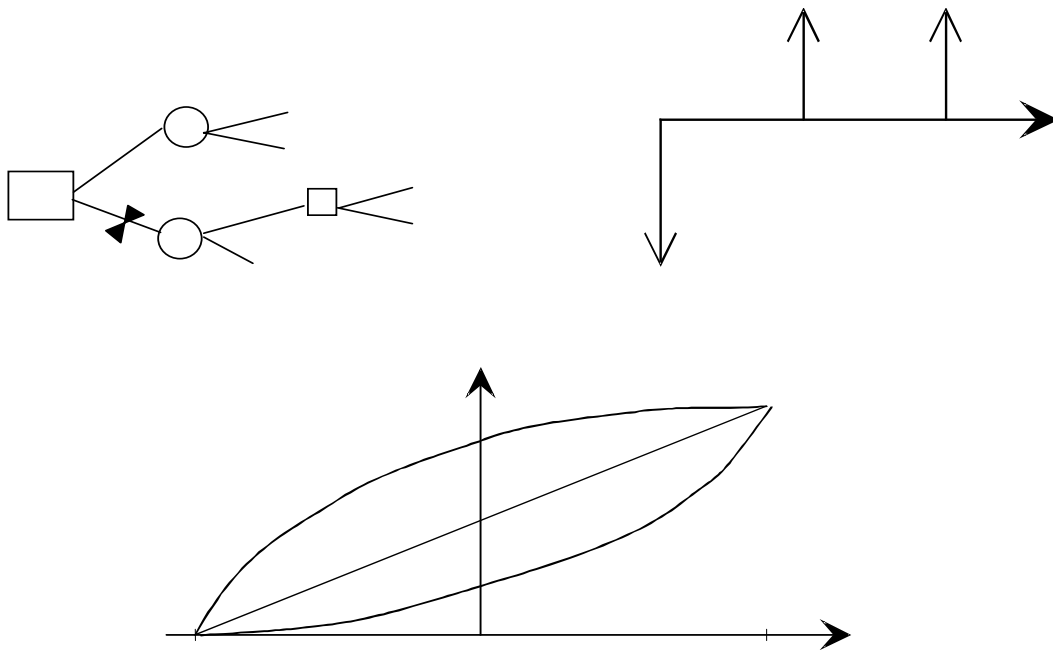


EXEMPELSAMLING



TPPE 24

Ekonomisk analys: Besluts- och finansiell metodik

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

BESLUTSTEORI.....	1
<i>Elementära normalformsproblem</i>	<i>1</i>
<i>Beslutskriterier</i>	<i>7</i>
<i>Beslutsproblem på extensiv form</i>	<i>9</i>
<i>Strategibegreppet och transformationer till normalform</i>	<i>13</i>
SPELTEORI	15
<i>Nollsummespel</i>	<i>15</i>
<i>Icke Konstantsummespel</i>	<i>19</i>
NYTTOTEORI	35
<i>Nyttofunktioner.....</i>	<i>35</i>
<i>Riskdelning.....</i>	<i>45</i>
INVESTERINGSTEORI.....	50
<i>Grundläggande begrepp</i>	<i>50</i>
<i>Lönsamhetsberäkningar med NPV-metoden.....</i>	<i>50</i>
<i>Andra metoder för lönsamhetsberäkningar</i>	<i>51</i>
<i>Real och nominell kalkyl med skatt och inflation.....</i>	<i>57</i>
<i>Utbyteskalkylering.....</i>	<i>64</i>
<i>Kedjeinvesteringar</i>	<i>68</i>
<i>Kontinuerliga betalningsflöden och räntor.....</i>	<i>70</i>
LÖSNINGAR	73
<i>Beslutsteori.....</i>	<i>73</i>
<i>Spelteori</i>	<i>87</i>
<i>Nyttoteori.....</i>	<i>120</i>
<i>Investeringssteori.....</i>	<i>130</i>

BESLUTSTEORI**Elementära normalformsproblem**

Uppgift B.5

En affärsinnehavare i dammodebranschen överväger hur många enheter av en viss mycket säsongbetonad vara han skall beställa från sin leverantör till den instundande säsongen. Leverantören kan endast ta emot order före säsongens början. På grundval av tidigare erfarenhet bedömer affärsinnehavaren den sannolika efterfrågan till

Efterfrågan	Sannolikhet för efterfrågan
10	0,4
20	0,3
30	0,2
40	0,1

Inköpspriset är 50 kronor per enhet och försäljningspriset avses bli 100 kronor per enhet. Alla vid säsongens slut överblivna enheter säljes på realisation för 30 kronor per enhet. Affärsinnehavaren räknar inte med någon bristkostnad.

- Hur många enheter bör inköpas?
- Hur mycket är affärsinnehavaren villig att högst betala för att erhålla fullständig information om den kommande efterfrågan?

Uppgift B.6

En idrottsarrangör överväger om han skall ta en regnförsäkring för sitt evenemang eller ej. Han kan försäkra enligt följande alternativ:

- Alt 1. Utfall 11 000 kronor om det regnar 1-5.99 mm under evenemanget. Försäkringen kostar 1 000 kronor.
- Alt 2. Utfall 11 000 kronor om det regnar 1-9.99 mm under evenemanget. Försäkringen kostar 3 000 kronor.
- Alt 3. Utfall 11 000 kronor om det regnar 1 mm eller mer under evenemanget. Försäkringen kostar 6 000 kronor.

Arrangören bedömer sannolikheten för regn under arrangemanget enligt följande:

mindre än 1 mm regn	$p = 0.4$
1-5.99 mm regn	$p = 0.3$
1-9.99 mm regn	$p = 0.5$
1 mm regn eller mer	$p = 0.6$

Regn kommer att medföra minskade intäkter enligt följande av arrangören gjorda bedömning:

mindre än 1 mm regn	0 kronor
1-5.99 mm regn	2 000 kronor
6-9.99 mm regn	5 000 kronor
10 mm regn eller mer	9 000 kronor

- a) Bör arrangören försäkra och i så fall enligt vilket alternativ?
- b) Hur stor får kostnaden högst vara för alt 3 för att det skall vara fördelaktigast för arrangören att försäkra enligt detta alternativ?

Uppgift B.7

En företagare bedömer den sannolika efterfrågan av en säsongbetonad vara till:

Efterfrågat antal	Sannolikhet
20	0,4
30	0,3
40	0,3

Beställningarna till den kommande säsongen måste göras i god tid före säsongens början. Inköpspriset blir 10 kronor/enhet om beställningen omfattar mindre än 25 enheter och 9 kronor/enhet om beställningen omfattar 25 eller flera enheter. Företagaren kommer att sälja varan vidare för 15 kronor/enhet. Vid säsongens slut realiseras kvarvarande varor för 7 kronor/enhet.

- Hur många enheter av varan bör inköpas?
- Skulle det vara fördelaktigare att övergå till en annan inköpskälla, där företagaren gör sina inköp kontinuerligt under säsongens gång och på så sätt undviker att få enheter kvar vid säsongslutet? Inköpspriset blir i detta fall 11 kronor/enhet.
- Visa hur val av inköpskälla och inköpt antal enheter varierar med försäljningspriset.

Uppgift B.9

En äldre julgransförsäljare är sysselsatt med att planera sin verksamhet inför den stundande helgen. Han kan välja mellan två inköpskällor. Han kan antingen köpa granar från en grossist eller från en lantbrukare i Småland. Grossisten tar 9 kr per gran och levererar dem kostnadsfritt vid önskad plats i Stockholm. Lantbrukaren tar 6 kr per gran, men då måste köparen betala frakten Småland-Stockholm. Denna kostar enligt offert från en åkare 500 kr.

Försäljaren räknar med att i genomsnitt få 12 kr för varje gran han säljer före julafton. Priset på julafton är obekant. Antag att priset på julafton är a kr/st. Eventuellt kan försäljaren åläggas en bortforslingsavgift.

Den vinstmaximerande försäljaren har 50 års erfarenhet av julgransförsäljning på det ställe, där han håller till. Ingen bestämd tendens till upp- eller nedgång i efterfrågan har kunnat förmärkas under denna tid. Hans försäljning före julafton olika år, vilken beror bl a på antal konkurrenter, framgår nedan:

Försäljning granar	antal år
225	10
250	20
275	15
300	5

- Vilken inköpskälla bör julgransförsäljaren anlita?
- För alla värden på a , hur många granar bör han köpa?
- Antag nu att priset på julafton är 5 kr/st. Hur stor är försäljningens förväntade vinst under säkerhet?
- Hur stort är värdet för försäljaren av fullständig information om efterfrågans storlek? Antag fortfarande att priset på julafton är 5 kr/st.

