
13. DESKRIPTION — TIDSSERIER

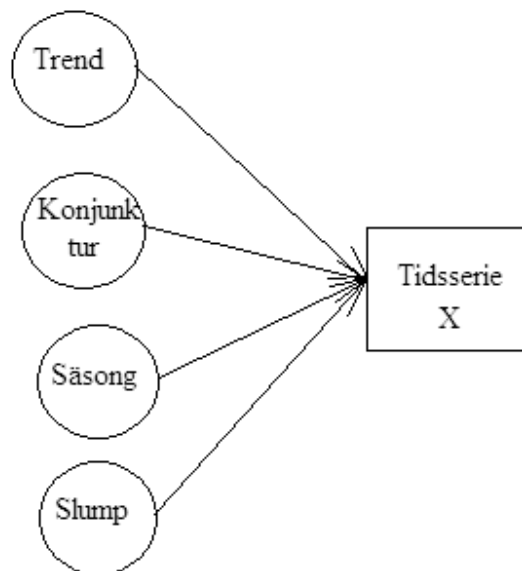
13.1 Inledning

En tidsserie består av observationer gjorda under en följd av tidpunkter. Exempel på tidsserier är kursen på en viss aktie vid börsens stängning varje börsdag, priset på smör den första dagen i varje månad, antalet passagerare på en viss flyglinje varje månad, antal sålda bilar varje kvartal och brutto national produkten (BNP) för varje år.

Vi kan tänka oss en tidsserie som att vi vid varje tidpunkt observerar utfallet från ett slumpmässigt försök, där utfallet representeras av värdet på en stokastisk variabel. Vid tidpunkten t gör vi således en observation på den stokastiska variabeln X_t . En tidsserie med T värden kan därför betraktas som observationer på följden $X_1, X_2, \dots, X_T$ av stokastiska variabler.

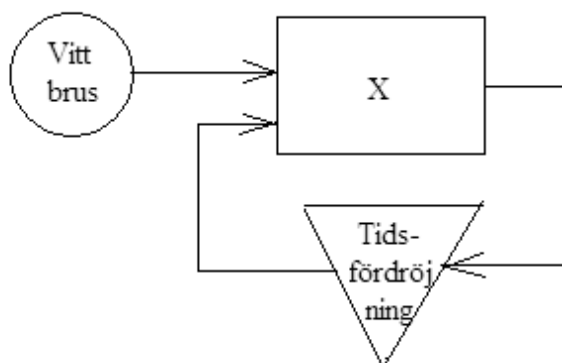
Flera olika typer av modeller för tidsserier förekommer. Vi skall här endast nämna två olika utgångspunkter som ofta förekommer i samband med byggande av modeller för tidsserier. En utgångspunkt är att tänka sig att en tidsserie är uppbyggd av fyra olika komponenter: en trend-, en konjunktur, en säsong- och en slumpkomponent. Med trend menar man här seriens allmänna utveckling sett över en lång tidsperiod. Konjunkturen utgör en återkommande, oregelbunden, variation runt trenden. Omloppstiden för konjunkturen är relativt lång. För ekonomiska tidsserier räknar man med en omloppstid om två till tio år från en topp till nästa topp. Säsongkomponenten är en regelbunden cyklisk variation med kortare omloppstid: ett år för ekonomiska tidsserier. Ett säsongmönster är således ett mönster som upprepas varje år. Slumpkomponenten, slutligen, är en oregelbunden komponent som saknar både trendmässig och cyklisk utveckling. Tidsseriens värde i en viss tidpunkt utgör en funktion av dess fyra komponenter. En vanlig modell är att tidsseriens värde är summan av de fyra komponenterna. En annan vanlig modell är att tidsseriens värde är produkten av de fyra komponenterna. I termer av databildning kan vi alltså betrakta trenden, konjunkturen, säsongen och slumpkomponenten i en tidsserie

som fyra latent variabler, vilka kombineras genom en känd funktion, till tidsserien. Figur 13.1 illustrerar detta. En del av tidsserieanalysen ägnar sig åt att dekomponera, dvs dela upp, en tidsserie i dess komponenter och därigenom försöka få uppskattade värden på de latent variablerna. Kan man åstadkomma det kan man sedan bygga separata modeller för var och en av komponenterna. Även det omvända resonemanget förekommer: givet modeller för var och en av komponenterna, kan modellerna “komponeras ihop” till en modell för den observerade tidsserien, på motsvarande sätt som man tänker sig att de latent variablerna “komponeras ihop” till tidsserien.



