11. DESKRIPTION — EN VARIABEL

11.1 Inledning

I detta och nästa två kapitel introduceras en enkel typ av dataanalys kallad deskription. Deskription innebär att mer informellt presentera en observerad empirisk fördelning eller att jämföra den med en teoretisk sannolikhetsfördelning. Det finns en stor spännvidd mellan olika ansatser till deskriptioner av datamaterial. Speciellt kan kopplingen till teorier om problemområdet vara mer eller mindre uttalat i olika ansatser. Självklart kan en deskription inte vara helt "teorilös". Redan valet av variabler, valet av jämförelser och valet av presentationssätt innebär ett teoribasrat ställningstagande.

Vi har tidigare konstaterat att empiriska fördelningar bildlikt motsvarar modellvärldens sannolikhetsfördelningar. De tabelleringstekniker och grafiska tekniker som kommer till användning vid deskription är därför nära släkt med motsvarande tekniker som används för att presentera och jämföra sannolikhetsfördelningar.

För att begränsa diskussionen berör vi endast några av de enklaste fallen. För de två först diskuterade fallen antar vi att observationerna är oberoende observationer på en eller flera stokastiska variabler. Detta kapitel behandlar det fall då vi gör oberoende observationer på en stokastisk variabel medan nästa kapitel behandlar det fall då vi gör oberoende observationer på flera stokastiska variabler. Antagandet om oberoende observationer är särskilt vanligt då materialet består av s k tvärsnittsdata, dvs uppgifter som avser flera olika individer vid samma tidpunkt eller samma tidsperiod. Däremot kan antagandet om oberoende observationer ofta ifrågasättas om materialet består s k tidsseriedata, d v s uppgifter som avser en följd av tidpunkter eller perioder. Kapitel 13 behandlar några metoder för att analysera en tidsmässig utveckling av en variabel. Detta fall kan ofta tolkas som observationer på en följd av beroende stokastiska variabler. Efter de tre deskriptionskapitlen påbörjas en diskussion om mer formell analys av data.

11.2 Tabeller

Det första steget i en statistisk analys av data består ofta i att sammanfatta datamaterialet i form av den empiriska fördelningsfunktionen eller i en empirisk frekvensfunktion. Dessa funktioner kan i sin tur redovisas och framställas på många olika sätt. Vanligen redovisas de empiriska funktionerna i form av tabeller och diagram. Det här avsnittet är ägnat åt att redovisa några enkla tabelleringsprinciper, medan avsnitt 11.3 ägnas åt den grafiska framställningen av empiriska fördelnings- och frekvensfunktioner.

Om variabeln är *kvalitativ* är det normalt inga problem att konstruera tabeller. Man anger helt enkelt hur många observationer som finns i varje klass (kategori). På så vis får vi en tabell som beskriver den empiriska frekvensfunktionen. En sådan tabell kallas en (empirisk) frekvenstabell. Om det t ex finns 35 arbetare, 10 tjänstemän och 5 försäljare på ett företag med 50 anställda får vi den empiriska frekvensfunktionen för variabeln personalkategori redovisad i den *envägsindelade frekvenstabellen* 11.1.

Tabell 11.1 Anställda fördelade på personalkategorier

Personalkategori	Antal
Arbetare	35
Tjänstemän	10
Försäljare	5
Summa	50

Tabell 11.1 innehåller *absoluta frekvenser* (antal). Variabelns fördelning kan också beskrivas med hjälp av *relativa frekvenser*. Relativa frekvenser beräknas genom att dividera frekvenserna i respektive kategori med totala antalet observationer. Detta visas i tabell 11.2. Observera här hur de relativa frekvenserna har egenskapen att de summerar till ett (100%) liksom fallet är för sannolikheter i sannolikhetsfördelningar.

Tabell 11.2 Anställda fördelade på personalkategorier

Personalkategori	Procent
Arbetare	70
Tjänstemän	20
Försäljare	10
Summa	100

Antal anställda: 50

Om antalet observationer som utgör basen för procentberäkningarna är litet, kommer varje observation att representeras av många procentenheter. En antalsmässigt liten skillnad mellan olika kategorier kan i sådana fall ge upphov till stora procentuella skillnader. När man redovisar en tabell med relativa frekvenser är det därför viktigt att även ange det totala antalet observationer.

Kategorierna hos en kvalitativ variabel har ingen naturlig ordning. De kan därför i princip anges i vilken ordning som helst i en frekvenstabell. Det är dock ofta lämpligt att ange kategorierna i fallande frekvensordning, dvs kategorierna med den högsta frekvensen anges först, därefter kategorin med den näst högsta frekvensen o s v.

Grundprincipen vid tabellering av kvantitativa variabler är liksom för kvalitativa variabler, att man redovisar den empiriska frekvensfunktionen i form av en envägsindelad frekvenstabell. Kvantitativa variabler har dock en naturlig ordning. Observationerna ordnas därför lämpligen i *storleksordning* så att frekvensen för det minsta värdet anges först, därefter frekvensen för det näst minsta värdet, o s v.