(720602)

Uppgift B.10

En sporthandlare som på grund av det vackra vädret under skidsäsongen sålt slut på sina skidor överväger nu hur många par skidor han skall skicka efter från sin leverantör för att täcka den efterfrågan som alltid brukar uppstå i samband med påsken. Leverantörens pris är 50 kronor per skidpar och sporthandlaren pris över disk är 75 kronor. Leverantören levererar endast hela 10-tal (10, 20,... etc) skidpar. Sporthandlaren uppskattar den sannolika efterfrågan för den kvarvarande delen av säsongen till

- 5 skidpar med sannolikheten 0.2
 - 15 skidpar med sannolikheten 0.5
 - 25 skidpar med sannolikheten 0.3
- a) Bör sporthandlaren under den innevarande skidsäsongen beställa fler skidor från leverantören och i så fall hur många? Det förutsätts att vid säsongens slut kvarvarande skidor realiserar till ett pris av 25 kronor per par.
- b) Sporthandlaren kalkylerar dessutom med en bristkostnad (x) för varje efterfrågat skidpar han ej kan sälja. Visa hur antalet skidpar som sporthandlaren bör beställa från sin leverantör varierar med bristkostnadens storlek, då x kan anta alla positiva värden.

(721111)

Uppgift B.13

En biluthyrningsfirma, Hyrbil AB, i X-stad vill veta hur många egna bilar man skall ha för att maximera sin förväntade vinst. Hyrbil AB kan tillgodose efterfrågan på hyrbilar enligt nedanstående alternativ och genomsnittskostnader.

- Egna bilar kostar 50 kr/dag och bil.
- Högst 2 bilar kan skaffas från filialer till Hyrbil AB till en kostnad av 70 kr/dag och bil.
- Bilar kan hyras av konkurrenter till en kostnad av 100 kr/dag och bil.
- Den genomsnittliga intäkten per uthyrd bil är 110 kr/dag.

Från senaste året finns följande statistik över antalet uthyrda bilar per dag:

<u>Antal bilar</u>	<u>Antal dagar</u>
10	60
11	100
12	50
13	50
14	40

Bestäm antal egna bilar Hyrbil AB bör ha för maximal förväntad vinst.

(780906)

Beslutskriterier

Uppgift B.15

Matrisen visar beslutsfattaren A:s förlust vid spel mot slumpen (S).

	S1	S2	S3	S4
A1	10	5	2	18
A2	8	8	8	10
A3	2	11	19	2

- Vilket handlingsalternativ väljer beslutsfattaren om han använder minimaxregret-kriteriet (Savage-kriteriet)?
- Vilket handlingsalternativ väljer beslutsfattaren om han använder maximin-kriteriet (Wald-kriteriet)?
- Vilket handlingsalternativ väljer beslutsfattaren om han använder "*the principle of insufficient reason*" (Laplace-kriteriet)?
- Vilket handlingsalternativ väljer beslutsfattaren om han använder Hurwicz-kriteriet med pessimistkoefficienten 0.4?

Uppgift B.17

Nedanstående tabell visar beslutsfattaren B:s vinst vid spel mot naturen (slumpen) S. Beslutsfattarens strategier är B1, B2 och B3. De tänkbara utfallen för naturen är S1, S2 och S3.

	S1	S2	S3
B1	x	10	15
B2	8	12	12
B3	14	12	8

- Vilken strategi väljer beslutsfattaren vid användandet av Laplace-kriteriet?
- Vilken strategi väljer beslutsfattaren vid användandet av maximax-kriteriet?

- c) Vilken strategi väljer beslutsfattaren vid användandet av Hurwicz-kriteriet med optimistkoefficienten 0.5?

(721111)

Uppgift B.18

Visa i ett allmänt fall (med ändligt antal alternativ för beslutsfattare och för naturen)

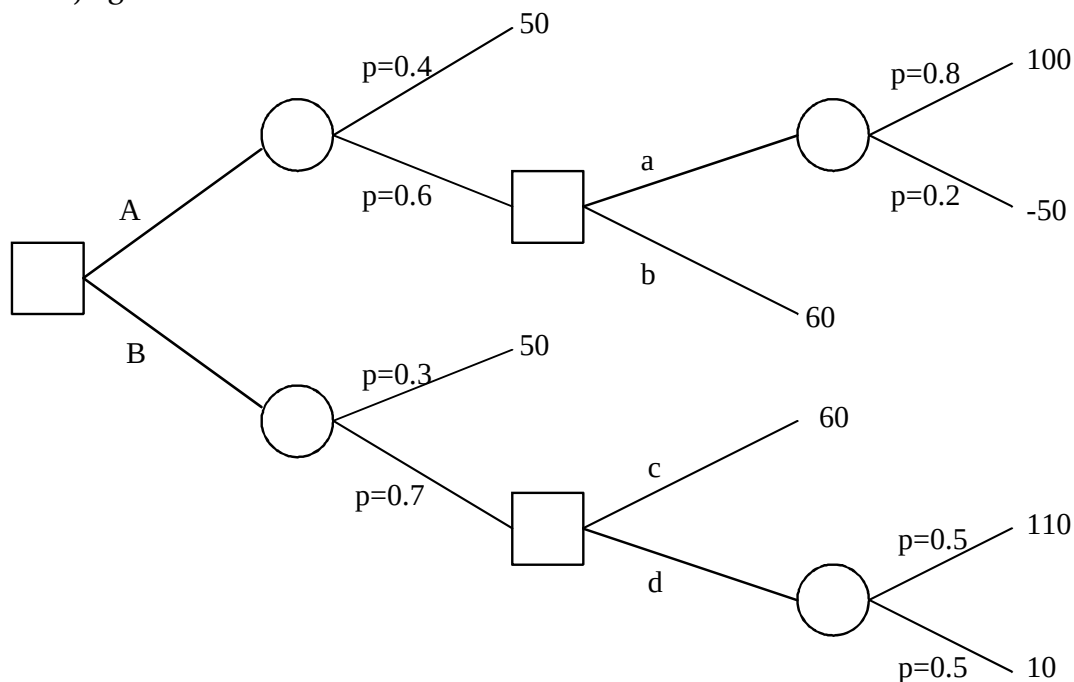
- i) att en maximering av förväntat monetärt värde (EMV) alltid innebär detsamma som en minimering av förväntad alternativ förlust (EOL).
- ii) att den förväntade alternativförlustens minimum, $EOL_{\min}$, alltid är ekvivalent med förväntade värdet av fullständig information (EVPI).

(740118)

Beslutsproblem på extensiv form

Uppgift B.23

I nedanstående spelträd markerar A, B, a, b, c och d beslutsfattarens drag. I varje grenända markeras beslutsfattarens vinst.



- Vilka drag väljer beslutsfattaren om han önskar maximera sin vinst?
- Vilka drag väljer beslutsfattaren om han önskar maximal vinst med det ytterligare villkoret att han **inte** vill utsätta sig för förlustrisk?
- Vilka drag väljer beslutsfattaren om han med största sannolikheten önskar vinna 100 kronor eller mer?

Uppgift B.29

En auktionsfirma planerar en auktion utomhus en junisöndag. Man inser, att det kan bli regn och överväger därför att ta en regnförsäkring. Om man inte har försäkring och det blir regn så räknar man med en extra kostnad av 1 000 kr för hyra av en lada. Försäkringen kostar 600 kr. Man kan också tänka sig att köpa en väderprognos. Prognosen kostar 70 kr, men den är inte helt tillförlitlig. Utan prognos har man ingen vetskap om väderleken och får därför räkna med att regn kan förekomma lika väl som vackert väder. Prognosen brukar ange regn i 4 fall av 10. I de fall prognosen säger regn har det visat sig att det verkligen har blivit regn i 80 fall av 100. Vid utslaget "ej regn" brukar prognosen slå in i 7 fall av 10.

- a) Skall auktionsfirman använda sig av prognos eller inte?
- b) Hur mycket är firman högst villig att betala för prognosen?
- c) Hur stor är sannolikheten för att prognosen säger "regn" när det verkligen blir regn?

(761105)

Uppgift B.34

Det riskneutrala företaget A&T står i begrepp att lansera ett riskfyllt e-handelsprojekt. Företaget är nystartat och saknar erfarenhet av projektlanseringar, vilket innebär att A&T behöver din hjälp. A&T har emellertid insett vikten av marknadsföring och därför samlat in riskkapital så att företaget har möjlighet att satsa upp till 100 miljoner kr på marknadsföring.