Figur 13.1 Tidsseriens fyra komponenter som latent variabler.

En annan utgångspunkt vid modellbyggnad i samband med tidsserier är att analysera tidsserien i termer av stokastiska processer. Vi skall här nämna endast en mycket enkel stokastisk process som ett exempel, nämligen en första ordningens autoregressiv process, se figur 13.2 för en illustration.



Figur 13.2 Första ordningens autoregressiv process.

Den stokastiska variabeln X_t , dvs tidsserien vid tidpunkten t , beror av den stokastiska variabeln X_{t-1} , dvs tidsserien vid föregående tidpunkt och en slumpterm, en stokastisk variabel ϵ_t som är oberoende av slumptermerna vid alla andra tidpunkter, här kallad vitt brus. Matematiskt kan modellen formuleras som

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t$$

där ρ är en konstant. Värdet på ρ och sannolikhetsfördelningen för det vita bruset, ϵ_t , bestämmer tidsseriens egenskaper.

Observationer på tidsserier brukar inte bearbetas på samma sätt som oberoende observationer på tvärsnittsdata. Det finns i huvudsak två skäl till detta. Dels har variablerna $X_1, X_2, \dots, X_T$ i många tillämpningar olika sannolikhetsfördelningar (t ex på grund av en trend). Detta gör att det är inte meningsfullt att försöka skapa sig en bild av en empirisk fördelning. Dels är de frågeställningar som förekommer i samband med analys av tidsserier ofta knutna till seriernas utveckling i tiden, dvs de förändringar som förekommer från en tidpunkt till en annan. Då vi analyserar tidsserier måste vi därför använda metoder för att analysera deras tidsmässiga utveckling, snarare än att studera fördelningen i en population vid en viss tidpunkt. I det här kapitlet diskuterar vi några enkla metoder för att bearbeta tidsserier. I

avsnitt 13.2 beskriver vi hur en tidsserie kan beskrivas i termer av relativa förändringar, ett enkelt index, och hur flera tidsserier kan vägas samman till ett sammansatt index. I avsnitt 13.3 diskuterar vi grafisk framställning av tidsserier.

13.2 Indexberäkningar

Det är mycket vanligt att en tidsserie beskrivs i termer av seriens relativa (procentuella) förändring från en tidpunkt till en annan. En tidsseries utveckling från en viss tidpunkt, den så kallade bastidpunkten, kallas ett (enkelt) index. En viktig situation som ofta förekommer är att man har flera tidsserier som var och en är en indikator på en latent variabel. Vi kan till exempel tänka oss att prisutvecklingen på olika varor och tjänster speglar utvecklingen av en allmän latent "prisnivå" i samhället. Man kan då väga samman indikatorernas (enkla) indexserier till ett sammansatt index. Den sammansatta indexserien skall då spegla den latent variabelns relativa utveckling. Vi behandlar först enkla index och sedan sammansatta index.

13.2.1 Enkla index — definition och tolkning

En indexserie bildas genom att först välja bastidpunkt och sedan räkna ut hur många procent tidsseriens värde är jämfört med bastidpunktens värde. Indextalen är dessa procenttal. Med bastidpunkt menas den tidpunkt med vilken jämförelserna skall göras. Bastidpunkten är därför ett visst år, kvartal, månad etc. I publikationer brukar bastidpunkten anges på det oegentliga sättet "bastidpunkt = 100". Till exempel betyder $1949 = 100$ att serien har 1949 som basår. Om tidsserien har värdena $x_1, x_2, \dots, x_T$ och vi har tidpunkten b som bastidpunkt blir följaktligen indextalet vid tidpunkten t lika med $x_t/x_b \cdot 100$. Detta indextal anger tidsseriens procentuella förändring från bastidpunkten b till tidpunkten t .

