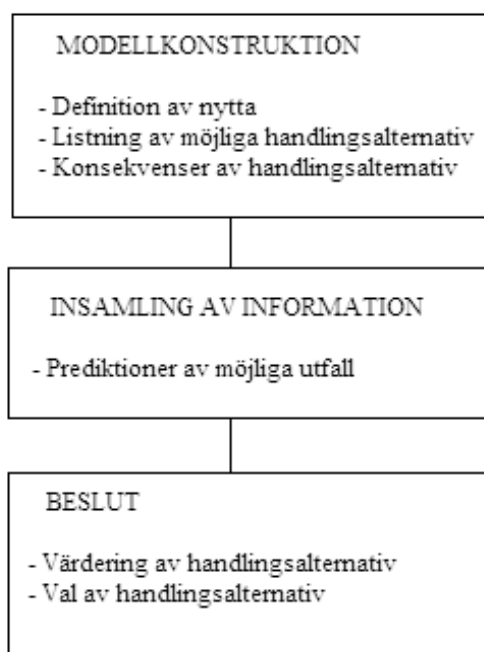

19. BESLUTSTEORI

19.1 Beslutsprocessen

För många människor, författaren i synnerhet, börjar dagen med en situation som kräver ett beslut: väckarklockan ringer, vad göra? Stänga av den och sova vidare eller stiga upp? Det är onekligen mest angenämt att ligga kvar i sängen. Väger man in olägenheten att eventuellt komma sent till arbetet förändras dock beslutssituationen och beslutet blir, oftast, att stiga upp. Ofta ställs vi inför betydligt mer svårlösta beslutsproblem. Som företagsledare har vi att fatta beslut om investeringar i nya anläggningar, investeringar i produktutveckling, prissättningar, val av produktionsprocesser, produktionsvolymen etc. Som produktionsledare har vi att fatta beslut om produktionsprocesser vad avser planerade stopp för service av maskinerna, kemiska tillsatser i processerna, lagerhållning av reservdelar, kvalitetskontroll av produkterna etc. Vid sidan av företagsledaren och produktionsledaren finns ett stort antal människor som ställs inför situationer där beslut måste fattas.

Inom beslutsteorin studerar man hur beslut bör fattas för att man skall nå ett i någon mening bra resultat. Ett bra resultat innebär ofta att t ex vinsten i ett företag skall maximeras. I många tillämpningar är dock andra värden än sådana som kan värderas i kronor och ören inblandade. Man talar då mer allmänt om nyttan av ett beslut. Nyttobegreppet är förstås lite diffust och kan uppfattas olika av olika människor, t ex upplever en del människor ett större välbehag (större nytta) då man blir serverad havregrynsgröt än då man blir serverad makaroner och korv, medan andra föredrar makaronerna före gröten. Vad som är nytta, hur den mäts och hur stor den är i olika situationer är problem som vi inte skall fördjupa oss i här. Vi skall här helt enkelt anta att vi redan har klarat av dessa frågor för de problem vi vill lösa, dvs vi har redan givet de nyttor som är aktuella i vår beslutssituation. Med hjälp av beslutsteorin skall vi sedan fatta ett beslut sådant att vår nytta maximeras.

Beslutsprocessen, dvs arbetsgången vid beslutsfattande, visas schematiskt i figur 19.1. Som vanligt skall vi basera vårt arbete på en modell. Därför konstrueras en modell redan i det första staget i beslutsprocessen. Modellen består dels av de handlingsalternativ vi har att välja mellan och dels vilka konsekvenser varje handlingsalternativ kan leda till. Konsekvenserna definieras då i nyttoformer.



Figur 19.1 Schema över beslutsprocessen

Exempel 19.1

Antag att vi är i färd med att laga en omelett. Vi har redan fyra ägg i smeten och funderar på att slå i ett femte ägg. Våra handlingsalternativ är att slå i ytterligare ett ägg respektive att nöja sig med en fyra-äggs omelett. Beteckna handlingsalternativen med A_1 respektive A_2 . Konsekvenserna av handlingen A_2 är att vi får en fyra-äggs omelett. I föregående kapitel diskuterade vi hur man kan pröva hypoteser om väntevärdet i en sannolikhetsfördelning. Hypotestestet förutsätter bl a att det medelvärde Antag att nyttan av en sådan är

4. Vi betecknar detta med

$$U(A_2) = 4$$

där U är förkortning av nytta (engelskans utility). Med handlingen A_1 får vi en fem-äggs omelett under förutsättning att det femte ägget är färskt. Det finns dock en risk att det femte ägget är surt vilket kommer att spolia hela omelettsmeten. Om vi väljer A_1 vet vi således inte vad konsekvensen blir, antingen får vi en fem-äggs omelett med nyttan 5 eller så blir vi utan omelett med nyttan 0, dvs

$$U(A_1) = 5 \text{ eller } = 0$$

Sökandet efter tänkbara handlingsalternativ är en viktig och ofta besvärlig del av beslutsprocessen. Likaså är det ofta svårt att kartlägga ett handlingsalternativs alla konsekvenser. Vi skall dock inte orda mer om dessa spörsmål här.

Då vi sedermera ställs inför valet av handlingsalternativ i det sista steget i beslutsprocessen, försöker vi välja det alternativ som för med sig den största nyttan. Om vi på förhand vet vilka konsekvenser varje handlingsalternativ leder till, sägs beslutet ske under säkerhet. Vid beslut under säkerhet vet vi alltså exakt vilken nytta varje handlingsalternativ för med sig. Det alternativ vi då väljer är det som svarar mot den största nyttan.

Beslut under risk är den situation vi befinner oss i om vi inte med säkerhet känner till vilken konsekvens ett handlingsalternativ leder till, men vi kan ange en sannolikhetsfördelning över vad som kan inträffa då de olika handlingsalternativen väljs. Utfallen i en sådan sannolikhetsmodell, som alltså är handlingsalternativens konsekvenser, brukar kallas naturtillstånd.

Exempel 19.2

Antag att A_i är ett av de handlingsalternativ vi har att välja på vid beslut under risk. Om vi väljer A_i inträffar naturtillståndet S_j med sannolikheten p och naturtillståndet S_k med sannolikheten $1 - p$. En sannolikhetsmodell över naturtillstånden är sålunda

$$\begin{cases} \Omega = \{S_j, S_k\} \\ P(S_j) = p, P(S_k) = 1 - p \end{cases}$$

Antag att vi får nyttan u_{ij} om S_j inträffar och nyttan u_{ik} om S_k inträffar. Vi kan då definiera en stokastisk variabel U_i som den nytta vi får om vi väljer handlingsalternativet A_i . Sannolikhetsfördelningen för U_i är därmed

$$\begin{cases} P(U_i = u_{ij}) = p \\ P(U_i = u_{ik}) = 1 - p \end{cases}$$

Väntevärdet av U_i kan därigenom beräknas till

$$E[U_i] = u_{ij}p + u_{ik}(1 - p)$$

Ett kriterium att välja handlingsalternativ vid beslut under risk är att välja det alternativ som leder till den största förväntade nyttan. Det finns även andra strategier att välja handlingsalternativ. Vi kommer att diskutera val av handlingsalternativ närmare i avsnitten 19.3 och 19.5.