Det enklaste fallet av frekvenstabell får vi då variabern är diskret och endast antar ett fåtal värden. Ett exempel på detta är observationer på matematikbetyget i ett urval om 25 studenter. De observerade värdena är

5 4 1 4 4 3 2 3 3 3 4 2 3 1 3 3 5 4 2 2 2 4 3 5 3

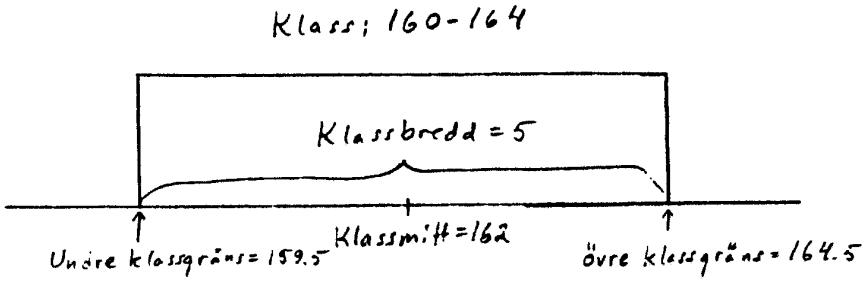
vars empiriska frekvensfunktion redovisas i tabell 11.3. I tabell 11.3 visas både de absoluta och de relativa frekvenserna, dvs tabellen är sammansatt av två envägsindelade frekvenstabeller.

Tabell 11.3 Fördelning av matematikbetyg hos 25 slumpvis utvalda studenter.

Betyg	Antal	Procent
1	2	8
2	5	20
3	9	36
4	6	24
5	3	12
Summa	25	100

Om variabeln är diskret och antar många värden eller om den är kontinuerlig delar man upp variationsområdet i ett lämpligt antal intervall eller *klasser*. Om t ex variabeln är kroppslängd och har mätts upp i hela centimetrar kan variationsområdet delas in i klasserna ..., 155-159 cm, 160-164 cm, 165-169 cm,... I modellvärlden är variabeln kroppslängd en kontinuerlig variabel så att vi kan tänka oss personer med en längd som faller mellan klasserna. T ex kan det finnas personer med en längd mellan 159 cm och 160 cm eller mellan 164 cm och 165 cm osv. Om avrundningarna vid mätningarna är gjorda så att värden mellan 159,5 cm och 160,0 cm höjs till 160 cm kommer klassen 160-164 cm inte att innehålla några längder som understiger 159,5 cm. Man säger då att klassens undre klassgräns är 159,5 cm. Om på samma sätt värden mellan 164,0 cm och 164,5 cm sänks till 160 cm kommer klassen 160-164 cm inte att innehålla längder som överstiger 164,5 cm. Klassens övre klassgräns är då 164,5 cm. Klasser som har en fixerad övre och en undre klassgräns kallas slutna klasser. Skillnaden mellan den övre och den undre klassgränsen kallas *klassbredden*. I vårt exempel med kroppslängder är klassbredden 5 cm för de klasser vi har diskuterat hittills. Om den fortsatta bearbetningen skall basera sig på det klassindelade materialet brukar man specifisera ett värde för varje klass som representant för klassen. Man väljer då ofta *klassmitten i* varje klass. Att arbeta enbart med klassmitter i stället för de enskilda observationerna innebär givetvis en smärre approximation som får vägas mot den förenkling man åstadkommer. Om observationerna inom respektive klass är någorlunda jämnt fördelade inom klassen är approximationsfelet i de flesta tillämpningar förhållandevis litet. I vårt exempel med kroppslängder ligger klassmitten för klassen 160-164 sålunda mitt emellan 159,5 cm och 164,5 cm, dvs 162 cm. Dessa begrepp illustreras i figur 11.1. En fullständig envägsindelad frekvenstabell över kroppslängdsmaterialet sedan

det klassindelats visas i tabell 11.4.



Figur 11.1 Principskiss över klassindelning.

Tabell 11.4 Kroppslängd hos 1000 värnpliktiga

Kroppslängd	Klassgränser	Klassmitt	Antal
-154	-154.5		3
155 - 159	154.5-159.5	157	32
160 - 164	159.5-164.5	162	83
165 - 169	164.5-169.5	167	113
170 - 174	169.5-174.5	172	233
175 - 179	174.5-179.5	177	294
180 - 184	179.5-184.5	182	167
185 - 189	184.5-189.5	187	52
190 - 194	189.5-194.5	192	21
195-	194.5-		2

Vi lägger här märke till att tabellen innehåller två öppna klasser, dvs endast en klassgräns är fixerad. Öppna klasser används då det inte finns någon naturlig övre eller undre klassgräns. Givetvis finns det ingen klassmitt i öppna klasser och det är inte heller trivialt att hitta någon annan representant för en öppen klass. Både avsaknaden av klassrepresentant och en klassgräns i öppna klasser kan medföra tolkningsproblem.