Sannolikheten för att projektet ska bli framgångsrikt antas bero på

$$p(x) = \frac{x}{150} \quad \text{där } x = \text{satsade Mkr på marknadsföring, } 0 \leq x \leq 100$$

marknadsföringsinsatsen (x) enligt följande samband:

En misslyckad lansering ger 0 kr i intäkt. Intäkten (i miljoner kr) från ett lyckat projekt beräknas enligt följande funktion:

$$I(x) = 10x^{1/2} + x, \quad \text{där } x = \text{satsade Mkr på marknadsföring, } 0 \leq x \leq 100$$

- a) Hur mycket bör A&T satsa på marknadsföring för att maximera den förväntade utdelningen av projektet?

Antag att A&T tvingas fördröja lanseringen. Fördröjningen leder till att företaget kan skaffa sig större marknadskännedom. De reviderar därför sina beräkningar från a) och konstaterar att en lansering i detta skede kräver 60 Mkr i marknadsföringskostnader för en total intäkt om 74 Mkr.

Företaget är ändå tveksamma till att lansera projektet. Istället överväger A&T ett erbjudande om att köpa en marknadsundersökning från en IT-konsultbyrå, som ännu inte gått i konkurs. Historiskt sett brukar slutsatsen i en sådan undersökning bli att projektet har succépotential i 60 procent av fallen. När undersökningen visar succé brukar det också stämma i 8 fall av 10. Visar undersökningen däremot misslyckande brukar det stämma i 9 fall av 10.

Marknadsundersökningen ger också säkrare information om intäkterna. Om IT-konsulten anlitas antar A&T att intäkten är 150 Mkr vid succé och 0 kr vid misslyckande. A&T kommer också att kunna tillämpa

riktad marknadsföring tack vare marknadsundersökningen, vilket innebär att företagets marknadsföringsinsats reduceras till 50 Mkr.

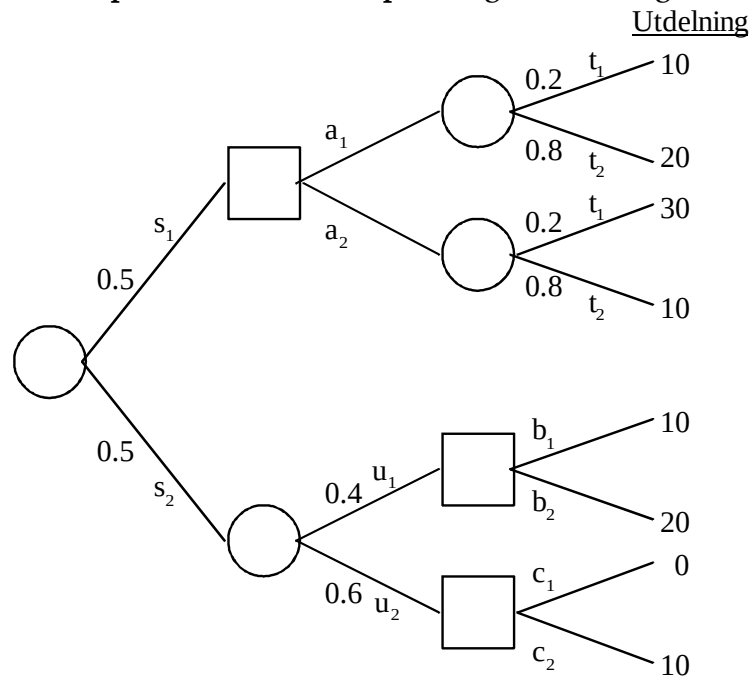
- b) Bestäm A&T:s maximala betalningsvilja för marknadsundersökningen?

(000607)

Strategibegreppet och transformationer till normalform

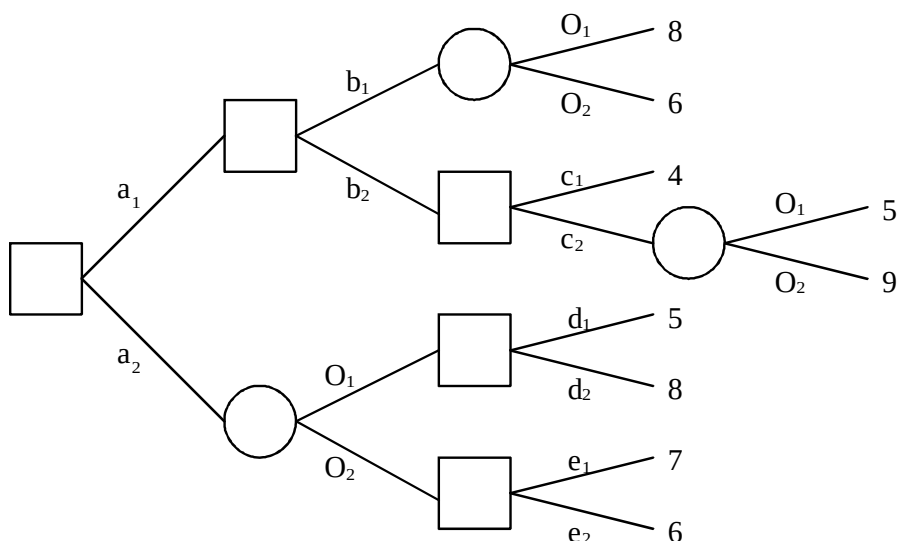
Uppgift B.35

I beslutsträdet nedan betecknar cirklar chanspunkter fyrkanter beslutspunkter. Siffrorna på trädgrenarna anger betingade sannolikheter.



- Vad är trädets förväntade utdelning för en risk-neutral person?
- Beskriv de åtta olika rena strategierna som beslutsfattaren kan välja mellan i detta exempel.
- Ange den förväntade utdelningen för var och en av dessa strategier.
- Beskriv naturens olika rena strategier.
- Upprätta en utdelningsmatris som beskriver utdelningen till beslutsfattaren.

Uppgift B.38



Detta beslutsträd illustrerar ett projekt. Observera att naturen endast har två strategier O_i , $i = 1, 2$.

- Ange alla strategier för beslutsfattaren.
- Låt p_i beteckna sannolikhet för O_i . Bestäm den strategi eller de strategier som maximerar EMV för alla olika p_i .
- Visa i figur vilka möjliga utdelningar som finns, dvs utdelningsrum vid alla möjliga strategier.

(811029)

SPELTEORI

Nollsummespel

Uppgift S.2

Följande matris visar A:s vinst vid spel mot B:

	B1	B2
A1	10	0
A2	7	5
A3	4	8
A4	1	9

- Vilken strategi bör B använda om han önskar minimera sin maximiförlust?
- Vilken strategi bör A använda om han önskar maximera sin minimivinst?
- Vad är spelets värde?

Uppgift S.3

Följande matris anger de betalningar som går från förloraren B till vinnaren A vid olika strategikombinationer i ett 2-personers nollsummespel.

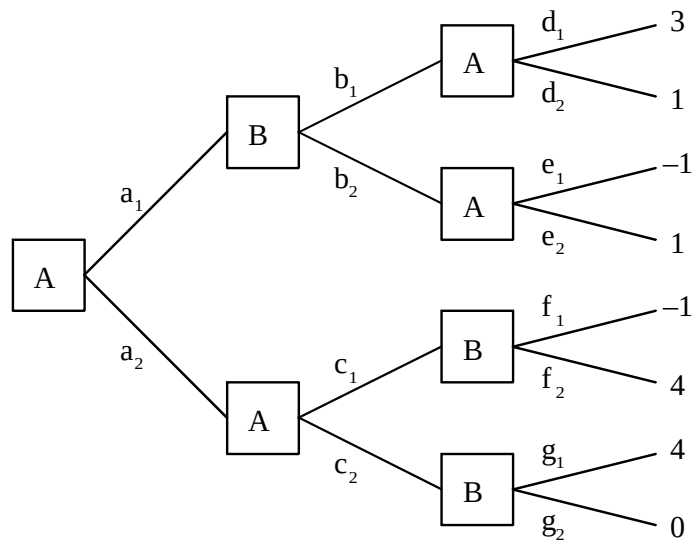
	B1	B2	B3
A1	12	7	12
A2	13	3	13
A3	6	11	20
A4	2	12	10

- Enligt vilken strategikombination bör B spela?