Exempel 13.1

I tabell 13.1 redovisas producentpriset på en liter mjölk med fetthalten 4.1% och proteinhalten 3.3%. Priset gäller för mars månad åren 1988-1991 hos en viss mejeriförening. I tabellen redovisas också konsumentpriset på en liter standardmjölk vid samma tidpunkter. Eftersom priserna kan variera mellan

olika butiker redovisas de priser som en större butikskedja rekommenderade. Med bastidpunkten mars 1988 motsvaras dessa två tidsserier av de indexserier som redovisas i tabell 13.2.

Tabell 13.1 Producent- och konsumentpriser på mjölk

Tidpunkt	Producent- pris	Konsument- pris
mars 1988	3.50	4.84
mars 1989	3.83	5.18
mars 1990	3.48	5.46
mars 1991	3.47	6.53

Tabell 13.2 Producent- och konsumentpriser på mjölk. Indextal med mars 1988 = 100

Tidpunkt	Producent- pris	Konsument- pris
mars 1988	100	100
mars 1989	109.4	107.0
mars 1990	99.4	112.8
mars 1991	99.1	134.8

Indextalet 109.4, som fås för producentpriset i mars 1989, beräknas genom $(3.83/3.50) \cdot 100$. Detta innebär att mjölkproducenten fick 9.4% $(109.4-100)$ mer betalt för sin produkt i mars 1989 än vad han fick i mars 1988. Vidare ser vi att mjölkproducenten fick 0.6% $(99.4-100)$ mindre betalt i mars 1990 än i mars 1988.

Det är viktigt att påpeka här att indexserierna i tabell 13.2 redovisar procentuella förändringar i förhållande till bastidpunkten mars 1988. Vi kan alltså inte direkt ur tabellen utläsa procentuella förändringar i förhållande till någon annan tidpunkt. Prisfallens procentuella storlek från 1989 till 1990 framgår således inte i tabellen.

Observera slutligen att indextal anger endast förändringar, inte nivåer. I indexserien för producentpriserna jämförs priserna med bastidpunktens pris 3.50 och i indexserien för konsumentpriserna jämförs priserna med 4.84. ■

Jämförelser med en annan tidpunkt än bastidpunkten är inte möjlig i en indexserie. Önskar man en jämförelse med en annan tidpunkt måste man helt enkelt räkna ut en ny indexserie med en ny bastidpunkt. Om vi har en indexserie med bastidpunkten 0, vet vi att indextalet I_t^0 vid tidpunkten t är

$$I_t^0 = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100$$

Antag nu att vi önskar en indexserie med tidpunkten 1 som bastidpunkt. Vid den nya bastidpunkten har vi indextalet

$$I_1^0 = \frac{x_1}{x_0} \cdot 100$$

Vid tidpunkten t blir indextalet I_t^1 med bastidpunkten 1 lika med

$$I_t^1 = \frac{x_t}{x_1} \cdot 100 = \frac{\frac{x_t}{x_0} \cdot 100}{\frac{x_1}{x_0} \cdot 100} \cdot 100 = \frac{I_t^0}{I_1^0} \cdot 100$$

dvs den nya indexserien fås ur den gamla indexserien genom att dividera indextalen med indextalet för den nya bastidpunkten och multiplicera med faktorn 100.

Exempel 13.1 (fortsättning)

I tabell 13.3 visas hur man byter från bastidpunkten mars 1988 till mars 1989 i serien för producentpriset på mjölk. Det är först i denna tabell det framgår att producentpriset föll med 9.1% (100-90.9) från 1989 till 1990. Notera också att indextalen i tabell 13.3 kan beräknas ur prisuppgifterna i tabell 13.1. T.ex. får vi indextalet 91.1 för mars 1988 genom $(3.50/3.83) \cdot 100$. ■

Tabell 13.3 Producentpriset på mjölk. Indextal.

