemet slutar fungera och som i sin tur orsakar att hela anläggningen inte fungerar på avsett sätt. I det här avsnittet skall vi studera några enkla fall hur sannolikheten att en komponent slutar fungera påverkar sannolikheten att systemet den ingår i slutar fungera.

Vi definierar tillförlitligheten, $R(t)$, hos ett system som sannolikheten att systemet fungerar tillfredsställande minst fram till tidpunkten t ,

$$R(t) = P(\text{systemet fungerar fram till tidpunkten } t),$$

där t är en viss given tidpunkt.

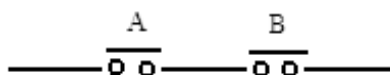
Tillförlitligheten hos systemet beror dels på tillförlitligheten hos systemets komponenter och dels på hur komponenterna är sammankopplade. Speciellt förekommer två typer av samankopplingar av komponenter, seriekoppling och parallellkoppling. Om ett system med två komponenter fungerar om och endast om båda komponenterna fungerar, säger vi att komponenterna är seriekopplade. Om vi betecknar komponenterna med A respektive B kan

vi grafiskt illustrera seriekoppling som i figur 5.3. Inför vi beteckningarna

$$\begin{aligned} p_A &= P(A \text{ fungerar fram till tidpunkten } t) \\ p_B &= P(B \text{ fungerar fram till tidpunkten } t) \end{aligned}$$

och antar att A och B fungerar stokastiskt oberoende av varandra, kan vi använda multiplikationssatsen för att få

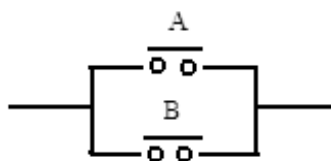
$$R(t) = p_A p_B$$



Figur 5.3 System med två seriekopplade komponenter

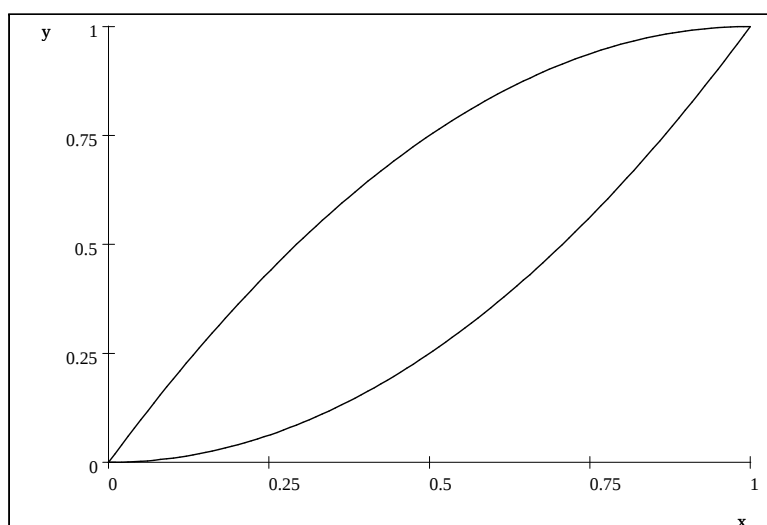
Om ett system med två komponenter fungerar om och endast om minst en av komponenterna fungerar säger vi att komponenterna är parallellkopplade. Parallellkoppling kan grafiskt illustreras som i figur 5.4. I det här fallet kan vi använda additionssatsen för att beräkna systemets tillfällighet. Med samma beteckningar som ovan får vi alltså

$$R(t) = p_A + p_B - p_A p_B$$



Figur 5.4 System med två parallellkopplade komponenter

Figur 5.5 illustrerar hur tillförlitligheten hos ett system med två komponenter beror av komponenternas tillförlitlighet. I figuren visas tillförlitligheten för systemet både då komponenterna är seriekopplade och då de är parallellkopplade. Parallellkopplade komponenter ger tydligen alltid en högre tillförlitlighet än seriekopplade, eftersom det räcker att en komponent fungerar i ett parallellkopplat system, medan båda komponenterna måste fungera i ett seriekopplat system.