- b) Enligt vilken strategikombination bör A spela?
- c) Vad är spelets värde?

Uppgift S.4

Följande träd beskriver ett tvåpersoners nollsummespel. $\boxed{A}$ anger personen A:s beslutspunkter och $\boxed{B}$ motsvarande för personen B.



- a) Beskriv de **rena strategier** som är tillgängliga för spelarna.
- b) Överför spelet till **normalform**.
- c) Bestäm de båda spelarnas optimala strategier. Blandade strategier får förekomma.

(720602)

Uppgift S.6

Två företag, A och B, för en intensiv kamp om kunderna i den lilla staden Epsilontown. Genom att blanda sina konkurrensmedel på lite olika sätt erhåller de båda företagen ett antal marknadsstrategier. Resultatet beror på båda företagens åtgärder och man tar hänsyn till konkurrentföretagets reaktion när man agerar. Effekten av marknadsföringen, i form av kundövergångar mellan företagen har bestämts. De kunder man betraktar är de som byter företag beroende på respektive företags marknadsföring. Resultatet av A:s och B:s rena strategier enligt marknadsanalysen anges nedan (positivt tal anger kundvinst för A och vice versa):

	B1	B2	B3	B4
A1	20	-10	-20	20
A2	-30	40	30	-40
A3	10	-20	-40	10
A4	-40	50	40	-50

- Bestäm optimal strategi för A? Hur många kunder vinner/förlorar A?
- Vilken är den optimala strategin för B?

(761105)

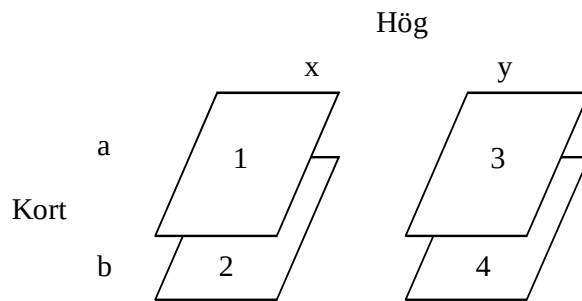
Uppgift S.9

Spelregler till taktikspelet "Backteman"

Allmänt: Spelet är ett tvåpersoners nollsummespel. Spelarna kallas i fortsättningen spelare A och spelare B.

Spelmateriel: Fyra kort med siffror på baksidan. Det finns ett kort med siffran ett, ett med siffran två, ett med siffran tre och ett med siffran fyra. Vi kallar dem i fortsättningsvis för kort ett, två, tre respektive fyra.

Förberedelser: Korten läggs i två högar kallade x och y. I hög x lägger man kort ett ovanpå kort två och i hög y lägger man kort tre ovanpå kort fyra. Det övre kortet kallas för a och det undre kallas b.



OBS! Korten ligger med siffrorna nedåt.

Tillvägagångssätt: Spelare A ger en av högarna till spelare B. A vet vilken av högarna han ger till B medan B inte vet vilken han får. B drar sedan kort a eller kort b och ger detta till A. A vet inte vilket av korten som B drar. Nu skall spelare A gissa vilken valör kortet har. Om han gissar rätt vinner han ett belopp motsvarande den siffra som står på kortet och om han gissar fel förlorar han motsvarande belopp.

- a) Åskådliggör spelet med ett spelträd och markera spelarnas informationsrum.
- b) Bestäm respektive spelares optimala strategi, om A har märkt korten så att han vet vilket kort B har dragit. B som inte vet om att A fuskar väljer samma strategi som i b-uppgiften. Vilken blir nu A:s förväntade utdelning av spelet?

Icke Konstantsummespel

Uppgift S.11

Betrakta följande 2-personers icke-konstantsummespel. Till varje par av strategier hör två betalningar, den första till A och den andra till B. A1 och A2 är A:s strategier, B1 och B2 är B:s strategier.

	B1	B2
A1	8;12	10;10
A2	2;18	20;4

Avgör med ledning härav om påståendena a - d är sanna eller falska.

- Spelet har en jämviktspunkt.
- Strategi A1 dominerar över strategi A2.
- Om spelarna förhandlar kan sammanlagda betalningar öka med 4 enheter.
- Om spelarna samarbetar kan man förvänta sidobetalningar från B till A.

Uppgift S.12

Nedan visas utdelningsmatrisen för ett spel mellan A och B, där a_i , $i = 1, \dots, 4$ är A:s möjliga strategier och b_j , $j = 1, \dots, 4$ är B:s möjliga strategier.

<i>(A:s utdelning ;B:s utdelning)</i>				
	b₁	b₂	b₃	b₄
a₁	0;-2	-7;-2	-3;-3	-1;-7
a₂	-3;-5	-8;-2	-2;-2	-1;1
a₃	-7;1	-3;0	-6;-3	-2;0
a₄	-2;-4	0;0	-1;-1	-7;-7

- Finn eventuell iterativ dominanslösning i matrisen ovan. Redovisa lösningsgången.
- Finn eventuella Nashlösningar i matrisen ovan och ange om de är starka eller svaga.

- c) Bevisa eller motbevisa påståendet att alla iterativa dominanslösningar också är svaga Nashlösningar.

Uppgift S.13

Nedan visas utdelningsmatrisen för ett spel mellan A och B, där a_i , $i = 1, \dots, 3$ är A:s möjliga strategier och b_j , $j = 1, \dots, 5$ är B:s möjliga strategier.

(u_A, u_B)	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1,1	3,2	3,3	-1,-7	4,x
a_2	4,1	3,0	2,1	-1,1	3,-1
a_3	0,0	1,0	1,1	2,0	4,0

a) Ta fram eventuella Nashlösningar, för alla värden på x, och ange om de är starka eller svaga.

b) Antag att A spelar ett icke-konstantsummespel mot B och att de har två strategier var. Konstruera en utdelningsmatris som innehåller två starka Nashlösningar. Visa också tydligt att den konstruerade utdelningsmatrisen innehåller de båda Nashlösningarna.

Uppgift S.15

Tanterna Agda och Berta brukar varje höst ge sig ut i Bertas kranliga bil för att plocka svamp i Storskogen. Detta är något de har gjort i många år och antagligen kommer att fortsätta med så länge Bertas bil fungerar. Väl framme vid Storskogen kan Agda respektive Berta välja mellan att gå höger- eller vänstervarv i Storskogen. Det ligger en hel del prestige i att kunna plocka hem mest svamp - syjuntans damer anser att samtalsämnet är hett ända in i oktober.

Om Agda och Berta tar sällskap på högervarvet så brukar Agda få med sig 5 hg och Berta 6 hg, Berta är nämligen lite snabbare i benen. Skulle de istället välja vänstervarvet så får båda 3 hg med sig hem. Vänstervarvet är allmänt sämre då de riktigt fina svampställena ligger till höger i skogen och går man vänstervarv så hinner alla andra svampplockare ta för sig av dessa innan man kommer dit.

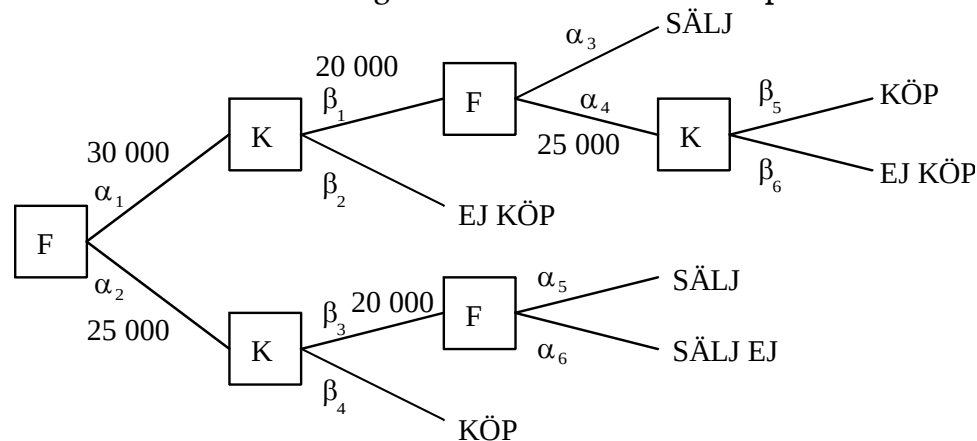
Möjligheten att gå åt varsitt håll är av samma anledning attraktiv då de tillsammans hinner läsa större delen av skogen innan några andra svampplockare kommer dit. Om Agda tar högervarvet så får hon hem 10

hg men Berta får då bara 2 hg ur den vänstra delen av skogen. Skulle istället Berta ta högervarvet så kan hon plocka hem 5 hg mot Agdas 2 hg. Berta är förvisso snabb men hon är dålig på att leta.