Tidpunkt	mars 88 = 100	mars 89 = 100
mars 1988	100	$(100/109.4) \cdot 100 = 91.4$
mars 1989	109.4	$(109.4/109.4) \cdot 100 = 100$
mars 1990	99.4	$(99.4/109.4) \cdot 100 = 90.9$
mars 1991	99.1	$(99.1/109.4) \cdot 100 = 90.6$

Antag nu att olika delar av en tidsserie har räknats om till indexserier med olika bastidpunkter. För att kunna analysera serien måste vi räkna om indexserierna så att de får samma bastidpunkt. Enklast sker detta genom att byta bastidpunkt för de olika delarna enligt den teknik vi visade ovan så att alla delar får samma bastidpunkt. Detta kallas för att serierna kedjas.

Exempel 13.1 (fortsättning)

Ett exempel på kedjning av indexserier för producentpriset på mjölk visas i tabell 13.4 ■

Tabell 13.4 Producentpriset på mjölk. Indextal.

Tidpunkt	mars 1989 = 100	mars 1988 = 100	Byte av bas till mars 1989 = 100
mars 1988	-	100	$(100/109.4) \cdot 100 = 91.4$
mars 1989	100	109.4	$(109.4/109.4) \cdot 100 = 100$
mars 1990	90.9	-	90.4
mars 1991	90.6	-	90.6

13.2.2 Sammansatta index

Enkla index, såsom de beskrivs i föregående delavsnitt, kan ge en god bild av utvecklingen för en tidsserie. Om vi har många tidsserier kan det ibland vara praktiskt att sammanfatta alla serierna i ett sammansatt index i stället för att redovisa ett enkelt index för varje serie. Detta gäller särskilt då vi önskar ange prisutvecklingen för en hel grupp av varor och tjänster. Exempel på sådana sammansatta index är konsumentprisindex som avser mäta prisförändringarna i detaljhandelsledet för de varor och tjänster som ingår i den privata konsumtionen, producentprisindex som mäter prisutvecklingen i producentledet, samt exportprisindex och importprisindex som mäter prisförändringarna i export- respektive importleden.

Det finns flera olika sätt att konstruera sammansatta index. De två sätt vi beskriver här bygger på att väga samman de enkla indexserier som gäller för varje vara eller tjänst. Antag därför att vi har en grupp bestående av N stycken varor eller tjänster och att vi för varje vara eller tjänst i den studerade gruppen har en tidsserie avseende priset vid T stycken tidpunkter.

Beteckningsmässigt skriver vi tidsserien för priset på den $i - te$ varan eller tjänsten som $p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{Ti}$. Om vi använder tidpunkten 0 som bastidpunkt får den $i - te$ varan eller tjänsten det enkla indextalet $(p_{ti}/p_{0i}) \cdot 100$ vid tidpunkten t . Det sammansatta indextalet för hela gruppen vid tidpunkten t får vi nu genom att väga samman de enkla indextalen. Om vi betecknar den vikt vi ger till den $i - te$ varan eller tjänsten med w_i får vi alltså

$$Indextalet = \sum_{i=1}^N \frac{p_{ti}}{p_{0i}} \cdot 100 \cdot w_i$$

Ett sätt att konstruera vikterna w_i är att låta dem utgöra den proportion av gruppens totala värde som utgörs av den $i - te$ varan eller tjänsten vid bastidpunkten. Detta förfaringssätt föreslogs av Laspeyre och det resulterande sammansatta indexet kallas följaktligen Laspeyres index. Om q_{0i} är den aktuella kvantiteten (producerad, konsumerad, såld etc) hos den $i - te$ varan eller tjänsten vid bastidpunkten, får vi att värdet av den varan eller tjänsten är $p_{0i} \cdot q_{0i}$ och att gruppens sammanlagda värde är $\sum_{i=1}^N p_{0i} \cdot q_{0i}$. Vikten blir därmed

$$w_i = \frac{p_{0i} \cdot q_{0i}}{\sum_{i=1}^N p_{0i} q_{0i}}$$

vilket insatt i formeln ovan ger, efter förenkling, Laspeyres index vid tidpunkt t

$$L_t^0 = \frac{\sum_{i=1}^N p_{ti} \cdot q_{0i}}{\sum_{i=1}^N p_{0i} q_{0i}} \cdot 100$$