Om vi med större säkerhet kan avgöra vilket naturtillstånd som kommer att inträffa vid val av handlingsalternativ, kommer säkerheten i beslutet att förbättras. Ibland finns det faktiskt en möjlighet att skaffa ytterligare information om framtiden (prediktioner) med hjälp av särskilda sannolikhetsmodeller. Sådan information kan fås genom t ex marknadsundersökningar, konjunkturbedömningar och spionage på konkurrenterna. Hur informationen behandlas och hur prediktionerna görs rent tekniskt har vi sett åtskilliga exempel på tidigare, inte minst i samband med studiet av urvalsundersökningar och av regressionsmodeller.

Exempel 19.1 (fortsättning)

Vi kan skaffa oss information om det femte ägget genom att först slå det i en särskild kopp och inte direkt i omelettsmeten. Endast om ägget är färskt tar vi med det i smeten. Genom att skaffa oss den extra informationen om det femte ägget sker vårt beslut under säkerhet. Observera att kostnaden för informationen i det här fallet är en smutsig kopp som måste diskas. ■

Det är inte alltid som en beslutssituation som sker under risk överförs till en situation under säkerhet då extra information införskaffas. Däremot är det alltid så att beslutet blir säkrare och vi kan fatta ett bättre beslut om vi har mera information. Tyvärr kostar informationen. Det är därför inte alltid säkert att det lönar sig att skaffa mer information. Hur detta avgörs diskuteras i avsnitt 19.4.

Beslut under osäkerhet råder när man inte med säkerhet vet vilket naturtillstånd som kommer att inträffa vid ett givet val av handlingsalternativ och heller inte kan ange någon sannolikhetsfördelning över naturtillstånden. Då vi inte vet med vilka sannolikheter naturtillstånden inträffar kan vi ansätta en likformig sannolikhetsfördelning och välja det handlingsalternativ som om beslutet sker under risk. Det finns även andra beslutskriterier som kan användas. Dessa behandlas i avsnitt 19.5.

19.2 Beslut under säkerhet

Ett användbart hjälpmedel vid beslut är den så kallade beslutsmatrisen. I beslutsmatrisens vänstra marginal skriver vi upp våra handlingsalternativ. Beteckna dessa med $A_1, A_2, \dots, A_N$. I den övre marginalen skriver vi upp naturtillstånden. Beteckna dessa med $S_1, S_2, \dots, S_M$. Se figur 19.2. I matrisens celler skriver vi upp de nyttor som svarar mot respektive kombination av handlingsalternativ och naturtillstånd. Vid beslut under säkerhet vet vi ju vilket naturtillstånd som kommer att inträffa vid varje val av handlingsalternativ. Därför kan vi fylla i endast ett nyttovärde per rad. Å andra sidan kan en kolumn i beslutsmatrisen innehålla flera nyttovärden eftersom två olika handlingsalternativ kan leda till att samma naturtillstånd inträffar.

Handlingsalt.	Naturtillstånd				
	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_M
A_1	u_1				
A_2	u_2				
A_3					
$\vdots$					
A_N	u_N				

Figur 19.2 En beslutsmatris

Då vi väljer handlingsalternativ gäller det nu att finna det största nyttovärdet i beslutsmatrisen. Motsvarande handlingsalternativ är det vi bör välja.

Exempel 19.1 (fortsättning)

Antag att vi har inspekterat det femte ägget och funnit att det är färskt. Kostaden för undersökningen värderas till 0,5. Om vi kastar bort ägget (handlingsalternativ A_1) får vi en fyra-äggs omelett (naturtillstånd S_1) med nyttan 3,5 (nyttan 4 för fyra-äggs omeletten minus undersökningskostnaden). Inkluderar vi ägget i omelettsmeten (handlingsalternativ A_2) får vi en fem-äggs omelett (naturtillstånd S_1) med nyttan 4,5. Beslutsmatrisen blir alltså som i figur 19.3. Den största nyttan är således 4,5 vilken upplevs om handlingsalternativ A_2 väljs. ■

	S_1 =färskt ägg S_2 =ruttet ägg
A_1 =kasta ägget	3,5
A_2 =ta med ägget	4,5

Figur 19.2 Beslutsmatrisen för omelettexemplet då det femte ägget har inspekterats och befunnits vara färskt.

Vi har hittills, utan att speciellt nämna det, endast diskuterat beslutssituationer med ett ändligt antal handlingsalternativ och ett ändligt antal naturtillstånd. Det är givetvis inte nödvändigt att begränsa sig till sådana situationer. Beräkningarna blir dock ofta mer komplicerade då det finns oändligt många handlingsalternativ respektive oändligt många naturtillstånd.

Exempel 19.3

Antag att vi har ett elektriskt värmeelement. Spänningen V till elementet kan regleras i intervallet 0 - 220 volt. Varje spänning är således ett handlingsalternativ för oss. Vi har därför ett kontinuum med oändligt många handlingsalternativ.

Om vi ansluter V volt till elementet får vi effekten P watt som bestäms genom sambandet

$$P = \frac{V^2}{48,8}$$

Genom att variera spänningen V (handlingsalternativet) i intervallet 0 - 220 volt, varierar effekten P (naturtillståndet) i intervallet 0 - 1000 watt.

Då elementet är påkopplat kommer ett rum att värmas upp. Uppvärmningen ökar då effekten på elementet ökar. Samtidigt som effekten ökar, ökar även strömkostnaden. Dessutom upplever vi inte ett alltför varmt rum som angenämt. Antag att den nytta U vi anser oss få vid en viss given effekt kan beskrivas av sambandet

$$U = 1600P - P^2$$

För att beräkna maximala nyttan deriverar vi detta uttryck

$$\frac{dU}{dP} = 1600 - 2P$$

och sätter derivatan lika med noll så att vi får ekvationen

$$1600 - 2P = 0$$

varur vi löser

$$P = \frac{1600}{2} = 800$$

Att $P = 800$ watt verkligen ger ett nyttomaximum kan vi övertyga oss om genom att studera andra derivatan

$$\frac{d^2U}{dP^2} = -2$$

som uppenbarligen är negativ.