Tabell 11.5 Kroppslängd hos 1000 värnpliktiga

Kroppslängd	Klassgränser	Klassmitt	Antal
-159	-159.5		35
160-169	159.5-169.5	165	196
170-174	169.5-174.5	172	233
175-189	174.5-189.5	182	513
190-	189.5-		23

I tabell 11.5 redovisas en frekvenstabell över kroppslängdsmaterialet, men nu basedad på en annan klassindelning. Vi lägger här märke till att tabellerna 11.4 och 11.5 ger två olika bilder av samma fördelning och att denna skillnad beror på att variabeln har klassindelats på två olika sätt. Valet av klassantal och klassgränser kräver eftertanke och gott omdöme. Då man väljer klassantal måste man bland annat kompromissa mellan de motstridiga kraven

i) mycket information kräver många klasser och ger svårläst tabell

ii) lättläst tabell kräver få klasser och ger lite information

I vissa situationer kan man välja klassgränser så att man får lika breda klasser medan det i andra situationer är lämpligare med olika breda klasser. Då man t ex studerar åldersfördelningar kan det ofta vara lämpligt att använda åldersklasserna 0-6 år, 7-15 år, 16-64 år och över 65 år. Det viktigaste kravet, som vi aldrig får rucka på, är att utforma tabellerna så att de ger den information som är relevant för undersökningsproblemet.

Alla tabeller i detta avsnitt har varit *frekvenstabeller*. Gemensamt för sådana tabeller är att de består av en *summa* (här frekvenser eller relativa frekvenser) som har delats upp i ett antal delposter.

11.3 Grafisk framställning

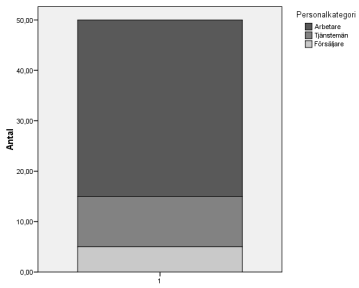
I detta avsnitt presenterar vi några enkla principer för att grafiskt redovisa empiriska frekvens- och fördelningsfunktioner. Den grafiska framställningen är i form av diagram vars syfte i första hand är att förmedla ett helhetsintryck av den empiriska fördelningen. Liksom vid tabellkonstruktionen är det viktigt att skilja mellan olika typer av variabler även vid diagramkonstruktion.

Kvalitativa variabler illustreras som regel med *ytdiagram* bestående av geometriska figurer såsom rektanglar, kvadrater eller cirklar. I ytdiagrammet låter man ytan av de geometriska figurerna svara mot frekvenserna. Vi berör här två typer av ytdiagram för kvalitativa variabler, nämligen *stapeldiagram* och *cirkeldiagram*.

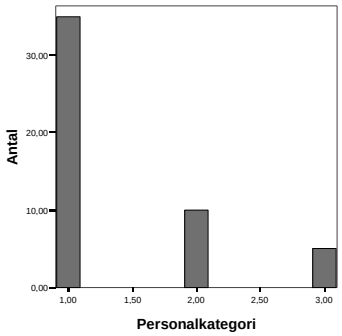
Staplarna i ett stapeldiagram kan uppdelas eller grupperas. Då man använder uppdelade staplar svarar stapelns hela area mot hela materialet. Stapeln delas sedan in så att de olika delarnas areor svarar mot de olika kategoriernas frekvenser. Då man använder grupperade staplar får varje kategori sin egen stapel vars area svarar mot kategoriernas frekvens. Eftersom staplarna är lika breda blir arean proportionell mot staplarnas höjd, dvs stapelns höjd får representera frekvensen. I figur 11.2 visas exempel på en uppdelad stapel och på grupperade staplar för ett datamaterial i föregående avsnitt.

Principen för *cirkeldiagrammet* är att en cirkel delas upp i olika cirkelsektorer och arean av varje sektor svarar mot frekvensen för en kategori. Om exempelvis en kategori omfattar 70% av materialet (som för kategorin "Arbetare" i exemplet ovan), blir medelpunktsvinkeln $0.70 \cdot 360 = 252$ grader för motsvarande sektor. I figur 11.2 c visas ett exempel på ett cirkeldiagram.

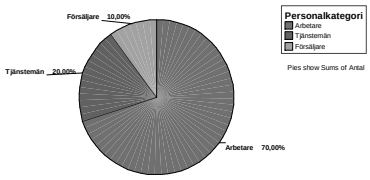
De grundläggande reglerna för diagramritning kan utvidgas och varieras på en mängd olika sätt. T ex kan diagrammen bli mer tilltalande och få en ökad slagkraft om de ritas i tre dimensioner i stället för två. Om man använder en tredje dimension måste man dock komma ihåg att frekvenserna då svarar mot volymer av olika geometriska figurer och att det kan vara svårt att uppfatta storleksförhållanden mellan olika figurer. Även om denna diagramtyp kan sägas ha ett tilltalande utseende bör man alltså göra klart för sig att läsaren relativt sett har svårare för att göra direktavläsningar i ett sådant diagram.