I Laspeyres index använder vi vikter som bestäms av bastidpunktens värde definierat som produkten av bastidpunktens pris och bastidpunktens kvantitet. Ett annat alternativ är att definiera värdet som produkten av bastidpunktens pris och kvantiteten vid tidpunkt t . Denna definition föreslogs av Paasche och ger oss således Paasches index. Om den $i - te$ varans eller tjänstens aktuella kvantitet vid tidpunkten t är q_{ti} blir dess värde med denna definition $p_{0i} \cdot q_{ti}$ och gruppens sammanlagda värde $\sum_{i=1}^N p_{0i} \cdot q_{ti}$. Vikterna blir därför

$$w_i = \frac{p_{0i}q_{ti}}{\sum_{i=1}^N p_{0i}q_{ti}}$$

som insatt i indexformeln ger oss Paasches index

$$P_t^0 = \frac{\sum_{i=1}^N p_{ti}q_{ti}}{\sum_{i=1}^N p_{0i}q_{ti}} \cdot 100$$

efter viss förenkling.

Exempel 13.2

Ett företag säljer två typer av elektroniska räknemaskiner, här kallade typ A respektive typ B. Priser och antal sålda maskiner framgår av tabell 13.5.

Tabell 13.5 Priser och försålda kvantiteter av räknemaskiner.

Tidpunkt	Typ A		Typ B	
	pris	kvantitet	pris	kvantitet
2004	540	60	1550	8
2005	500	65	720	15
2006	270	60	480	60

Laspeyres och Paasches index för priserna på företagets räknemaskiner redovisas i tabell 13.6. Dessa indextal fås direkt ur definitionen. T.ex. får vi för 2005 att

$$L_{2005}^{2004} = \frac{500 \cdot 60 + 720 \cdot 8}{540 \cdot 60 + 1550 \cdot 8} \cdot 100 = 79.8$$

och

$$P_{2005}^{2004} = \frac{500 \cdot 65 + 720 \cdot 15}{540 \cdot 65 + 1550 \cdot 15} \cdot 100 = 74.2$$

Enligt dessa mått minskade priset på företagets räknemaskiner med 20.1% respektive 25.8% från 2004 till 2005. ■

Tabell 13.6 Laspeyres och Paasches index för prisutvecklingen på räknemaskiner

Tidpunkt	Laspeyres index	Paasches index
2004	100	100
2005	79.8	74.2
2006	44.7	35.9

I det fall vi är intresserade av förändringar i volym (konsumerad, producerad, såld etc) arbetar vi med index på samma sätt, men med kvantiteter i stället för priser. Följande exempel illustrerar hur ett kvantitetsindex beräknas.

Exempel 13.2 (fortsättning)

Antag att vi vill beräkna Laspeyres index för den försålda kvantiteten av räknemaskiner enligt tabell 13.5. Med 2004 som basår beräknas indextalet för 2005 genom

$$L_{2005}^{2004} = \frac{540 \cdot 65 + 1550 \cdot 15}{540 \cdot 60 + 1550 \cdot 8} \cdot 100 = \frac{58350}{44800} = 130.2$$

dvs försäljningsvolymen av räknemaskiner har ökat med 30.2% från 2004 till 2005. ■

Då varugruppen innehåller väldigt många varor och tjänster blir beräkningarna av sammansatta index mycket omfattande. Man brukar då nöja sig med att basera beräkningarna på ett urval av varor och tjänster. Vidare kompliceras beräkningarna om prisuppgifterna måste samlas in från många försäljningsställen eller tillverkare. Man begränsar sig då till ett urval av försäljningsställen respektive tillverkare. På grund av att urval används kan både slumpmässiga och systematiska fel uppstå. Dessutom kan mätproblemen vara svåra. Exempelvis kan en prisökning på en vara till en viss del bero på en kvalitetsförbättring, medan ett prisindex endast skall mäta prisförändringar för samma kvalitet. En kvalitetsförändring skall snarare uppfattas som en kvantitetsförändring. Detta gör att sammansatta index för stora varugrupper ingalunda är perfekta mått på det som de avser att mäta.