Figur 5.5 Tillförlitligheten för två komponenter som är parallellkopplade respektive seriekopplade

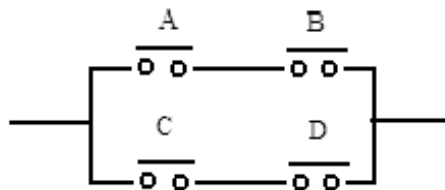
Med hjälp av räknereglerna för seriekoppling och parallellkoppling av två komponenter kan tillförlitligheten hos mer komplicerade system med fler komponenter, beräknas. I figur 5.6 visas ett exempel på ett system med fyra komponenter, A , B , C och D . Här gäller att antingen måste både A och B fungera eller så måste både C och D fungera, eller så måste alla fyra komponenterna fungera för att systemet skall fungera. A och B är alltså seriekopplade och C och D är seriekopplade, medan de två seriekopplingarna i sin tur är parallellkopplade. Under antagandet att alla komponenter fungerar oberoende av varandra tillämpar vi nu multiplikationssatsen för de två seriekopplingarna, dvs de fungerar med sannolikheterna p_{APB} respektive

$p_C p_D$. För att bestämma hela systemets tillförlitlighet tillämpar vi sedan additionssatsen med dessa resultat. Detta ger

$$R(t) = p_{APB} + p_{CPD} - p_{APB}p_{CPD}.$$

Om det dessutom gäller att $p_A = p_C$ och $p_B = p_D$ kan denna formel förenklas till

$$R(t) = p_{APB} + p_{APB} - p_A^2 p_B^2 = p_{APB}(2 - p_{APB}).$$



Figur 5.6 Exempel på ett system med fyra komponenter

5.4.3 Medicinska test

Inom den medicinska vården förekommer ett stort antal test för att indikera förekomsten av virus, bakterier, antikroppar etc. Ett test för att indikera förekomsten av HIV virus fungerar så att det ger ett positivt resultat med säkerhet om patienten verkligen har viruset. Om däremot patienten inte har viruset kan testet ändå ge ett (falskt) positivt resultat. Antag att ett falskt positivt resultat inträffar med sannolikheten 0,00005, alltså i fem fall av 100.000. Alla medicinska test ger falska positiva resultat med någon sannolikhet. Även falskt negativa resultat, dvs. testet ger ingen indikation på förekomsten av det man söker, trots att det finns. I det HIV-test vi beskriver här inträffar falska negativa resultat alltså med sannolikheten noll.

Antag nu att en person av 10.000 är HIV-positiv. För att bestämma sannolikheten att en patient med positivt testresultat verkligen är HIV-positiv låter vi A beteckna händelsen att patienten är HIV-positiv och B beteckna händelsen att patienten har ett HIV-positivt test. Då är alltså

$$P(A) = 0,0001$$

$$P(B | A) = 1$$

$$P(B | \bar{A}) = 0,00005,$$

och det följer det att

$$P(A \cap B) = P(B | A) P(A) = 1 \cdot 0,0001 = 0,0001$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,0001 = 0,9999$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B | \bar{A}) P(\bar{A}) = 0,00005 \cdot 0,9999 \approx 0,00005.$$

Därmed kan vi fylla i alla celler i fyrfältstabellen nedan

Händelse	A	$\bar{A}$	marginal
B	0,0001	0,00005	0,00015
$\bar{B}$	0,0000	0,99985	0,99985
marginal	0,0001	0,9999	1,00

Den sannolikhet vi söker är

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,0001}{0,00015} = \frac{2}{3}$$