a) Uppdelad stapel



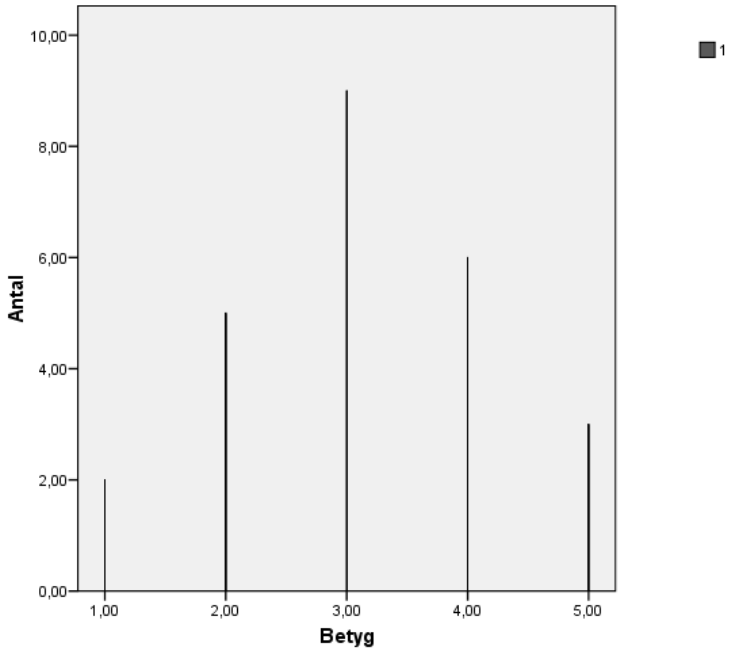
b) Grupperade staplar



c) Cirkeldiagram

Figur 11.2 Anställda fördelade på personalkategorier

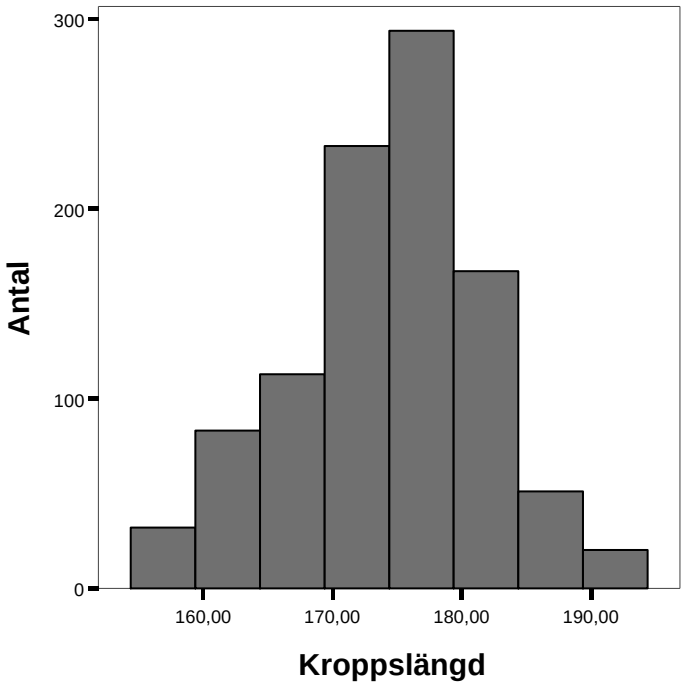
Om variabeln är diskret och endast antar ett fåtal variabelvärden, använder man ett *stolpdiagram* för att illustrera den empiriska frekvensfunktionen. För varje variabelvärde finns en stolpe vars höjd är proportionell mot variabelvärdets frekvens. I figur 11.3 visas ett stolpdiagram över fördelningen av matematikbetyg hos 25 slumpvist valda studenter i tabell 11.3.



Figur 11.3 Matematikbetyget hos 25 slumpvist valda studenter. Stolpdiagram.

Om undersökningsvariabeln är klassindelad åskådliggörs den empiriska frekvensfunktionen med ett *histogram*. I ett histogram representeras varje klass av en stapel vars area är proportionell mot frekvensen i klassen och vars bas motsvaras av klassbredden. I figur 11.4 visas ett histogram för den empiriska fördelningen för variabeln kroppslängd enligt tabell 11.4. Förutom de två öppna klasserna har alla klasserna samma klassbredd. Det medför att stolparna får lika bredd och därmed blir staplarnas höjder proportionella mot klassfrekvenserna. De öppna klassernas frekvenser markeras med streckade linjer. Lägg också märke till att variabelaxeln är stympad. Stympningen

görs av utrymmesskäl och våglinjen markerar att skalan inte utgår från noll.



Figur 11.4 Kroppslängd hos 1000 värnpliktiga. Histogram.

När materialet är indelat i klasser med olika bredder, blir det mer komplicerat att konstruera histogram. För att efterlikna sannolikhetsfördelningens täthetsfunktion konstrueras histogrammets staplar så att arean för en klass är proportionell mot frekvensen i klassen och stapelns bas är proportionell mot klassbredden. Om en klass är bredare, måste stapelhöjden därför minskas. Oavsett vilken klass en observation hamnar i skall den representeras av en viss area i histogrammet. Den area som representerar en observation skall dessutom vara lika stor för alla observationer.

I figur 11.5 visas ett exempel på ett histogram med olika klassbredder. Histogrammet är baserat på kroppslängdsmaterialet med klassindelningen i tabell

11.5. Eftersom arean av en stapel skall vara proportionell mot frekvensen och arean är lika med stapelns höjd multiplicerad med stapelns bredd, följer det att stapelns höjd skall vara proportionell mot frekvensen dividerad med stapelns bredd. Vidare vet vi att stapelns bredd skall vara proportionell mot klassbredden. För t ex klassen 160-169 cm är frekvensen 196 och klassbredden är 10. Höjden på motsvarande stapel skall således vara proportionell mot 196/10=19,6.