- Vad kallas spelsituationen?
- Bestäm deras gemensamma utdelningsmatris.
- Rita utdelningsdiagrammet för spelproblemet och bestäm utdelningsrummet. Var noggrann med beteckningarna!
- Vad innebär paretooptimalitet? Definiera och markera!
- Definiera avtalsmängden samt markera denna i diagrammet
- I händelse av att tanterna skulle vara sura på varandra kan det vara bra att känna till deras hotstrategier - ta fram dessa!

Uppgift S.16

Följande träd visar ett två personers icke konstantsummespel. Trädet visar en tänkt förhandlingssituation mellan en bilköpare och bilförsäljare.



$\boxed{F}$ beskriver försäljarens beslutspunkter

$\boxed{K}$ beskriver köparens beslutspunkter

De summor som står på grenarna anger köpesummans storlek.

Försäljaren har nyttofunktionen $u = (\text{köpesumman} - 23\,000)$ vid köp och 0 annars. Köparen har nyttofunktionen $u = (26\,000 - \text{köpesumman})$ vid köp och 0 annars.

- a) Överför spelet till normalform.
- b) Har spelet någon jämviktslösning? Vilken i så fall?
- c) Ange spelets rena Nash-lösningar.

Uppgift S.17

Ett två personers icke-konstantsummespel ser ut enligt nedan

	B1	B2
A1	(-2;3)	(3;4)
A2	(4;-2)	(-2;-3)

- Rita utdelningsdiagram.
- Bestäm säkerhetsnivån för respektive spelare.
- Bestäm avtalsmängden.
- Bestäm hotstrategier och hotnivåer för respektive spelare.

Uppgift S.18

Ett osäkert projekt har två tänkbara utfall, ett negativt med beloppet $-b$ och ett positivt med beloppet a . Person A har möjligheten att delta i projektet till 0%, 50% eller 100% och A har nyttofunktionen:

$$\xi(x) = k(\sqrt{x+b} - \sqrt{b}) \quad -b \leq x \leq a$$

där x är penning utfallet och k är en positiv konstant.

- Visa att sannolikheten för det positiva utfallet måste uppgå till mer än $q = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$ för att det skall vara intressant att delta i projektet med 100-procentig andel. Förklara varför det då skulle vara klart fördelaktigt att delta med en 50-procentig andel.
- Antag att sannolikheten enligt a) gäller. Låt k väljas sådan att nyttan av ett 50-procentigt deltagande i projektet har värdet 100 utiler (nyttoenheter).

Antag att projektdeltagande erbjuds till ytterligare en person, person B, som parallellt med person A har lämnat ett bud om den andel han/hon önskar delta med. Följande tilldelning i projektet kommer att gälla:

- Om budet noll ges, erhålles andelen noll.
- Om budet 50% ges, erhålles 50% om den andre personen ger budet 0% eller den andre personen ger budet 50%.
- Om budet 100% ges, erhålles 100% om den andre personen lämnar budet 0% eller 50%, och 50% om den andre personen också ger budet 100%.

Bestäm utdelningsmatrisen till person A i vilken utdelningarna anges i **förväntad nytta**. Det förutsätts att vardera personen har de tre angivna buden som alternativ och att de handlar utan förhandskännedom om varandras val.

- Under förutsättningarna i b), bestäm **garantinivån** till person A, dels förutsatt att endast rena strategier får väljas, dels om blandade strategier får väljas.
- Låt personerna ha möjligheter att - innan budet skall ges - diskutera och komma överens om sina val. Förutsätt att person B har samma nyttofunktion som person A. Vilka strategier kommer att vara bäst i så fall?

Uppgift S.19

Två stater, Angriparen och Försvararen, står inför randen av en konflikt kring ett område. Angriparens armé går in mot en av försvararens mindre befästningar, vars stridsmoral (stark, svag) är okänd för tillfället. Angriparen vill bara angripa om försvaret är svagt, vilket har sannolikhet 0.1. Angreppet kan bara ske under en viss dag, sedan anländer försvararens förstärkningar och omöjliggör angreppet.

Försvarets stridsmoral kan inte mätas direkt, men indirekt genom att observera hur de stridsövar i en kris. En manöver alldeles innan en kris stärker moralen för en stark försvararen, men sänker den för en svag. Försvararen föredrar en fredlig lösning, oavsett styrka.

Direkt vid angreppshotet väljer försvararen antingen (Öva, Vila) varefter angriparen väljer (Angrepp, Återvänd). Något förenklat kan utfallet av

konflikten ges som (försvararen, angriparen); för starkt försvar; (öva, angrepp) = (1,0), (öva, återvänd) = (3,1), (vila, angrepp) = (0,0), (vila, återvänd) = (2,1); för svagt försvar; (öva, angrepp) = (0,1), (öva, återvänd) = (2,0), (vila, angrepp) = (1,1), (vila, återvänd) = (3,0).

- Beskriv spelet på extensiv form, ange spelarnas informationsrum.
- Karakterisera spelets utifrån dess information (symmetri, perfektion, fullständighet, säkerhet)
- Finn konfliktens jämviktslösning(ar).
- Diskutera slutsatsen från c) i termer av tillämpning. Formulera en policy i klartext för försvararen. Kan några paralleller dras i vår omvärld?

(980601)

Uppgift S.20

Betrakta följande två-personers spel, kallat *Tender Trap* av Hirshleifer (1982) eller *Ranked Coordination* av Rasmusen (1989). Spelarna är Företaget (F) och Studenten (S). Båda kan välja mellan två inkompatibla datorsystem (M och I). Deras utdelning (F, S) är given i tabellen nedan.

Företaget	Studenten	
	M	I
M	(10,10)	(4,4)
I	(4,4)	(6,6)

- Ange spelets rena Nash-lösning(ar) utan kommunikation och med kommunikation innan spelet.
- Antag att S drar efter F utan annan information än att F spelar en blandad strategi. Ange spelets jämviktslösning. Vad är sannolikheten för mismatch (M, I) eller (I, M)? Är lösningen stark eller svag?
- Antag att S handlar utifrån tron att F drar M med sannolikhet $1 - \varepsilon$ och I med sannolikhet ε . Darrningen (felrisken) $\varepsilon > 0$ står för företagets irrationalitet, individens brist på information och andra fel i beslutsprocessen. Ange optimalt agerande för S.

- d) Tolka spelet i termer av signaler mellan marknadsaktörer. Vad antyder spelet om Pareto-optimalitet och statlig inblandning på en öppen marknad?

Uppgift S.21

Två studenter avser att spela ett spel som kallas Chicken av Rasmussen (1994). I dess ursprungliga form används bilar men för att begränsa riskerna använder studenterna cyklar istället. Spelet går till så att de två studenterna A och B cyklar med full fart mot varandra och den som först svänger undan förlorar och således vinner den andra. I värsta fall fortsätter båda rakt fram, utan att någon svänger undan, och därmed kommer de två studenterna att krocka med varandra. Spelet äger rum en enda gång och spelarna har ingen särskild information om ev. tidigare utfall.

Studenternas utdelning (A, B) för detta spel har utseende enligt nedan

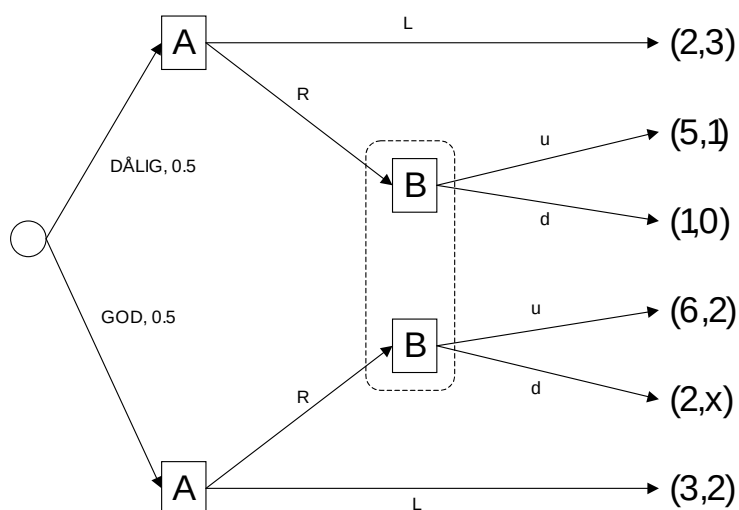
Student A	Student B	
	Fortsätt (F)	Sväng undan (S)
F	$(-5, -5)$	$(2, 0)$
S	$(0, 2)$	$(1, 1)$

- Ange spelets Nash-lösning/-ar.
- Bestäm sannolikheten att båda studenterna svänger undan i jämvikt.
- Uttryck sannolikheten att en student fortsätter som en funktion av x där x är respektive students utdelning för (Fortsätt, Fortsätt). Dvs utdelningen är (x, x) istället för $(-5, -5)$.