Det återstår nu endast att undersöka vilket handlingsalternativ som ger naturtillståndet 800 watt. Vi får detta genom att sätta in den önskade effekten i sambandet mellan P och V . Detta ger oss ekvationen

$$800 = \frac{V^2}{48,8}$$

vilken har lösningen

$$V = \sqrt{800 \cdot 48,8} \approx 196,77$$

(Vi kan här bortse från den negativa roten.) Vår nytta maximeras tydligen om vi väljer handlingsalternativet 196,77 volt. ■

Observera att det i exempel 19.3 är möjligt att utveckla handlingsalternativet V som en funktion av nyttan U direkt. Detta inses om vi sätter in sambandet mellan P och V i nyttouttrycket, dvs

$$U = 1600 \frac{V^2}{48,4} - \left(\frac{V^2}{48,4} \right)^2$$

Vidare är handlingsalternativen V begränsade såväl uppåt som neråt, dvs vi har begränsningarna

$$0 \leq V \leq 220$$

Problemet att maximera nyttan under begränsningsvillkoret kan nu förkortat skrivas

$$\begin{array}{ll} \text{maximera} & U = 1600 \frac{V^2}{48,4} - \left(\frac{V^2}{48,4} \right)^2 \\ \text{då} & 0 \leq V \leq 220 \end{array}$$

Om nyttan U mer allmänt är en funktion g av handlingsalternativen V och en funktion h av V är begränsad mellan talen s och t formuleras problemet som

$$\begin{array}{ll} \text{maximera} & U = g(V) \\ \text{då} & s \leq h(V) \leq t \end{array}$$

Observera att formuleringen av problemet i exempel 19.3 är ett specialfall av denna mer generella formulering.

Vi har hittills låtit handlingsalternativen bestå av värden på en variabel. I många tillämpningar är det möjligt att samtidigt variera flera variabler.

Beteckna dessa med $X_1, X_2, \dots, X_k$. Vårt beslutsproblem är alltså att välja en kombination av värden på $X_1, X_2, \dots, X_k$ så att nyttan U maximeras. Låt liksom tidigare nyttan vara en funktion g av de valda handlingsalternativen. Om vi dessutom har begränsningar $h_1, h_2, \dots, h_L$ formulerar vi beslutsproblemet som

$$\begin{array}{ll} \text{maximera} & U = g(X_1, X_2, \dots, X_k) \\ \text{då} & s_1 \leq h_1(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq t_1 \\ & s_2 \leq h_2(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq t_2 \\ & \vdots \\ & s_L \leq h_L(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq t_L \end{array}$$

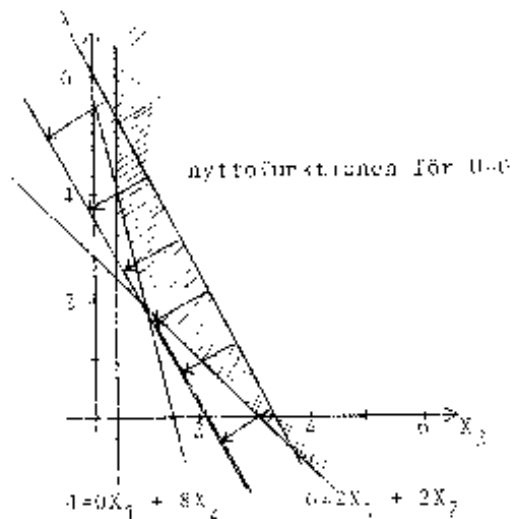
Detta är den mest generella formuleringen av beslutsproblem då besluten sker under säkerhet. Tyvärr är det inte alltid möjligt att matematiskt lösa problemet. En del viktiga specialfall finns dock. Ett av de viktigaste specialfallen uppkommer då både nyttofunktionen g och funktionerna $h_1, h_2, \dots, h_L$ är linjära funktioner. Problemet kallas då ett linjärt program, förkortat LP. Simplexmetoden och transportmetoden är två matematiska metoder för att lösa LP problem. Vi skall här inte fördjupa oss i dessa metoder, utan betraktar ett exempel där LP problemet kan lösas grafiskt.

Exempel 19.4

Den snåle herr Andersson vill helt tillgodose sina behov av vitaminerna A, B och C genom att endast dricka mjölk och äta limpa. Låt X_1 vara mängden mjölk han dricker per dag och X_2 vara mängden limpa han äter per dag. Om mjölken kostar 7,75 kr per liter och limpan kostar 15 kr kostar herr Anderssons dagliga ranson $7,75 \cdot X_1 + 15 \cdot X_2$.

Den nytta herr Andersson upplever efter att tillgodosett sina vitaminbehov är vad han får över när han handlat för 50 kr. Nyttofunktionen är alltså den linjära funktionen

$$U = 50 - 7,75 \cdot X_1 - 15 \cdot X_2$$



Figur 19.4 Herr Anderssons LP problem. Det streckade området är de tillåtna värdena på x_1 och x_2 . I figuren finns också nyttofunktionen för $U = 0$ inritad.

Antag nu att dagsbehovet av vitaminerna är 6, 12 respektive 4 mg och att mjölken innehåller 2 mg av vardera A och B vitaminerna men inget av C, samt att limpan innehåller 2, 8 respektive 8 mg av vitaminerna. Detta ger oss de linjära begränsningarna

$$\begin{aligned} 6 &\leq 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \\ 12 &\leq 2 \cdot X_1 + 8 \cdot X_2 \\ 4 &\leq 0 \cdot X_1 + 8 \cdot X_2 \end{aligned}$$

Vi ska nu grafiskt lösa herr Anderssons LP problem. Betrakta figur 19.4. Där har begränsningarna ritats in så att det skuggade området utgör samtliga kombinationer av X_1 och X_2 som uppfyller begränsningarna. För varje fixt värde på U ger nyttofunktionen en linje. Linjen för $U = 0$ finns inritad i figur

19.4. Om vi succesivt ökar U kommer vi att få nya, parallella linjer närmare origo. Den linje som har någon punkt gemensam med området med tillåtna värden på X_1 och X_2 och som ligger närmast origo, svarar således mot det maximala värdet på U (maximal nytta) då handlingsalternativen X_1 och X_2 är tillåtna. Herr Andersson skall alltså i det här fallet välja $X_1 = 2$ (liter mjölk) och $X_2 = 1$ (limpa). ■

Övning 19.1

Tillverkningskostnaden för en produkt är 4 kr per enhet. Med försäljningspriset 7 kr per enhet har man sålt 5000 enheter i månaden. Om priset ökas till 8 kr kommer efterfrågan att minska till 3500 enheter per månad. Konstruera en beslutsmatris och avgör vilket pris, 7 eller 8 kr, som maximerar företagets vinst.