I ett histogram med olika klassbredder kan frekvenserna inte avläsas på den lodräta axeln. I stället kan man ange klassfrekvenserna inom eller över respektive stapel. Även om klassfrekvenserna skrivs ut i diagrammet skall man hålla i minnet att ett histogram med olika klassbredder är svårtolkat och bör därför användas mycket sparsamt.

Figur 11.5 Kroppslängd hos 1000 värnpliktiga. Histogram.

I ett stam och löv diagram presenteras data i en histogramliknande figur, samtidigt som observationernas värden också redovisas. När ett stam och löv diagram konstrueras delas först varje observation i två delar, stammen och lövet. T ex kan man dela varje observation vid decimalkommat, vid tiotalen etc. Stammen är den del som finns till vänster om delningspunkten och lövet är den del som finns till höger om delningspunkten. Observationer på kroppslängd kan vara lämpliga att dela vid tiotalen. Observationen 168 cm delas då så att 16 är stammen och 8 är lövet.

I stam och löv diagrammet representeras varje förekommande värde på stammen av en rad. På respektive rad skrivs sedan värdena på motsvarande löv. På så vis bildar stammarna en klassindelning och antalet löv bildar frekvenser. Genom att lövens värde skrivs ut ser man dessutom de olika observationernas värden. Ett stam och löv diagram presenterar därför materialet delvis i tabellform och delvis i diagramform.

I figur 11.6 redivisas ett stam ovh löv diagram för följande delmängd av kroppslängdsmaterialet:

172 178 168 185 166 192 176 178 166 171 182 188

För att underlätta avläsningen av storleken på observationerna bör man till diagrammet lägga till en uppgift om lövstorleken och hur stam och löv skall kombineras för att återfå observationsvärdena.

Frekvens	Stam	Löv
3	16	668
5	17	12688
3	18	258
1	19	2

Figur 11.6 Kroppslängd hos 12 värnpliktiga. Stam och löv diagram

11.4 Lägesmått och kvartiler

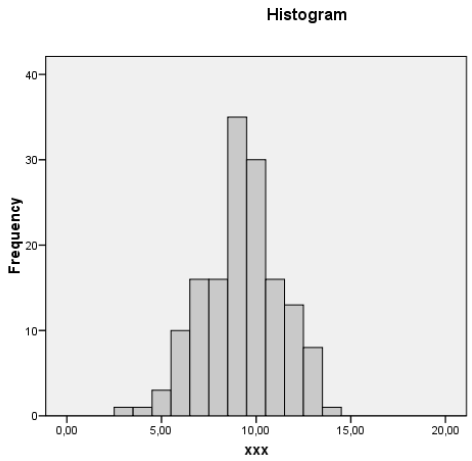
På samma sätt som sannolikhetsfördelningar kan karaktäriseras och beskrivas av olika mått kan vi karaktärisera och beskriva empiriska fördelningar med olika mått. I det här avsnittet presenteras några lägesmått och kvartiler för empiriska fördelningar medan nästa avsnitt ägnas åt några spridningsmått för empiriska fördelningar. Syftet med ett lägesmått är att ange storleksordningen eller något slags "genomsnittsmått" på observationerna. I figur 11.7 visas två histogram som har lika breda och lika många klasser samt lika stora frekvenser i respektive klass, men klassmitterna är större i det ena materialet än i det andra. För materialet med mindre värden på klassmitterna har vi också ett mindre värde på lägesmåttet och vice versa. De lägesmått vi beskriver här är medelvärdet och medianen.

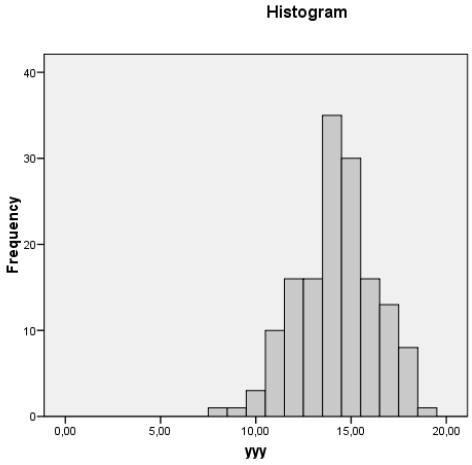
Medelvärdet är det vanligaste lägesmåttet. För ett material bestående av n stycken mätvärden x_1, x_2, ...x_n, beräknas medelvärdet $\bar{x}$ genom

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

I exemplet med matematikbetygen i avsnitt 11.1 är medelbetyget för de 25 studenterna

$$\bar{x} = \frac{5 + 4 + \ldots + 3}{25} = \frac{78}{25} = 3.12$$





Figur 11.7 Histogram för två fördelningar med olika lägesmått

Medianen delar in ett observationsmaterial i två lika stora delar så att hälften av mätvärdena är mindre än eller lika med medianen och hälften av mätvärdena är större än eller lika med medianen.