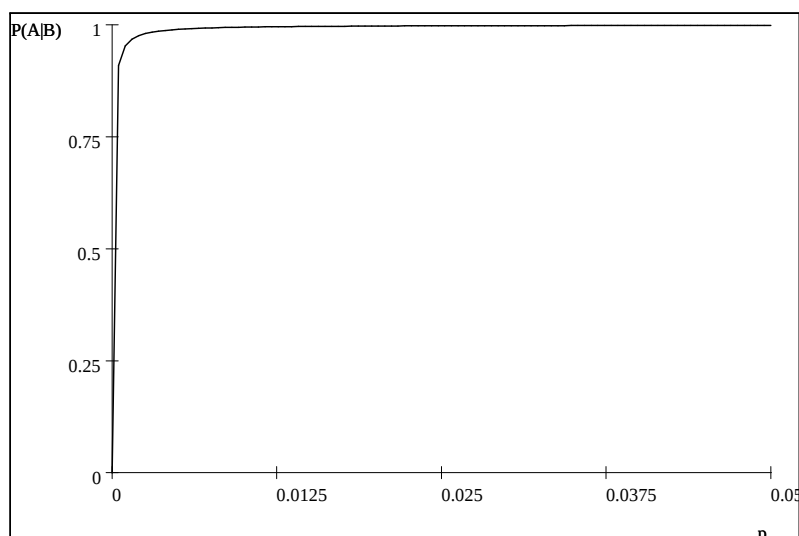
Vid första anblicken verkar testet mycket känsligt eftersom sannolikheten för ett falskt positivt resultat är mycket liten. Trots det är det bara ungefär 2/3 av alla med positivt testresultat som faktiskt bär på viruset medan 1/3 av alla med positivt testresultat har inte viruset.

Sannolikheten att en patient med ett positivt test verkligen har sjukdomen, $P(A | B)$, beror dels på hur vanlig sjukdomen är, $P(A)$, och dels på hur stor sannolikheten för falskt positiva testresultat, $P(B | \bar{A})$, är. Vi studerar nu först hur $P(A | B)$ beror av $P(A)$. För att förenkla beteckningarna sätter vi $P(A) = p$ och låter $P(B | \bar{A})$ fortfarande vara 0,00005. Den fyrfältstabell vi då får är

Händelse	A	$\bar{A}$	marginal
B	p	$0,00005(1 - p)$	$0,00005 + 0,99995p$
$\bar{B}$	0,00000	$0,99995(1 - p)$	$0,99995(1 - p)$
marginal	p	$1 - p$	1,00

Det framgår då att sannolikheten att en patient med positivt test verkligen har sjukdomen är

$$P(A | B) = \frac{p}{0,00005 + 0,99995p}$$



Figur 5.7 Graf över hur $P(A | B)$ beror av p

En graf över hur $P(A | B)$ beror av p visas i figur 5.7. Om sjukdomen inte förekommer i populationen, $p = 0$, är givetvis sannolikheten noll att en patient med positivt testresultat också har sjukdomen. Vi ser i figuren att sannolikheten $P(A | B)$ ökar mycket snabbt och närmar sig ett då p ökar. $P(A | B)$ överstiger 0,99 då $p \geq 0,005$. Om alla i populationen bär på sjukdomen, dvs. om $p = 1$, så är givetvis även $P(A | B) = 1$, alla med positivt test har sjukdomen. Det är tydligen för mycket sällsynta sjukdomar som sannolikheten för falska positiva testresultat är stor.