Övning 19.2

Ett företag tillverkar två produkter, A och B. Förtjänsten för varje såld enhet är 200 kr respektive 120 kr. Tillverkningen sker i tre avdelningar med en resursåtgång som framgår av tabell 19.1. Beräkna hur många enheter av varje produkt som bör tillverkas för att företagets vinst skall maximeras. Försök också avgöra vilken avdelning i företaget som har överkapacitet och vilka avdelningar som bör byggas ut.

Tabell 19.1 Resurstillgång och resursåtgång vid tillverkning av produkterna A och B i övning 19.2.

Avdelning	Resurs- tillgång (tim)	Resursåtgång för A (tim/enh)	Resursåtgång för B (tim/enh)
montering	30000	200	90
målning	15000	80	80
kontroll	5000	20	30

19.3 Beslut under risk

Vid beslut under risk vet vi inte med säkerhet vad naturens tillstånd kommer att bli då vi väljer ett visst handlingsalternativ. Däremot kan vi ange en sannolikhetsfördelning över naturtillstånden. Vi kompletterar därför beslutsmatrisen med en rad med sannolikheter. Se figur 19.5. p_1 anger här sannolikheten att naturtillståndet blir S_1 , dvs $P(S_1) = p_1$, p_2 är sannolikheten att S_2 inträffar osv. Den nytta vi får om vi väljer handlingsalternativ A_i och naturtillstånd S_j inträffar betecknar vi med u_{ij} .

Hand lings alternativ	Naturtillstånd med motsv. sannolikheter					Förväntad nytta
	S_1	S_2	S_3	$\cdots$	S_M	
	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_M	
A_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\cdots$	u_{1M}	$E[U_1]$
A_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\cdots$	u_{2M}	$E[U_2]$
A_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\cdots$	u_{3M}	$E[U_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	u_{N3}	$\cdots$	u_{NM}	$E[U_N]$

Figur 19.5 Beslutsmatrisen vid beslut under risk.

För varje handlingsalternativ A_i definierar vi en stokastisk variabel U_i som den nytta vi får. Om t ex naturtillståndet blir S_j antar alltså U_i värdet u_{ij} . Eftersom $P(S_j) = p_j$ får vi att

$$P(U_i = u_{ij}) = p_j$$

Med hjälp av sannolikheterna $p_1, p_2, \dots, p_M$ blir därmed sannolikhetsfördelningarna för de stokastiska variablerna $U_1, U_2, \dots, U_N$ fullständigt bestämda. Väntevärdena av dessa variabler är

$$E[U_i] = u_{i1}p_1 + u_{i2}p_2 + \dots + u_{iM}p_M$$

$E[U_i]$ anger alltså den förväntade nyttan om handlingsalternativ A_i väljs. I beslutsmatrisen har även de förväntade nyttorna angetts.

Att välja handlingsalternativ vid beslut under risk kan ske på flera olika sätt. Ett sätt är att välja det alternativ som har den största förväntade nyttan.

Exempel 19.1 (fortsättning)

Antag att det femte ägget är surt med sannolikheten 0,1. Om A_1 är handlingsalternativet att slå ägget i smeten utan föregående inspektion och A_2 är handlingsalternativet att inte ta med det femte ägget får vi beslutsmatrisen i figur 19.6. S_1 anger där naturtillståndet att ägget är färskt och S_2 att ägget är surt. Den förväntade nyttan är tydligen maximal om handlingsalternativ A_1 väljs. ■

Hand lings alterna tiv	Naturtillstånd med motsv. sannolikheter		För väntad nytta
	S_1	S_2	
	p_1	p_2	
A_1	5	0	4,5
A_2	4	4	4

Figur 19.6 Beslutsmatrisen för omelettexemplet vid beslut under risk.

Givetvis finns det många problem vid beslut under risk som inte kan beskrivas med ett ändligt antal handlingsalternativ och ett ändligt antal naturtillstånd. Rent principiellt är det möjligt att formulera problem lika generellt som vi gjorde vid beslut under säkerhet. Den matematiska hanteringen då man skall lösa de mer generella problemen är definitivt inte lättare vid beslut under risk än vid beslut under säkerhet. Vi skall därför helt avhålla oss från att diskutera andra typer av problem vid beslut under risk än de vi redan har behandlat.

Övning 19.3

Vid roulettespel är vinsten om man satsar på ett nummer 35 gånger insatsen. Sannolikheten att man vinner är $1/37$. Välj ett lämpligt handlingsalternativ då vi har att välja på att satsa på ett nummer eller att anstå från att spela. Insatsen antas vara en krona.

Övning 19.4

Betrakta övning 19.1. Om priset ökas minskas efterfrågan till 3500 enheter per månad med sannolikheten 0,75 och är oförändrad med sannolikheten 0,25. Om priset inte ändras ändras inte heller efterfrågan. Avgör under dessa förutsättningar vilket pris produkten bör ha.

Övning 19.5

En tidningsförsäljare har de senaste 100 dagarna noterat försäljningssiffror för en dagstidning enligt tabell 19.2. Försäljaren köper tidningarna för 6 kr och säljer dem för 10 kr. De tidningar han inte får sälja kan inte returneras utan utgör en förlust för försäljaren. Använd observationerna för att uppskatta sannolikhetsfördelningen av efterfrågan och avgör hur många tidningar försäljaren bör beställa varje dag.

Tabell 19.2 Observationer på försäljningen av en dagstidning de senaste 100 dagarna.

antal sålda ex	frekvens
16	5
17	12
18	16
19	18
20	36
21	13
Summa	100

Övning 19.6 (Petersburg paradoxen)

Ett spel tillgår så att ett välbalanserat mynt kastas tills klave kommer upp första gången. Om klave kommer upp redan vid första kastet är vinsten 2 kronor, om klave kommer upp första gången vid det andra kastet är vinsten $2^2 = 4$ kronor osv. Allmänt skriver vi att om klave kommer upp första gången vid det n -te kastet är vinsten 2^n kronor. Antag att du måste betala 1000 kronor för att få vara med i spelet. Är du beredd att delta?

19.4 Värdet av observationer

Vid beslut under säkerhet vet vi vad som kommer att inträffa i framtiden. Det är därför möjligt att fatta det bästa beslutet. Vid beslut under risk har vi tyvärr inte perfekt information om framtiden, varför vi endast kan fatta beslut om det vi tror, eller förväntar oss, är bäst. Om det är möjligt att skaffa sig bättre information om framtiden kan vi därför fatta ett bättre beslut, dvs vi kan fatta ett beslut som vi förväntar oss har större nytta. Värdet av informationen är då den ökning i förväntad nytta vi får.