Medianen lämpar sig väl som ett lägesmått. Om antalet observationer är

udda är medianen det mittersta mätvärdet av de rangordnade mätvärdena. Om antalet är jämnt brukar man låta medianen vara medelvärdet av de två mittersta mätvärdena. I exemplet med matematikbetygen för de 25 studenterna är medianbetyget 3.

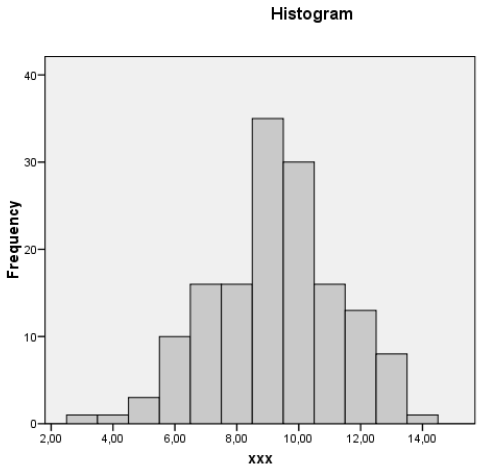
Om materialet är symmetriskt kring medelvärdet sammanfaller medelvärdet och medianen. Om däremot materialet är skevt påverkas medelvärdet mer av extremvärdena i svansen av fördelningen varför medelvärde och median blir olika stora. Se figur 11.8 för en illustration.

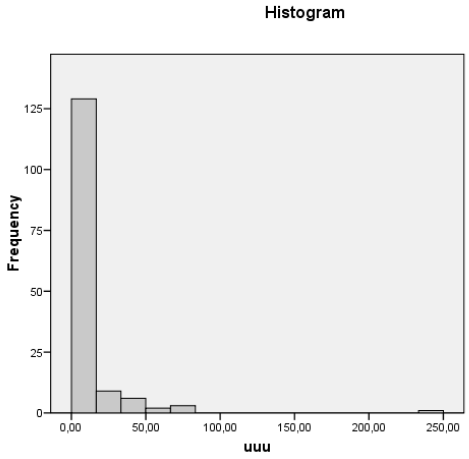
De tre kvartilerna delar in ett observationsmaterial i fyra (ungefär) lika stora delar. Ungefär 25% av mätvärdena skall vara mindre än första (nedre) kvartilen. I betygsmaterialet är antalet observationer 25 så att $0.25 \cdot 25 = 6.25$ mätvärden skall vara mindre än första kvartilen. Eftersom vi inte kan dela hela observationer är den första kvartilen det 7:e mätvärdet i det rangordnade materialet. I vårt fall är det mätvärdet 2. Om antalet observationer vore 24 skulle första kvartilen vara medelvärdet av det 6:e och det 7:e rangordnade mätvärdet (ty $0.25 \cdot 24 = 6$).

Den andra kvartilen delar in observationsmaterialet i två lika stora delar och sammanfaller därför med medianen. Ungefär 75% av mätvärdena skall vara mindre än tredje (övre) kvartilen. För att bestämma tredje kvartilen i betygsmaterialet ser vi först att $0.75 \cdot 25 = 18.75$, dvs tredje kvartilen är det 19:e mätvärdet i det rangordnade materialet. I vårt exempel med betyg är det 4.

På motsvarande sätt kan man beräkna deciler och percentiler som delar ett material i 10 respektive 100 (ungefär) lika stora delar.

Avslutningsvis poängterar vi att olika lägesmått ger olika karaktäriseringar av en fördelning. Detta är åter ett uttryck för att olika sätt att bearbeta ett material kan ge olika bild av materialet. På samma sätt som att en bearbetningsmetod inte kan sägas vara riktig eller felaktig, men däremot mer eller mindre lämplig med tanke på undersökningsproblemet, kan man inte säga att ett visst lägesmått är riktigt eller felaktigt, men väl mer eller mindre lämpligt för ett visst syfte.





Figur 11.8 Två histogram som illusterar effekten av sneda fördelningar på medelvärde och median. I a) är $\overline{x} = 9,25$ $m = 9,00$ och i b) är $\overline{x} = 8,79$ $m = 1,00$

11.5 Spridningsmått

Syftet med ett spridningsmått är att ange hur mycket mätvärdena avviker från varandra eller från ett lägesmått. Ett spridningsmått ger således information om hur stort område mätvärdena är spridda över eller, alternativt, över hur stort område den empiriska fördelningen breder ut sig. I figur 11.9 visas två histogram för empiriska fördelningar med samma lägesmått men med olika spridningsmått.

De spridningsmått som behandlas här är variationsvidden, kvartilavvikelsen och standardavvikelsen.

Variationsvidden definieras, såsom namnet anger, som skillnaden mellan det största och det minsta mätvärdet. I exemplet med matamatikbetygen är det största mätvärdet 5 och det minsta 1, så att variationsvidden är 5-1=4.