(990107)

Uppgift S.22

Betrakta följande spel på extensiv form:



För fallen $x = 1, 2, 3$ ange blandade och rena Nash-jämvikter. Kan några strategier elimineras genom itererad dominans?

© David K. Levine.

Uppgift S.23

SSAB överväger att ta över det familjedominerade företaget AB Gnosjömetall. Familjen Graaf, som numera inte äger aktiemajoriteten i Gnosjömetall, ogillar [DISLIKES] övertagandet då detta kan uttryckas som en nyttoförlust om 120. Med sannolikhet 0.8 är Gnosjömetall i dåligt finansiellt skick och har då värde 10 för SSAB. Med sannolikhet 0.2 är Gnosjömetall i gott skick och har då värde 200 för SSAB.

SSAB kan dock endast observera bokförda värden och rapporter. Om Gnosjömetall är i dåligt skick rapporteras alltid låg lönsamhet. Om Gnosjömetall är i gott skick kan Graaf välja att rapportera höga eller låg lönsamhet. Om lönsamheten är hög kostar förvärvet via börsen 100 för SSAB, vid låg lönsamhet 60. Graaf får 60 i nytta för hög lönsamhet och 20 för låg lönsamhet, förutom andra poster i sin additiva nyttofunktion.

- a) Rita spelträdet för beslutsproblemet, inklusive utdelningar och informationsmängder.

- b) Ange jämviktlösningen.
- c) Ange utfallet i jämvikt, dvs vilka drag som tas och utdelningar.

Uppgift S.25

Den färske civilingenjören Ivar har just blivit anställd av det multinationella företaget MEL. Ivar har anställts för uppgifter inom Teknik, Ekonomi eller som Chef. MEL har information om att Ivar har lika chanser att vara profilerad på Teknik som på Ekonomi. Ivar vet själv sin profil, men föredrar helst att bli Chef. Personalchefen frågar nu Ivar vilken uppgift (Teknik, Ekonomi) som är mest lämplig. Ivar kan svara Teknik, Ekonomi eller tåga. Utdelningarna vid olika arbetsfördelning är givna i tabellen nedan.

(u_I, u_M) Ivars profil	MEL		
	Teknik k	Ekonomi i	Chef
Teknik ($p = 0.5$)	2,5	1,-2	3,3
Ekonomi ($p = 0.5$)	1,-2	2,5	3,3

Var noga med att ange strategier, lösningar och utfall i svaren.

- Bestäm spelets lösning om MEL inte ger Ivar möjlighet att svara på frågan om vilken uppgift (Teknik eller Ekonomi) som är mest lämplig för honom.
- Ange spelets informationsstruktur (perfektion, fullständighet, symmetri, säkerhet). Motivering krävs.
- Visa att det finns en stark Nashlösning som är oberoende av Ivars (icke-tigande) svar.
- Det finns en Nashlösning i vilken Ivar alltid talar sanning och aldrig tiger. Ge ett exempel på denna jämvikt och visa att vare sig Ivar eller MEL har anledning att (ensidigt) avvika från lösningen. Kommentera resultatet.

(000607)

Uppgift S.26

Gymnasisten Linus står inför valet mellan högre studier eller arbetslivet. Lite förenklat kan Linus sägas vara analytisk med sannolikhet 0.4 eller mindre analytisk med sannolikhet 0.6. Högre studier kan anses innebära en nyttoförlust för Linus om 1 vid analytisk läggning, annars dubbla förlusten.

Efter fem år söker Linus anställning som analytiker hos en arbetsgivare. Arbetsgivaren kan välja mellan att anställa eller att inte anställa Linus. Om Linus blir anställd får han en nyttoökning L . Företagets utdelning är 10 om Linus är analytisk och -2 annars. Om företaget inte anställer Linus är utdelningen 0 både för företaget och Linus. Observera att utbildningen i sig saknar värde för den aktuella tjänsten, som kan antas kräva intern eller specialutbildning.

Linus vet om han är analytisk eller inte. Arbetsgivaren kan verifiera information om högre studier.

- a) Bestäm spelets Nashlösning(ar) för $L = 4$.
- b) Visa hur arbetsgivaren genom att erbjuda en differentierad lön W för utbildad personal och en lön L för outbildad kan uppnå en för företaget optimal lösning. Ta fram villkor för W och L . Tolka resultatet i ord.

Var noga med att ange strategier, lösningar och utfall.

(010115)

Uppgift S.27

Betrakta följande kortspel, *Bluffo*, som spelas med två spelare, A och B. Först får A en hand given som är antingen stark, med sannolikhet 0.3, eller svag, med sannolikhet 0.7. Endast A kan se de givna korten. A väljer sedan att satsa eller gå ur och betala B 100 kr. Om A satsar kan B välja att antingen syna (se A's hand) eller lägga sig. Om B synar och A har en stark hand får B betala 400 kr till A, om A har en svag hand betalar A 400 kr till B. Priset för B att lägga sig är 100 kr till A, med osedd hand.

- Formulera kortspelet på extensiv form och ange informationsrum. Klassificera spelets informationstyp (perfektion, säkerhet, symmetri, fullständighet).
- Hitta eventuella dominans och/eller Nash-lösning(ar). Ange också vilken strategi för B som ger A incitament för att inte bluffa? Beräkna det ekonomiska utfallet för A och B vid denna strategi.

Uppgift S.28

Två bortresta makar, Eskil och Ulla, planerar sin helg med något olika preferenser. Eskil föredrar att gå på Båtmässan (B) medan Ulla vill åka till sin syster (S) i Småland. Deras preferenser kan förenklat uttryckas som utbetalningarna i matrisen nedan. De kan inte kombinera aktiviteterna och Ulla kan inte nå Eskil för att diskutera helgen i förväg. Eskil kan däremot under fredagen antingen lämna ett meddelande M (ett vykort med en Albin 25 och texten "jag åker till Båtmässan") till Ulla via hennes arbete, vilket dock ger en nyttoförlust om 1 för Eskil, eller förbli tyst (T). Meddelandet M är inte bindande för Eskil. Makarna drar (B, S) samtidigt.

(u_E, u_U) Eskil	Ulla	
	B	S
B	3,1	0,0
S	0,0	1,3

- Beskriv spelet på extensiv form. Låt Eskils drag föregå Ullas i underspelet (B,S). Ange strategimängderna för Ulla och Eskil.

- b) Vilka är de tre jämviktsutfallen för rena strategier. (Obs! Utfall $\neq$ strategier)
- c) Beskriv jämviktsstrategier för en Nash jämvikt där Eskil väljer M.
- d) Undersök spelet med hjälp av itererad dominans. Kommentera resultatet.

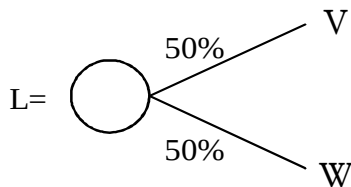
NYTTOTEORI

Nyttofunktioner

Uppgift N.14

Betrakta följande båda alternativa situationen, där $V > W > 0$:

- i) En beslutsfattare har tillgång till ett 50%/50%-lotteri L, som han kan tänkas sälja.
- ii) Beslutsfattaren har istället möjligheten att köpa lotteriet L.



Visa att:

- a) om beslutsfattarens nyttofunktion är linjär, så sammanfaller hans lägsta försäljningspris i alternativ i) med hans högsta inköpspris i alternativ ii).
- b) samma relation mellan de båda priserna som i a) gäller, om nyttofunktionen istället har utseendet:

$$u(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ där } \lambda > 0 \text{ (konstant) } x = \text{totalförmögenhet}$$

Uppgift N.15

Gårdfarihandlare Smart har fått bekymmer ty han måste skaffa fram pengar. Efter några timmars grubblande beslutar Smart sig för att sälja sin blå cheviot-kostym som han köpt för dyra pengar i sin ungdom. Nu återstår problemet att stämma sig för hur försäljningen skall ske. Fyra alternativ står till buds.