I det här avsnittet skall vi diskutera hur värdet av informationen kan beräknas. Det är en viktig kunskap i de fall då informationen måste köpas eller på annat sätt är förenad med kostnader. Ett sätt att skaffa sig information är t ex att genomföra en urvalsundersökning. Den fråga vi då stöter på är huruvida det är värt att genomföra urvalsundersökningen, dvs överstiger värdet av den information vi får kostnaderna för att genomföra undersökningen?

Vi betraktar först värdet av perfekt information, dvs vi antar att vi kan genomföra en undersökning som ger oss information om vilket naturtillstånd som kommer att inträffa. Vi vet givetvis inte vad undersökningsresultatet blir, utan kan endast resonera i termer av sannolikheter och väntevärden. Om vi vet att naturtillståndet S_1 inträffar skall vi välja det handlingsalternativ som ger den största nyttan (beslut under säkerhet). Beteckna den nytta vi får av det beslutet med v_1 , dvs

$$v_1 = \max(u_{11}, u_{21}, u_{31}, \dots, u_{N1}).$$

Om vi vet att naturtillståndet S_2 inträffar har vi en annan uppsättning nyttor att betrakta. Låt v_2 vara den nytta vi får om vi vet att S_2 inträffar, dvs

$$v_2 = \max(u_{12}, u_{22}, u_{32}, \dots, u_{N2}).$$

På samma sätt går vi igenom vart och ett av de möjliga naturtillstånden och får på så sätt fram nyttan vid perfekt information vid varje naturtillstånd, $v_1, v_2, \dots, v_M$. Vi kompletterar beslutsmatrisen med en rad för dessa nyttor. Se figur 19.7.

Handlingsalternativ	Naturtillstånd med motsv sannolikheter					Förväntad nytta
	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_M	
	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_M	
A_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\dots$	u_{1M}	$E[U_1]$
A_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\dots$	u_{2M}	$E[U_2]$
A_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\dots$	u_{3M}	$E[U_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	u_{N3}	$\dots$	u_{NM}	$E[U_N]$
Nytta vid perfekt info	v_1	v_2	v_3	$\dots$	v_M	$E[V]$

Figur 19.7 Beslutsmatrisen kompletterad med värdet av fullständig information

Definiera nu en stokastisk variabel V som nyttan vid perfekt information, dvs V antar värdet v_1 om S_1 inträffar, värdet v_2 om S_2 inträffar etc. Eftersom naturtillstånden inträffar med kända sannolikheter kan väntevärdet av V beräknas:

$$E[V] = v_1 p_1 + v_2 p_2 + v_3 p_3 + \dots + v_M p_M$$

$E[V]$ är sålunda den förväntade nyttan vi får då beslutet sker under säkerhet.

Låt A^* vara det handlingsalternativ vi väljer vid beslut under risk och låt U^* vara motsvarande stokastiska variabel, så att

$$E[U^*] = \max(E[U_1], E[U_2], E[U_3], \dots, E[U_M]).$$

Beteckna värdet av den perfekta informationen med R . Det visar sig då att R är en stokastisk variabel med väntevärdet

$$E[R] = E[V] - E[U^*]$$

dvs vi förväntar oss att den perfekta informationen har värdet $E[R]$. Detta innebär också att vi är beredda att betala upp till $E[R]$ "Nyttoenheter" för den perfekta informationen.

Exempel 19.1 (fortsättning)

Betrakta omelettexemplet igen. Om vi vet att ägget är färskt (naturtillstånd S_1) väljer vi handlingsalternativ A_1 (inkludera det femte ägget i omelettsmenen) och vi får nyttan 5. Nyttan vid perfekt information om S_1 inträffar är alltså 5. På samma sätt gäller att om vi vet att S_2 inträffar (det femte ägget är surt), väljer vi handlingsalternativ A_2 (kastar bort ägget) och får nyttan 4. Nyttan vid perfekt information om S_2 inträffar är därmed 4. Den förväntade nyttan av perfekt information blir då

$$E[V] = 5 \cdot 0,9 + 4 \cdot 0,1 = 4,9$$

Se figur 19.8. Utan information väljer vi handlingsalternativ A_1 , eftersom det alternativet svarar mot den största förväntade nyttan. Med våra vanliga beteckningar får vi att

$$E[U^*] = \max(4, 5, 4) = 4,5$$

varför

$$E[R] = 4,9 - 4,5 = 0,4.$$

Den förväntade nyttan av perfekt information är således i det här fallet 0,4. Om vi tycker att det kostar mindre än 0,4 "nyttoenheter" att smutsa ner en extra kopp för inspektion av det femte ägget, bör vi alltså skaffa oss denna information. Om kostnaden är större än 0,4 bör vi inte skaffa oss perfekt information eftersom den kostar mer än den smakar! ■

Hand- lings alternativ	Naturtillst med slh		För- väntad nytta
	S_1	S_2	
	0,9	0,1	
A_1	5	0	4,5
A_2	4	4	4
Nytta vid perf inf	5	4	4,9

Figur 19.8 Beräkning av värdet av perfekt information i omelettexemplet

Övning 19.7

Beräkna värdet av perfekt information i övning 19.4.

Övning 19.8

Beräkna värdet av perfekt information i övning 19.5.

Tyvärr är det i regel omöjligt att skaffa sig perfekt information. Däremot har man ofta möjlighet att skaffa sig ofullständig information som leder till ett nytt beslut under risk. Det nya beslutet är dock säkrare och har därför ett större värde. Vi skall nu diskutera värdeökningen av besluten, dvs värdet av den fullständiga informationen.

Antag att vi utför en undersökning som kan ge L stycken olika resultat, $B_1, B_2, \dots, B_L$. Antag också att vi känner de betingade sannolikheterna av naturtillstånden givet undersökningsresultaten. För resultatet B_k känner vi alltså sannolikheterna $P(S_1 | B_k), P(S_2 | B_k), \dots, P(S_M | B_k)$. Givet att undersökningen resulterar i B_k kan vi beräkna den förväntade nyttan av vart och ett av handlingsalternativen. De förväntade nyttorna, givet undersökningsresultatet B_k betecknas med $E(U_1 | B_k), E(U_2 | B_k), \dots, E(U_N | B_k)$. Om B_k inträffar väljer vi således det handlingsalternativ som maximerar de förväntade nyttorna givet B_k . Låt den maximala förväntade nyttan givet B_k betecknas med $E[V | B_k]$. Dessa beräkningar upprepas nu för varje möjligt undersökningsresultat.