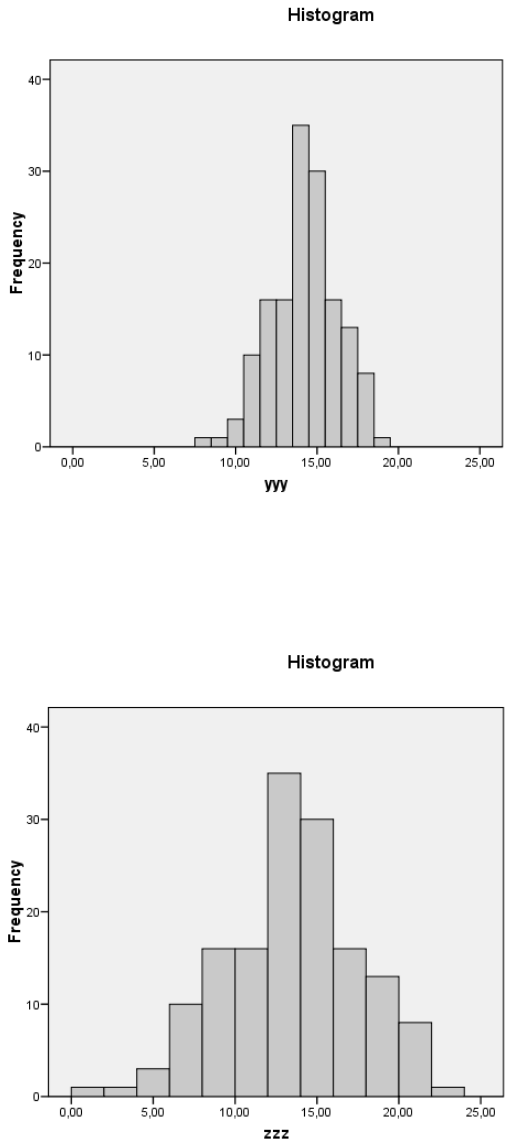
Kvartilavvikelsen beskriver hur mycket kvartilerna i genomsnitt avviker från medianen bortsett från tecken.

$$\text{Kvartilavvikelsen} = \frac{\text{tredje kvartilen} - \text{första kvartilen}}{2}$$

Denna definition kan motiveras på följande sätt. Vi kan använda första kvartilen som ett lägesmått för den hälft av mätvärden som är mindre än medianen. Följaktligen representerar skillnaden mellan första kvartilen och medianen dessa mätvärdens avvikelse från medianen. För den hälft av mätvärden som är större än medianen kan vi på samma sätt använda skillnaden mellan medianen och tredje kvartilen som ett mått på dessa observationers avvikelse från medianen. Bildar vi nu medelvärdet av dessa två avvikelser får vi

$$\frac{(\text{medianen} - \text{första kvartilen}) + (\text{tredje kvartilen} - \text{medianen})}{2}$$

$$= \frac{\text{tredje kvartilen} - \text{första kvartilen}}{2} = \text{kvartilavvikelsen}$$



Figur 11.9 Histogram för två fördelningar, en med liten och en med stor spridning

För de 25 matemetikbetygen är första kvartilen = 2 och tredje kvartilen = 4. Kvartilavvikelsen är därför $(4 - 2)/2 = 1$.

Det vanligaste spridningsmåttet är standardavvikelsen. Den anger hur mycket mätvärdena i genomsnitt avviker från medelvärdet, bortsett från tecken. (Detta genomsnitt är ett så kallat kvadratiskt medelvärde för avvikelserna.) Ofta betecknas standardavvikelsen med s.

Antag att vi har n stycken mätvärden x_1, x_2, ..., x_n med medelvärdet $\bar{x}$. Då definieras standardavvikelsen av

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2}$$

För de 25 observationerna på matematikbetyg får vi att

$$s = \sqrt{\frac{1}{25-1}\left((5-3.12)^2 + (4-3.12)^2 + \ldots + (3-3.12)^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{30.64}{24}} = \sqrt{1.28} = 1.13.$$

Kvadraten på standardavvikelsen, s^2, kallas (urvals-) variansen.

Ibland förekommer formler för s och s^2 där man dividerar med n i stället för $n-1$. Här använder vi huvudsakligen den definition där man dividerar med $n-1$.

Vi introducerar nu en användbar olikhet kallad Tchebysheff's olikhet. Även om olikheten är enkel att bevisa utesluter vi beviset här.

Tchebysheff's olikhet: Låt k vara ett tal större än eller lika med ett. Då är proportionen observationer i intervallet från $\overline{x} - ks$ till $\overline{x} + ks$ minst $1 - 1/k^2$.

Som en illustration av tillämpningen av Tchebysheff's olikhet kan vi ta $k = 1.5$. Vi får då att minst $1 - 1/1.5^2 \approx 0.56$ % av observationerna i ett datamaterial ligger i intervallet från $\overline{x} - 1.5s$ till $\overline{x} + 1.5s$. I exemplet med matematikbetyg innebär det att minst 56% av observationerna ligger

mellan $3.12 - 1.5 \cdot 1.13 = 1.425$ och $3.12 + 1.5 \cdot 1.13 = 4.815$. En inspektion av materialet ger vid handen att 20 observationer, dvs 20/25=80% ligger i det givna intervallet.