Alt. 1. Smart tar kostymen med sig på de vanliga turerna till de olika gårdarna runt omkring. Kostymen tänker han sälja för 100 kr. Eftersom han är gammal i "gamet" vet han att sannolikheten att kostymen blir såld

i 1:a gården är 0.5 och alltså 0.5 att han även måste försöka i nästa gård där sannolikheten i sin tur är 0.5 att det blir napp och 0.5 att jakten på köpare går vidare till nästa gård o s v till oändligheten.

Alt.2. Fru Smart försöker sälja kostymen på torget inne i staden. Gårdfarihandlaren vet att stadsbor har gott om pengar så han höjer här priset till 125 kr. Men eftersom de är lite väl modemedvetna räknar han med att sannolikheten att få kostymen såld endast är 0.3.

Alt.3. Ett annat alternativ som dykt upp efter Hermodskursen i marknadsföring som Smart följt är annonsering. En annons i ortspressen bekostas av KFMR (Knallarnas Fond för Marknadsföring och Reklam) och 121 kr tänker Smart kräva för kostymen. Men om kunden försöker pruta bestämmer sig Smart för att bara begära 100 kr. Om kunden inte godtar detta faller köpet. Sannolikheten att kostymen blir såld för 121 kr är 0.5. Sannolikheten att någon prutar är 0.2. Av de som prutar accepterar 50% priset 100 kr och 50% avstår från köpet. Sannolikheten att Smart inte får sin kostym såld om han använder alternativ 3 är 0.3.

Alt.4. Smarts sista alternativ är att sälja kostymen till byns skräddare. Denne har redan erbjudit sig att betala 49 kr för kostymen.

Smarts nyttofunktion u_x av kapitaltillskottet x är då

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x < 125 \\ x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 125 \end{cases}$$

Beräkna den förväntade nyttan av varje handlingsalternativ. Vilket alternativ bör Smart välja om han vill maximera sin förväntade nytta?

(730915)

Uppgift N.16

A och B erbjuds att gratis få delta i ett spel där man kan vinna 1000 kronor eller förlora 100 kronor. Vinstsannolikheten är 0.3. A och B bestämmer sig för att medverka genom att åta sig var sin andel av spelet. Deras nyttofunktion har följande utseende

$$u(x) = \frac{ax}{a+x}, 0 < a, -a < x$$

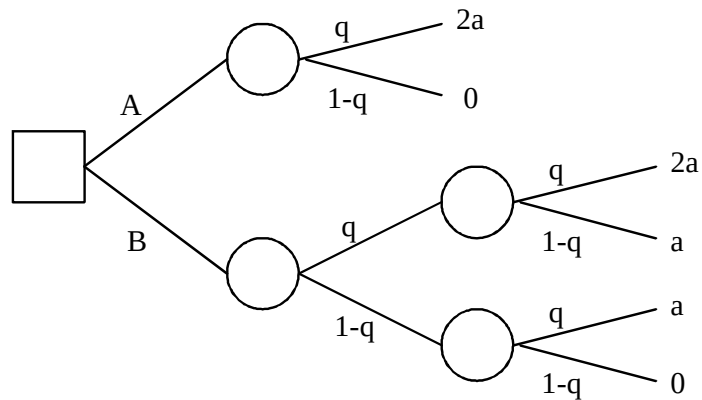
För spelare A är $a = 218$. För B ger nyttofunktionen en maximal andel på 0.8. A och B vinner respektive förlorar proportionellt mot sin andel i spelet.

- a) Hur stor andel av spelet kan A maximalt ta på sig?
- b) Hur stor riskaversion har spelare B, om hans andel i spelet uppgår till 0.6?

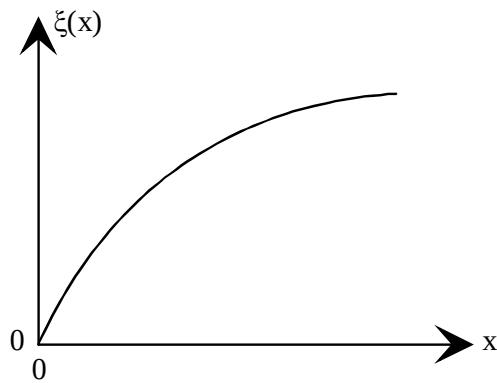
(750604)

Uppgift N.19

En person står inför följande val ($a > 0$)



Personens nyttofunktion, $\xi(x)$, där x betecknar personens förmögenhet har ett principiellt utseende enligt figuren nedan.



Kommer personen i fråga att välja alternativ A eller B? Noggrann motivering krävs.

Uppgift N.21

Penninglotteriet har i våras introducerat möjligheten att köpa två lotter med samma nummer, varvid lottköparen erhåller dubbel vinst om lottens nummer dras. Vi ska studera detta lite närmare i det här talet. För att få ett hanterbart problem tittar vi på följande förenklade penninglotteri: Lottpris: 62.50 kr/st. Vinst 312.50 kr med sannolikheten 0.1 och nitlott med sannolikheten 0.9. Olika lotters utfall kan anses som oberoende av varandra.

En godtycklig teknolog, låt oss kalla honom Peter, har nyttofunktionen $\xi(x) = a + e^{bx}$, där x är Peters antal kronor och $b \neq 0$. Konstanterna a och b är sådana att Peter är indifferent mellan att behålla sin förmögenhet på 125 kr och köpa två olika lotter.

- a) Hur mycket kan Peter högst tänka sig att betala för två **lika** lotter i ovanstående lotteri?
- b)
 - i) Är Peter riskavert eller spelglad? Visa detta!
 - ii) Ange ett mått på hur stor riskaversionen eller spelglädjen är de två aktuella fallen! När är den störst?

Ledning: Ekvationen $x^4 + 18x^2 - 100x + 81 = 0$ har den positiva roten $x = 2.758$.

(860825)

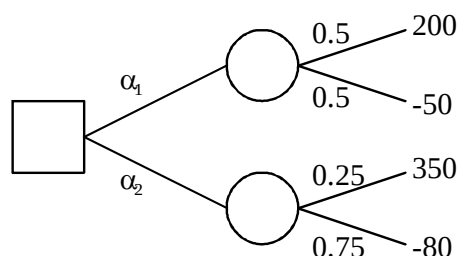
Uppgift N.22

I ett lotteri vinner man 500 kr med sannolikheten p och förlorar 100 kr med sannolikheten $1-p$. Man har undersökt hur olika personer värderar detta lotteri beroende på vinstsannolikheten p . Tabellen visar svaren från en försöksperson.

Sannolikhet	CME
0.2	-50
0.4	25
0.6	125

0.7	200
0.9	350

- a) Bestäm utgående från dessa värden, vilket handlingsalternativ denna person väljer i följande valsituation. Motivera noggrant.



En person har nyttofunktionen $u(x)$ som är en monotont växande funktion. Personen får ett erbjudande om att delta i ett lotteri med j st utfall, vardera med sannolikheten p_j och vinsten x_j .

- b) Hur mycket är personen högst villig att betala för att delta i lotteriet?

(870827)

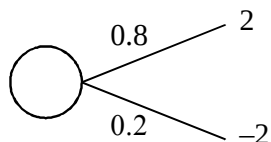
Uppgift N.23

För en viss lott har Nisse kommit på att vinstsannolikheten varierar enligt följande

$\varphi(x) = {}^{10}\log(5 + x)$, där x är en säkerhetsekvivalent och φ en vinstsannolikhet.

- Rita upp Nisses φ -funktion och rita upp referenslotten med vinst och förlust angivet.
- Vilken egenskap besitter Nisse? Motivera svaret.
- Antag att Nisse kan välja mellan referenslotten i Uppgift a och en säker betalning på 3 kr. Vilken vinstsannolikhet måste lotten ha för att Nisse skall välja lotten?

Antag en ny lott



- d) Vilket CME-värde motsvarar denna lott. Lös uppgiften grafiskt.
(880826)

Uppgift N.24

Carl Foto, känd norrländsk statsman, äger ingen stor förmögenhet. Han äger dock en fastighet, värderad till 1 400 000 kr, då fastighetskrisen ännu ej fått genomslag i Norrland.

Riskpreferensfunktionen har Carl lyckats fastställa till:

$$u(x) = \begin{cases} x^2 & 1 < x \\ \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ -\sqrt{|x|} & -1 < x \leq 0 \\ -x^2 & x \leq -1 \end{cases} \quad x \text{ anges i tusen kronor}$$

OBS! Om fastigheten förloras så räknas detta som en förlust, dvs -1 400 000.