Det är praktiskt att använda sig av beslutsmatrisen vid beräkningarna. Vi får då lägga till en rad och en kolumn för varje möjligt undersökningsresultat. På de nya raderna skrivs de aktuella betingade sannolikheterna in och i de nya kolumnerna noteras de beräknade väntevärdena. Den maximala förväntade nyttan för vart och ett av undersökningsresultaten markeras under varje ny kolumn. Se figur 19.9.

Hand- lings alt.	Naturtillst med motsv. slh			
	S_1	S_2	$\dots$	S_M
	p_1	p_2	$\dots$	p_M
A_1	u_{11}	u_{12}	$\dots$	u_{1M}
A_2	u_{21}	u_{22}	$\dots$	u_{2M}
A_3	u_{31}	u_{32}	$\dots$	u_{3M}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	$\dots$	u_{NM}
Beting- ade sanno- likherer	$P(S_1 B_1)$	$P(S_2 B_1)$	$\dots$	$P(S_M B_1)$
	$P(S_1 B_2)$	$P(S_2 B_2)$	$\dots$	$P(S_M B_2)$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$P(S_1 B_L)$	$P(S_2 B_L)$	$\dots$	$P(S_M B_L)$

Hand- lings alt.	Förv. nytta utan ny info.	Undersöknings resultat med slh			
		B_1	B_2	$\dots$	B_L
		$P(B_1)$	$P(B_2)$	$\dots$	$P(B_L)$
A_1	$E[U_1]$	$E[U_1 B_1]$	$E[U_1 B_2]$	$\dots$	$E[U_1 B_L]$
A_2	$E[U_2]$	$E[U_2 B_1]$	$E[U_2 B_2]$	$\dots$	$E[U_2 B_L]$
A_3	$E[U_3]$	$E[U_3 B_1]$	$E[U_3 B_2]$	$\dots$	$E[U_3 B_L]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_N	$E[U_N]$	$E[U_N B_1]$	$E[U_N B_2]$	$\dots$	$E[U_N B_L]$
	$E[U^*]$	$E[V B_1]$	$E[V B_2]$	$\dots$	$E[V B_L]$

Figur 19.9 Beslutsmatrisen vid beräkning av värdet av ofullständig information

Om sannolikheterna för de olika undersökningsresultaten $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_L)$, är kända kan den förväntade nyttan av beslutet med den nya informationen beräknas genom

$$E[V] = E[V | B_1] P(B_1) + E[V | B_2] P(B_2) + \dots + E[V | B_L] P(B_L)$$

Liksom tidigare låter vi $E[U^*]$ vara den förväntade nyttan av beslutet utan den nya informationen. Det förväntade värdet av den nya ofullständiga informationen, $E[R]$, blir därför

$$E[R] = E[V] - E[U^*]$$

Det återstår nu endast ett problem, nämligen att de betingade sannolikheterna $P(S_i | B_k)$ och sannolikheterna $P(B_k)$ kan vara okända. Däremot är de betingade sannolikheterna $P(B_k | S_i)$, som kan tolkas som undersökningens tillförlitlighet, ofta kända. Dessa tillsammans med de kända sannolikheterna $P(S_i)$ kan då med hjälp av sannolikhetsteoretiska resonemang användas för att beräkna de sannolikheter vi behöver veta. I enklare fall med endast två naturtillstånd och två möjliga resultat från undersökningen kan beräkningarna utföras med hjälp av fyrfältstabellen på det sätt som vi diskuterade i kapitel 5.

Exempel 19.1 (fortsättning)

Betrakta omelettexemplet igen. Antag att vi endast med sannolikheten 0,8 kan avgöra om ett inspekterat ägg är färskt eller ej. Om B_1 anger att testet indikerar att ägget är färskt och B_2 att ägget är surt har vi med de beteckningar vi tidigare har använt att

$$\begin{aligned} P(B_1 | S_1) &= 0,8 \\ P(B_2 | S_1) &= 0,2 \\ P(B_1 | S_2) &= 0,2 \\ P(B_2 | S_2) &= 0,8 \end{aligned}$$

Eftersom $P(S_1) = 0,9$ och $P(S_2) = 0,1$ får vi enligt multiplikationssatsen

$$P(S_1 \cap B_1) = P(B_1 | S_1) \cdot P(S_1) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$$

och

$$P(S_2 \cap B_1) = P(B_1 | S_2) \cdot P(S_2) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$$

Vi skriver nu upp dessa sannolikheter i en fyrfältstabell. Se figur 19.10. De sannolikheter som saknas beräknas nu enkelt genom

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(S_1 \cap B_1) + P(S_2 \cap B_1) = 0,72 + 0,02 = 0,74 \\ P(S_1 \cap B_2) &= P(S_1) - P(S_1 \cap B_1) = 0,90 - 0,72 = 0,18 \\ P(S_2 \cap B_2) &= P(S_2) - P(S_2 \cap B_1) = 0,10 - 0,02 = 0,08 \\ P(B_2) &= P(S_1 \cap B_2) + P(S_2 \cap B_2) = 0,18 + 0,08 = 0,26 \end{aligned}$$

och som kontroll

$$P(B_1) + P(B_2) = 0,74 + 0,26 = 1,00$$

	S_1	S_2	
B_1	0,72	0,02	0,74
B_2	0,18	0,08	0,26
	0,90	0,10	1,00

Figur 19.10 Fyrfältstabell för beräkning av sannolikheter i omelettexemplet.

De sökta betingade sannolikheterna kan nu beräknas enligt

$$\begin{aligned} P(S_1 | B_1) &= \frac{P(S_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0,72}{0,74} = 0,973 \\ P(S_2 | B_1) &= \frac{P(S_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0,02}{0,74} = 0,027 \\ P(S_1 | B_2) &= \frac{P(S_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{0,18}{0,26} = 0,692 \\ P(S_2 | B_2) &= \frac{P(S_2 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{0,08}{0,26} = 0,308 \end{aligned}$$

Vi är då mogna att fylla i beslutstabellen. Se figur 19.11.

Hand lings alternativ	Naturtillst m slh		Förv nytta utan ny inform.	Unders resultat m slh	
	S_1	S_2		B_1	B_2
	0,9	0,1		0,74	0,26
A_1	5	0	4,5	4,865	3,460
A_2	4	4	4	4,000	4,000
Betingade sannolikh	0,973 0,692	0,027 0,308	4,5	4,865	4,000

Figur 19.11 Beslutsmatrisen för omelettexemplet då vi har möjlighet att skaffa ofullständig information.