Låter vi $k = 2$ får vi på samma sätt att minst $1 - 1/2^2 = 3/4 = 75\%$ av observationerna ligger mellan $\overline{x} - 2s$ och $\overline{x} + 2s$. Vidare får vi att minst $1-1/3^2 = 8/9 \approx 88.9\%$av observationerna ligger mellan $\overline{x}-3s$ och $\overline{x}+3s$. För materialet med matematikbetyg ligger samtliga observatuioner i båda dessa intervall. Gränserna i Tchebysheff's olikhet understiger således de faktiska proportionerna med bred marginal i detta exempel. Så är fallet också i allmänhet. Man säger att gränserna i Tchebysheff's olikhet är konservativa. En anledning till att Tchebysheff's olikhet är "försiktig" i sina uttalanden är att olikheten gäller för alla empiriska fördelningar, hur de än ser ut.

Om datamaterialets fördelning liknar normalfördelningen brukar man ibland använda normalfördelningens egenskaper för att approximera proportionen observationer i ett intervall. Detta leder till den s k Empiriska regeln:

Empiriska regeln: Om datamaterialets fördelning liknar normalfördelningen så innehåller intervallet

från $\overline{x} - s$ till $\overline{x} + s$ ungefär 68% av observationerna

från $\overline{x} - 2s$ till $\overline{x} + 2s$ ungefär 95% av observationerna

från $\overline{x} - 3s$ till $\overline{x} + 3s$ nästan alla observationer.

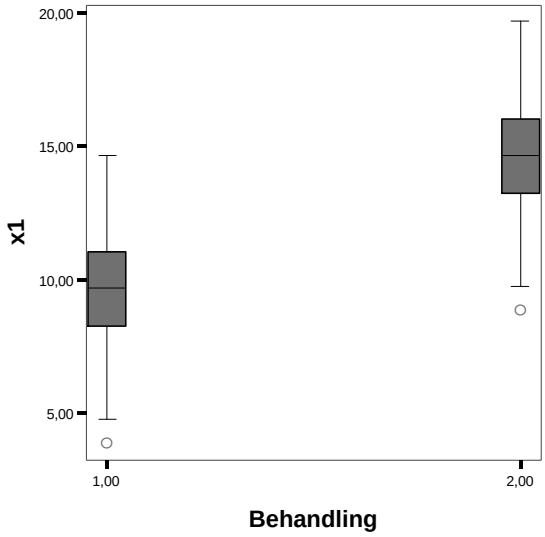
Observera att Empiriska regeln endast är en approximation och att approximationen kan förväntas vara god endast under förutsättning att den empiriska fördelningen verkligen liknar normalfördelningen.

11.6 Box plotdiagrammet

Box plotdiagrammet är en diagramtyp som syftar till att illustrera läges och spridningsmått för en empirisk fördelning samt i detalj beskriva fördelningens "svansar", d.v.s. hur de minsta och de största observationsvärdena förhåller sig till de övriga observationsvärdena. Figur 11.9 visar ett exempel på en box plot. I centrum av figuren finns en "låda" (box) som begränsas av första

och tredje kvartilerna. Lådans längd blir därmed lika med kvartilavståndet, d v s två gånger kvartilavvikelsen. Därigenom representerar lådans längd ett spridningsmått. I lådan markeras även medianen som ett lägesmått.

Lådan i en box plot markerar således värdena hos 50% av observationerna. Vidare vet vi att 25% av observationerna har värden som ligger över lådan och 25% av observationerna har värden som ligger under lådan. Dessa observationers värden markeras särskillt i box plotdiagrammet. Vi identifierar först observationer som avviker mer än 1.5 gånger kvartilavvikelsen från någon av kvartilerna. Det största respektive det minsta observerade värdet som avviker mindre än 1.5 gånger kvartilavståndet från undre respektive övre kvartilen markeras med ett streck och en linje in till lådan. Observationer som avviker mellan 1.5 och 3 gånger kvartilavvikelsen från undre respektive övre kvartilen markeras med "o" och observationer som avviker mer än 3 gånger kvartilavståndet från övre respektive undre kvartilen markeras med "*". Dessa typer av observationer kallas ibland något oegentligt för outliers respektive extremvärden. Dessa observationer kan ha ett stort inflytande på samplemedelvärdet och samplevariansen samt på resultaten från mer sofistikerade analyser av datamaterialet. Det är därför viktigt att identifiera vilka observationer som hamnar i dessa grupper samt att försöka förklara varför de avvilker så kraftigt från medianen. Ofta är det helt naturligt att en del observationer avviker så pass kraftigt som t ex tre gånger kvartilavståndet från en kvartil, eller mer. Många gånger är det dock ett mätfel eller ett skrivfel som ligger bakom ett sådant mätvärde. Om så är fallet måste det felaktiga värdet korrigeras eller, om det inte är möjligt, i värsta fall uteslutas. En annan förekommande anledning till avvikande mätvärden är att observationerna har gjorts under speciella betingelser. Antingen tillhör då individerna som observationerna är gjorda på inte den studerade populationen eller så tillhör de en speciell delmängd av populationen. Det senare fallet är ofta mycket intressant eftersom det antyder ett samband mellan mätvärdenas storlek och de speciella betingelser som definierar den delmängd av populationen som individen tillhör.



Figur 11.9 Ett exempel på en box plot