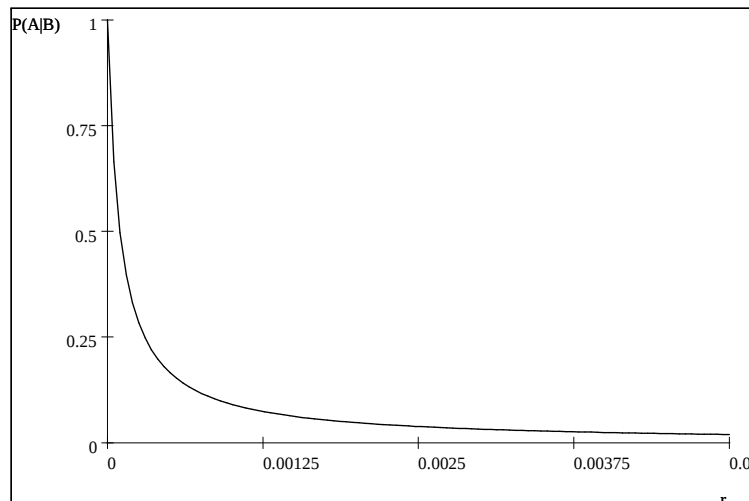
Vi fixerar nu $P(A)$ vid det ursprungliga värdet, 0,0001, och varierar $P(B | \overline{A})$, sannolikheten att få ett positivt testresultat hos en frisk person. Vi inför beteckningen $P(B | \overline{A}) = r$ och får fyrfältstabellen

Händelse	A	$\overline{A}$	marginal
B	0,0001	$0,9999r$	$0,0001+0,9999r$
$\overline{B}$	0,00000	$0,9999(1-r)$	$0,9999(1-r)$
marginal	0,0001	0,9999	1,00

Sannolikheten att en patient med positivt testresultat verkligen har sjukdomen blir med dessa förutsättningar

$$P(A | B) = \frac{0,0001}{0,0001 + 0,9999r}$$

I figur 5.8 visas en graf över hur $P(A | B)$ beror av r . Om testet aldrig visar ett felaktigt resultat, $r = 0$, kommer alla med positivt testresultat också att ha sjukdomen, $P(A | B) = 1$. I figuren visas också att efterhand som testet blir osäkrare, r ökar, minskar sannolikheten att en patient med positivt testresultat verkligen har sjukdomen. Om t.ex. sannolikheten att testet är positivt för en frisk person är större än en på tusen, $r \geq 0,001$, så är sannolikheten mindre än 0,1 att en person med positivt testresultat har sjukdomen. Risker för falska positiva resultat är alltså mycket stor i det fallet.



Figur 5.8 Graf över hur $P(A | B)$ beror av r .

Övning 5.12

Betrakta övning 5.5. Är förekomsten av sjukdomen cancer oberoende av rökning?

Övning 5.13

I en galopptävling startar fem hästar. Hästarna och sannolikheterna för vinst för var och en av dem visas i tabellen nedan. Just före loppet stryks Casiopeja och Sweet Sue ur loppet. Vad är då sannolikheten att Pollux vinner loppet?

Häst	Slh för vinst
Rigel	0,10
Aldebaran	0,25
Casiopeja	0,15
Sweet Sue	0,30
Pollux	0,20

Övning 5.14

Tre spelare, Andersson, Bertilsson och Carlsson, spelar en tennisturnering. Varje spelare spelar två matcher, en match mot var och en av de andra två spelarna. Om någon vinner sina båda matcher räknas han som segrare i turneringen. Antag att följande sannolikheter gäller

$$P(\text{Andersson slår Bertilsson}) = 0,7$$

$$P(\text{Bertilsson slår Carlsson}) = 0,8$$

$$P(\text{Carlsson slår Andersson}) = 0,9$$

Skriv upp nödvändiga förutsättningar och beräkna sannolikheten att

- a) Andersson vinner turneringen
- b) Bertilsson vinner turneringen
- c) Ingen vinner turneringen, dvs alla vinner var sin match.

Övning 5.15

I en verkstadsindustri bearbetas en produkt successivt i fem deloperationer. Genom ovarsam hantering deformeras vissa av de producerade enheterna. För varje deloperation är sannolikheten att en enhet blir deformerad 0,03. De olika deformationerna uppträder oberoende av varandra. Kontroll av deformation sker efter femte operationen. Vid kontrollen kasseras alla enheter som har utsatts för minst en deformation.