De betingade väntevärdena får vi genom

$$\begin{aligned}E[U_1 | B_1] &= u_{11}P(S_1 | B_1) + u_{12}P(S_2 | B_1) = 5 \cdot 0,973 + 0 \cdot 0,027 = 4,865 \\E[U_2 | B_1] &= u_{21}P(S_1 | B_1) + u_{22}P(S_2 | B_1) = 4 \cdot 0,973 + 4 \cdot 0,027 = 4,000 \\E[U_1 | B_2] &= u_{11}P(S_1 | B_2) + u_{12}P(S_2 | B_2) = 5 \cdot 0,692 + 0 \cdot 0,308 = 3,460 \\E[U_2 | B_2] &= u_{21}P(S_1 | B_2) + u_{22}P(S_2 | B_2) = 4 \cdot 0,692 + 4 \cdot 0,308 = 4,000\end{aligned}$$

Därav följer att om undersökningen visar att ägget är färskt skall vi välja handlingsalternativet A_1 och vi förväntar oss nyttan

$$E[V | B_1] = 4,865$$

Om, å andra sidan, undersökningen visar att ägget är surt skall vi välja handlingsalternativet A_2 med den förväntade nyttan

$$E[V | B_2] = 4,000$$

Den förväntade nyttan av beslutet då vi har tillgång till testresultaten beräknas till

$$\begin{aligned}E[V] &= E[V | B_1] \cdot P(B_1) + E[V | B_2] \cdot P(B_2) \\&= 4,865 \cdot 0,74 + 4,000 \cdot 0,26 \approx 4,64\end{aligned}$$

Eftersom den förväntade nyttan av ett beslut utan inspektion av ägget är 4,5 får vi att den förväntade nyttan av den ofullständiga informationen är

$$E[R] = 4,65 - 4,5 = 0,14$$

Testet får därför kosta högst 0,14 nyttoenheter för att det skall vara lönsamt att utföra det. ■

Övning 19.9

Betrakta övning 19.4. Antag att vi kan utföra en marknadsundersökning som kan indikera en nedgång i efterfrågan respektive en konstant efterfrågan.

Bestäm hur mycket marknadsundersökningen får kosta om den med sannolikheten 0,75 ger korrekt information.

Övning 19.10

Ett parti om 1000 glödlampor skall kvalitetskontrolleras. Antag att relativa frekvensen felaktiga lampor är antingen 0,05 eller 0,35.

a) Konstruera ett test, dvs beräkna urvalsstorlek och hur många lampor som högst får vara defekta i urvalet, så att testet visar felaktiga indikationer om felfrekvensen med sannolikheten 0,05.

b) Beräkna värdet av testet i uppgift a om partier med den lägre felfrekvensen förekommer med sannolikheten 0,6. Värdet av ett parti med den lägre felfrekvensen bedöms till 2000 kr då partiet accepteras medan ett accepterande av ett parti med den högre felfrekvensen medför en kostnad på 500 kr. Ett parti som inte accepteras medför en kostnad på 50 kr.

19.5 Beslut under osäkerhet

I en del situationer känner vi inte sannolikhetsfördelningen över naturtillstånden och kan heller inte skaffa oss information om den genom urvalsundersökningar. I sådana situationer säges beslutet ske under osäkerhet. Vi skall i det här avsnittet diskutera hur beslut kan fattas under osäkerhet.

Vid beslut under osäkerhet känner vi endast de handlingsalternativ vi har att välja mellan, de naturtillstånd som kan inträffa och de nyttor vi får vid varje kombination av handlingsalternativ och naturtillstånd. Eftersom varje handlingsalternativ kan medföra olika stor nytta beroende på vilket naturtillstånd som inträffar, kan vi inte välja det handlingsalternativ som med säkerhet ger den största nyttan. Trots detta finns det några synpunkter som kan vara till hjälp vid värdering av handlingsalternativen. Dessa synpunkter har lett till ett antal så kallade beslutsriterier. Vi kommer här att diskutera fyra av de vanligaste beslutsriterierna, nämligen maximin-, maximax-, minimax regret- och Laplace kriteriet.

Enligt maximinkriteriet bör man så bra som möjligt gardera sig mot dåliga utfall. Maximinkriteriet är därför ett "pessimistiskt" kriterium. Man beräknar först den minsta nyttan som kan inträffa vid varje val av handlingsalternativ.

Det handlingsalternativ som ger det största minimat väljs. Se figur 19.12. För handlingsalternativ A_i betecknas den minsta nyttan med a_i^- , dvs

$$a_i^- = \min(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iM})$$

Kvantiteten a_i^- är alltså den minsta nyttan vi kan få om handlingsalternativet A_i väljs. För att maximera denna minsta garanterade nytta väljer vi det handlingsalternativ som har maximalt a_i^- .

Handlings alternativ	Naturtillstånd					Minsta nyttan
	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_M	
A_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\dots$	u_{1M}	a_1^-
A_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\dots$	u_{2M}	a_2^-
A_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\dots$	u_{3M}	a_3^-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	u_{N3}	$\dots$	u_{NM}	a_N^-

Figur 19.12 Beslutsmatrisen då maximin-kriteriet används.

Exempel 19.5

I ett företag arbetar man med ett projekt som syftar till att utveckla en ny produkt. Nu föreligger emellertid ett lagförslag som innebär att den nya produkten i sin nuvarande form kan få en begränsad användning. Företagsledningen har därför tre alternativ att välja mellan: fortsätta enligt ursprungliga planer (A_1), fortsätta enligt planer som överensstämmer med lagförslaget (A_2) och att avsluta projektet och lägga ner verksamheten (A_3). De möjliga naturtillstånden är lagförslaget faller (S_1) och lagförslaget går igenom (S_2). De vinster man väntar sig få framgår av beslutsmatrisen i figur 19.13. Den minsta nyttan är störst för handlingsalternativ A_3 . Enligt maximinkriteriet bör därför A_3 (verksamheten läggs ner) väljas. ■

Handlings alternativ	Naturtillstånd		Minsta nyttan
	S_1	S_2	
A_1	11	2	2
A_2	4	10	4
A_3	5	5	5

Figur 19.13 Beslutsmatris för exempel 19.5 då maximin-kriteriet används.

Enligt maximaxkriteriet söker man den största nyttan som är möjlig att erhålla. Maximaxkriteriet är därför ett "optimistiskt" kriterium. För varje handlingsalternativ beräknas först den maximala nyttan vi kan få. För handlingsalternativ A_i betecknar vi den med a_i^+ , dvs

$$a_i^+ = \max(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iM})$$

Se figur 19.14. Kvantiteterna a_i^+ är alltså den största nyttan vi kan få om handlingsalternativet A_i väljs. Genom att välja det handlingsalternativ som har det största värdet på a_i^+ är det möjligt att få den största nyttan.