13.2.3 Fasta och löpande priser — deflatering

Om en tidsserie avseende prisuppgifter redovisas helt ojusterad för penningvärdessförändringar, dvs varje årsvärde anges i sitt års penningvärde, säger man att serien redovisas i löpande priser. Om uppgifterna däremot justeras för penningvärdets förändringar säger man att serien redovisas i fasta priser. Varje värde anges i ett visst års penningvärde, dvs i detta års priser. Proceduren att räkna om en prisserie från löpande priser till fasta priser kallas att deflatera.

Exempel 13.1 (fortsättning)

Prisuppgifterna i tabell 13.1 är uttryckta i löpande priser. Antag att vi nu vill räkna om dem till fasta priser uttryckta i 1988 års priser. Vi använder konsumentprisindex, KPI, för deflateringen. KPI mäter prisutvecklingen inom den del av ekonomin som utgörs av privat konsumtion. KPI är därför ett lämpligt mått på den prisutveckling som konsumenterna upplever och används ofta som deflator när man skall beräkna reallöner, realinkomster etc. I publikationer brukar KPI anges med basåret 1980, men för vår deflatering behöver vi basåret 1988. Vi måste därför först räkna om KPI till den nya basårets punkt. Detta sker på det sätt som redovisas i delavsnitt 13.2.1. Resultaten från basbytet redovisas i tabell 13.7.

Tabell 13.7 Konsumentprisindex

	1980	1988
Tidpunkt	=100	=100
1988	176.7	100
1989	188.1	106.5
1990	207.6	117.5
1991	227.2	128.6

Av tabellen framgår att konsumentpriserna har ökat med 6.5% från 1988 till 1989. Vi kan tolka detta som att penningvärdet har minskat med 6.5% vad beträffar konsumtionsvaror. I mars 1989 fick mjölkproducenten 3.83 för en liter mjölk. För att uttrycka detta i 1988 års penningvärde måste vi alltså reducera 3.83 med 6.5%, dvs producentpriset i mars 1989 uttryckt i 1988 års priser är $(3.83/106.5) \cdot 100 = 3.60$. På samma sätt räknas de övriga priserna

om till fasta priser. Resultaten från beräkningarna visas i tabell 13.8. Där framgår att producentpriset på mjölk har haft en reell minskning från 1988 till 1991. Vidare har konsumenterna drabbats av en reell prisökning, dvs prisökningen har varit kraftigare för mjölk än för totala konsumtionen.

Tabell 13.8 Producent- och konsumentpriser för mjölk i 1988 års priser

	Producent	Konsument
Tidpunkt	pris	pris
mars 1988	3.50	4.84
mars 1989	3.60	4.86
mars 1990	2.96	4.65
mars 1991	2.70	5.08