Beräkna sannolikheten att en enhet måste kasseras på grund av deformation.

Övning 5.16

Värdet på villor bestäms bl.a. villans standard. I ett område är 4 % av alla villor gjorda av mexitegel och har garage medan 58 % är gjorda av ett annat material och saknar garage. Bestäm andelen villor byggda av mexitegel bland de hus som har garage om man vet att 6 % av alla hus är byggda av mexitegel.

Övning 5.17

Ett varningssystem består av två komponenter K_1 och K_2 som var och en kan ge signal om en olycka inträffar. Olyckorna är av sådan art att varningssystemet kan förstöras. Man räknar med att K_1 kommer att fungera med sannolikheten 0,95 och att K_2 kommer att fungera med sannolikheten 0,90. Båda kommer att fungera med sannolikhet 0,89.

- Beräkna sannolikheten att systemet kommer att fungera vid en olycka.
- Visa att det inte föreligger stokastiskt oberoende mellan händelserna att komponent K_1 respektive K_2 fungerar.
- Antag att det förelåg oberoende mellan de ovan omtalade händelserna. Beräkna sannolikheten att systemet fungerar om sannolikheterna att K_1 respektive K_2 fungerar fortfarande är 0,95 respektive 0,90.
- Beräkna sannolikheten att en olycka som förstör K_2 även kommer att förstöra K_1 (ursprungliga förutsättningar om beroende antas gälla).

Övning 5.18

En investerare har två aktier. En viss dag kan värdet på var och en av aktierna antingen öka ($\ddot{O}$), vara oförändrat (O) eller minska (M).

a) Beräkna sannolikheterna att (i) båda aktiernas värden ökar, (ii) båda aktiernas värden minskar och (iii) värdet på exakt en aktie minskar en viss dag om det gäller att $P(\ddot{O}) = 0,4$, $P(O) = 0,2$ och $P(M) = 0,4$. Aktiernas värden antas vara stostatiskt oberoende av varandra.

b) Beräkna sannolikheterna i uppgift a) om det gäller att $P(\ddot{O}) = 0,8$, $P(O) = 0,1$ och $P(M) = 0,1$. Värdet på aktierna antas fortfarande vara stokastiskt oberoende av varandra.

Övning 5.19

Antag att värdet av en aktie (aktie A) en viss dag är stokastiskt beroende av värdet av en annan aktie (aktie B) dagen innan. Bestäm sannolikheten att aktie A ökar sitt värde en viss dag om vi vet att aktie B ökade sitt värde dagen innan. Utför beräkningen under förutsättning att aktierna ökar respektive minskar sina värden en viss dag är 0,5 (oförändrat värde antas inte vara möjligt). Sannolikheten att aktie A minskar sitt värde en viss dag och att aktie B har minskat sitt värde dagen innan är 0,3.

Övning 5.20

Företaget Rent och snygt (ROS) har marknadsfört sin nya produkt, tvättmedlet Miljöskyddssåpa (Miss), i en TV reklam. I en efterföljande urvalsundersökning visar det sig att 21% av de tillfrågade har köpt Miss, 41% har sett TV reklamen och 13% av de tillfrågade har både köpt produkten och sett TV reklamen.

a) Hur stor andel av de tillfrågade som har sett TV reklamen har också köpt tvättmedlet?

b) Med ledning av svaret på fråga a), kan man säga att TV reklamen har varit framgångsrik?

Övning 5.21

Ett företag tillverkar sina produkter genom att montera ihop komponenter som man köper in från andra tillverkare. Antag att man köper 10 % från tillverkare A, 20 % från tillverkare B och resten från tillverkare C. Antag vidare att 3 % av komponenterna från tillverkare A är felaktiga, 2 % av komponenterna från tillverkare B är elaktiga och 0,5 % av komponenterna från tillverkare C är felaktiga. Bestäm sannolikheten att en slumpmässigt vald komponent är felaktig.