Handlings alternativ	Naturtillstånd					Största nyttan
	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_M	
A_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\dots$	u_{1M}	a_1^+
A_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\dots$	u_{2M}	a_2^+
A_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\dots$	u_{3M}	a_3^+
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	u_{N3}	$\dots$	u_{NM}	a_N^+

Figur 19.14 Beslutsmatrisen då maximax-kriteriet används.

Exempel 19.5 (fortsättning)

Då maximaxkriteriet används i projektutvecklingsexemplet får vi en beslutsmatris enligt figur 19.15. Den största nyttan är störst för handlingsalternativ A_1 . Enligt maximaxkriteriet bör därför A_1 väljas (fortsätta enligt ursprungliga planer). ■

Handlings alternativ	Naturtillstånd		Största nyttan
	S_1	S_2	
A_1	11	2	11
A_2	4	10	10
A_3	5	5	5

Figur 19.15 Beslutsmatris för exempel 19.5 då maximax-kriteriet används.

Minimax-regretkriteriet säger att man bör välja det alternativ som medför att den största tänkbara alternativförlusten blir så liten som möjligt. Med alternativförlust menar vi hur mycket sämre ett handlingsalternativ är än det bästa handlingsalternativet vid ett givet naturtillstånd. För att kunna tillämpa minimax-regretkriteriet måste vi därför först konstruera en matris med alternativförluster. Se figur 19.16. För varje naturtillstånd S_j beräknas den största nyttan s_j^+ , dvs

$$s_j^+ = \max(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{Nj})$$

Alternativförlusterna r_{ij} beräknas sedan för varje kombination av handlingsalternativ A_i och naturtillstånd S_j enligt

$$r_{ij} = s_j^+ - u_{ij}$$

Därmed kan alternativförlusterna skrivas in i regretmatrisen. För varje handlingsalternativ A_i kan då den maximala alternativförlusten (maximal regret), a_i^r , beräknas, dvs

$$a_i^r = \max(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{iM})$$

Handlings alternativ	Naturtillstånd				
	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_M
A_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\dots$	u_{1M}
A_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\dots$	u_{2M}
A_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\dots$	u_{3M}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	u_{N3}	$\dots$	u_{NM}
Max nytta	s_1^+	s_2^+	s_3^+	$\dots$	s_M^+

Handlings alternativ	Naturtillstånd					Största nyttan
	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_M	
A_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	$\dots$	r_{1M}	a_1^r
A_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	$\dots$	r_{2M}	a_2^r
A_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	$\dots$	r_{3M}	a_3^r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_N	r_{N1}	r_{N2}	r_{N3}	$\dots$	r_{NM}	a_N^r

Figur 19.16 Beslutsmatris och regretmatris då minimax-regret-kriteriet används.

Kvantiteterna a_i^r anger alltså maximal alternativförlust för varje val av handlingsalternativ. Enligt minimax-regretkriteriet skall vi välja det handlingsalternativ som har det minsta värdet på a_i^r .

Exempel 19.5 (fortsättning)

Då minimax-regretkriteriet tillämpas på projektutvecklingsexemplet får vi en beslutsmatris och en regretmatris som i figur 19.17. Tydligt minimeras den största alternativförlusten av handlingsalternativ A_3 . Enligt minimax-regretkriteriet bör därför A_3 väljas (verksamheten läggs ner). ■

Handlings alternativ	Naturtillstånd	
	S_1	S_2
A_1	11	2
A_2	4	10
A_3	5	5
Max nytta	11	10

Handlings alternativ	Naturtillstånd		Maximal regret
	S_1	S_2	
A_1	0	8	8
A_2	7	0	7
A_3	6	5	6

Figur 19.17 Beslutsmatris och regret-matris för exempel 19.5 då minimax-regret-kriteriet används.

Då vi inte vet något om sannolikheter för naturtillstånd kan man ibland hävda att alla tillstånd är "lika möjliga" (indifferensprincipen). Enligt det resonemanget kan vi då ansätta en likformig sannolikhetsfördelning över naturtillstånden. Detta leder i sin tur till Laplacekriteriet. Enligt detta kriterium väljs, liksom vid beslut under risk, det handlingsalternativ som har den största förväntade nyttan. Den beslutsmatris som är aktuell då Laplacekriteriet används visas i figur 19.18.

Hand lings alternativ	Naturtillstånd med motsv. slh.					Förväntad nytta
	S_1	S_2	S_3	$\cdots$	S_M	
	$\frac{1}{M}$	$\frac{1}{M}$	$\frac{1}{M}$	$\cdots$	$\frac{1}{M}$	
A_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\cdots$	u_{1M}	$E[U_1]$
A_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\cdots$	u_{2M}	$E[U_2]$
A_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\cdots$	u_{3M}	$E[U_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_N	u_{N1}	u_{N2}	u_{N3}	$\cdots$	u_{NM}	$E[U_N]$

Figur 19.18 Beslutsmatris då Laplace-kriteriet används.

Exempel 19.5 (fortsättning)

Eftersom det finns två naturtillstånd S_1 och S_2 , ansätts sannolikheterna

$$P(S_1) = P(S_2) = \frac{1}{2}$$

då Laplacekriteriet används. Detta ger oss beslutsmatrisen i figur 19.20. Den förväntade nyttan är maximal för handlingsalternativ A_2 . Enligt Laplacekriteriet bör därför A_2 väljas (fortsätta enligt planer som stämmer överens med det nya lagförslaget).

Hand- lings alternativ	Naturtillst. med motsv slh		Förv- äntad nytta
	S_1	S_2	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
A_1	11	2	6,5
A_2	4	10	7
A_3	5	5	5

Figur 19.19 Beslutsmatris för exempel 19.5 då Laplace-kriteriet används.

Övning 19.11

Betrakta exempel 19.1. Antag att vi inte känner sannolikheten för ändelsen att det femte ägget är färskt. Använd vart och ett av maximin-, maximax-, minimax-regret- och Laplacekriteriet för att lösa beslutsproblemet.

Övning 19.12

Chefen för en pappershandel är i färd med att beställa julkort. Varje låda med kort kostar 15 kr att köpa från grossisten. I pappershandeln kostar lådan 25 kr under tiden fram till tre dagar före julafton. Alla kort som då finns kvar kan realiseras bort för 10 kr per låda. Bestäm antalet lådor som skall beställas från grossisten under maximin-, maximax-, minimax-regret- och Laplacekriteriet då man vet att efterfrågan kommer att vara mellan 25 och 30 lådor.