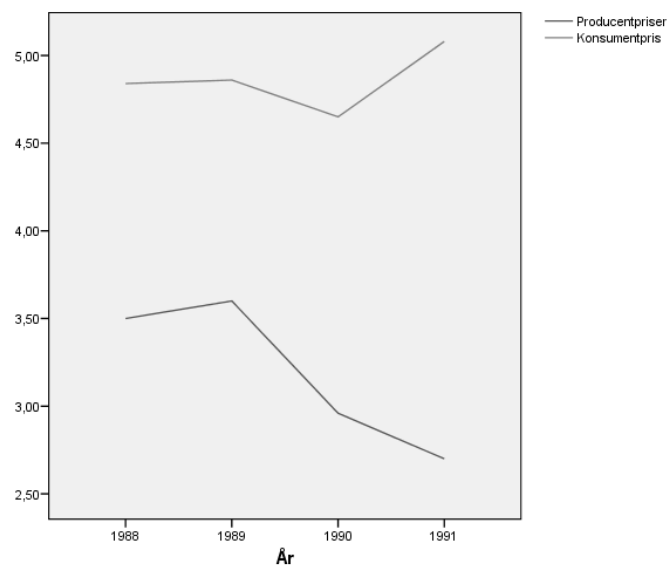
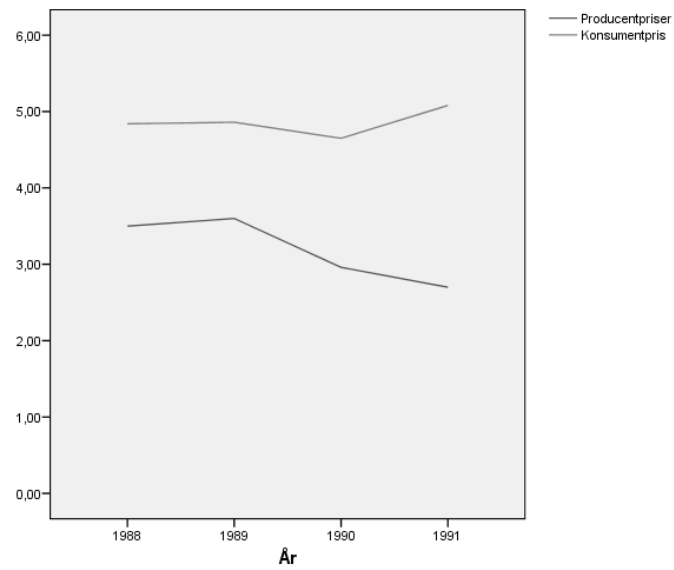
13.3 Grafisk framställning av tidsserier

Den grafiska framställningen av tidsserier syftar till att visa på utvecklingstendenser och sambandsmönster i serierna. Den grafiska framställningen är alltså en viktig del av arbetet med att analysera tidsserier. I detta avsnitt visar vi några exempel på konstruktion av tidsseriediagram.

En av de enklare diagramtyperna man kan rita för att illustrera en tidsserie är ett så kallat kurvdiagram. I kurvdiagrammet låter man den horisontella axeln representera tiden och den vertikala axeln representera den observerade variabeln. Variabelvärdena markeras med punkter i diagrammet och sammanbinds med rätta linjestycken. Skalorna på axlarna spelar en viktig roll, eftersom kurvornas lutning mer eller mindre medvetet förknippas med förändringar i variabeln. Likaså kan olika val av starttidpunkter ge figurer som framhäver eller maskerar vissa karaktäristika i tidsserien.

Exempel 13.1 (fortsättning)

I figur 13.3 visas ett kurvdiagram över producent- och konsumentpriserna på mjölk. Lägg märke till att man genom att stympa axlarna i diagrammet kan förstärka respektive dämpa intrycket om storleken i seriernas förändringar.



Figur 13.3 Kurvdiagram över producent- och konsumentpriser på mjölk

Kurvdiagram kan även användas för att grafiskt illustrera ett eventuellt samband mellan två tidsserier. Om två serier är beroende av varandra är förändringar i serierna på något sätt relaterade till varandra. Ett enkelt positivt beroende t.ex., tar sig uttryck i att båda variablerna ökar respektive minskar samtidigt. Ett sådant mönster låter sig väl illustreras i ett kurvdiagram. Även mer komplicerade beroendeförhållanden kan framgå ur ett kurvdiagram, t.ex. om det finns en viss tidsmässig eftersläpning i en av serierna innan den väntade effekten uppstår. Kurvdiagrammet kan även användas för att illustrera beroenden eller samband mellan fler än två tidsserier.

Om serierna har olika nivåer och olika skalor, är det oftast lämpligt att räkna om observationsserierna till indexserier och rita ett kurvdiagram över indexserierna. Speciella händelser kan markeras i ett kurvdiagram med t.ex. en pil i diagrammet vid den aktuella tidpunkten.

En annan alternativ diagramtyp som ofta används för att illustrera beroenden eller samband mellan tidsserier är punktdiagrammet som beskrivs i avsnitt 12.3. En fördel med ett punktdiagram är att det ofta är lättare att se en sambandsstruktur i ett sådant diagram än i ett kurvdiagram. En nackdel med punktdiagrammet jämfört med kurvdiagrammet är att informationen om tidsföljden mellan observationerna inte används.