- a) Fastställ inom vilket intervall en försäkringspremie skall ligga, för att Carl och ett försäkringsbolag skall vara intresserade av att teckna avtal om en brandförsäkring. Brandrisken bedöms till 0.01%. Visa även premieintervallet i en graf med riskpreferensfunktionen.

Antag att premien sätts till 10 000 kr. Då Carl funderar över försäkringen erbjuder han att köpa en lott för motsvarande summa med utdelningsmatrisen:

Sannolikhet för utfall	Utfall
0.001	500 000 kr
0.019	50 000 kr
0.180	1 000 kr
0.800	0 kr

- b) Bestäm om Carl väljer att teckna försäkring eller väljer att köpa lotten.
- c) Bortse nu från lotten. Hur stor andel av huset skall Carls fru äga för att Carl ej ska vara intresserad av att köpa en försäkring till lägsta

möjliga premie som försäkringsbolaget kan acceptera. Formulera problemet (OBS! lös ej) och förklara hur det kan lösas. (*riskdelning*)

(930308)

Riskdelning

Uppgift N.26

Två uppfinnare ämnar starta ett företag för att exploatera en uppfinning. För detta fordras ett startkapital om 140 000 kr. Om marknaden för produkten slår väl ut räknar man med att erhålla ett årligt inbetalningsöverskott om 24 000 kr/år under lång tid och om marknaden slår mindre väl ut blir överskottet 10 000 kr/år. Dessa båda fall är fullständigt uttömmande och det första fallet inträffar med sannolikheten 0.6.

Som bolagskonstruktion har man tänkt sig ett aktiebolag, vars aktier har det nominella beloppet 1 000 kr och där emission sker till 40% överkurs.

De båda uppfinnarna tänker sig svara för aktieinköpet med egna medel och båda har den alternativa möjligheten att låna ut pengarna till räntan 10 procent/år. Från skatteeffekter av olika slag bortses. Avsikten är att båda skall svara för lika stora insatser.

Bolagsbildarna har var sin nyttofunktion, vars form kan tecknas:

$$u(x) = \frac{ax}{a+x} \quad (x > -a, a > 0)$$

där x är säkerhetsekvivalenten uttryckt i kr och där a har beloppet 40 000 kr för uppfinnare A och beloppet 60 000 kr för uppfinnare B.

- Undersök hur många aktier var och en av uppfinnarna kan tänka sig teckna.
- Undersök samma problem som i a) under förutsättning att uppfinnare A plötsligt erhåller ett arv om 10.000 kr, som han kan använda för aktieteckning.

Uppgift N.27

En grupp civilingenjörer från I-linjen överväger att delta i ett gemensamt riskfyllt projekt, som netto kan ge x i vinst med sannolikheten p eller $-y$ i förlust ($y > 0$) med sannolikheten $(1 - p)$. Antalet projektdeltagare är n .

- Ange projektets acceptansområde i (x, y) -planet för en riskneutral I-Linus.
- Antag att samtliga projektdelägare deltar i vinst och förlust med lika andel och att varje individs riskpreferenser karakteriseras av nyttofunktionen:

$$u = \log(1 + z)(z > -1)$$

där z är individens vinst (> 0) respektive förlust (< 0). Samtliga delägare har således identiska nyttofunktioner. Visa att projektets acceptansområde för gruppen som helhet kan tecknas:

$$y \leq n \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{-\frac{p}{1-p}} \right)$$

- Visa att ju större gruppen är, desto mer täcker gruppens acceptansområde den risk-neutrales acceptansområde.

Ledning: Utnyttja Maclaurin's serieutveckling (för små k):

$$(1 + k)^\beta = 1 + \beta k + \frac{\beta(\beta - 1)}{2!} k^2 + \dots$$

OBSERVERA! Det betraktas som extra förtjänstfullt om beviset kan genomföras för en allmän nyttofunktion, d v s utan att bygga på den speciella form som angivits i b).

(730915)

Uppgift N.28

Kal och Osborn satt en vårdag och deppade ute på piren i Långedrag. Båda var totalt pankar. Det enda de ägde var en öl och den var nästan urdrucken och dessutom i engångsglas.

I detta läge kommer Ada stormande in på scenen och meddelar jublande att tipskupongen som Kal och Osborn lämnat in föregående vecka gett 13 rätt. Utdelningen beräknades bli 100 000 kr.

Genast började Osborn berätta om en polare han kände som hade kommit på "världens grej". Allt som behövdes var någon som satsade 70 000 kr. En sådan satsning skulle med 70% sannolikhet ge en vinst på 40 000 kr och det var ju så bra att han och Kal borde slå sig samman och satsa hälften var, menade Osborn, som dessutom tyckte att Kal var en fegis om han med den vinstmöjligheten inte vågade ta risken att med 30% sannolikhet förlora 35 000 av de 50 000 han vunnit. Kals nyttofunktion var vid denna tidpunkt:

$$u(x) = \frac{160x}{160+x}$$

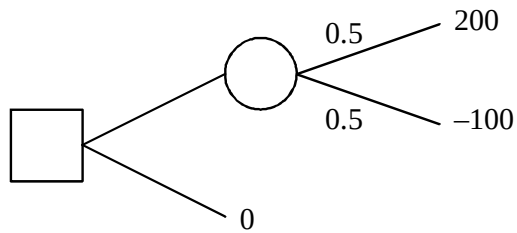
där x är säkerhetsekvivalenten uttryckt i tusen kr. Osborn hade druckit merparten av ovan nämnda öl och var därför riskneutral, om inte smått spelglad.

- a) Var Kal en, ur Osborns synvinkel sett, fegis och i så fall, hur stor andel kunde Kal högst tänka sig att satsa av de 70 000 kr.
- b) Om vi antar att Kal inte vill satsa hälften utan Osborn måste satsa mer än 50% för att det skall bli något av, hur stort är då det största belopp Osborn kan tänka sig att satsa?

(780602)

Uppgift N.29

Följande beslutssituation är given:



Två personer förhandlar om att dela på lotteriet. Förhandlingarna kretsar kring frågan om hur stor del respektive person ska ta. Personerna har båda nyttofunktionen:

$$u(x) = \ln(101 + x) \text{ för } x \geq -100$$

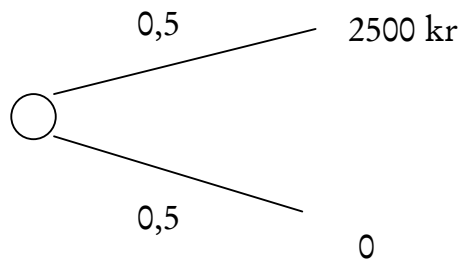
Bestäm den Paretooptimala lösningsmängden.

Uppgift N 32

Person A utan förmögenhet, som handlar utifrån sin nyttofunktion:

$$u(x) = \ln(610 + x) \quad \text{för } x > -610.$$

erbjuds att köpa nedanstående lott för 500 kr.



- Fastställ A:s inställning till risk
- Förklara noggrant huruvida A borde köpa hela lotten eller inte.
- Antag att A i stället kan delta med en andel (γ) i lotten ovan. Hur stor andel (γ^*) skall A ta för att maximera sin nytta? Accepteras lotten?
- Person AA, en tvilling till A med samma sorts nyttofunktion, har en viss förmögenhet $F > 0$. Kommer AA att ta en större eller mindre del av lotten än A? Använd resultatet från a) för att motivera svaret.
- En medelamerikan har enligt Friend och Blume (1975) konstant absolut riskaversion. Vilken beteendeskillnad kan antas mellan tvillingarna A / AA och medelamerikanen?

(000821)

INVESTERINGSTEORI

Grundläggande begrepp

Uppgift I.2

Vid handel med en del finansiella instrument med kort löptid så används enkla räntor. Vilken effektiv avkastning på årsbasis får man om man placerat i ett tremånaders instrument som ger avkastningen 6.00% som enkel årsränta? Utgå från att en månad har 30 dagar och ett år 360 dagar.

Lönsamhetsberäkningar med NPV-metoden

Uppgift I.18

Familjeföretaget A&T tillverkar främst stålstommar till inredning i laboratoriemiljö. VD har nu analyserat fram följande uppgifter om en tänkbar investering i en laserskärningsmaskin:

Grundinvestering (G) = 100 tkr

Ekonomisk livslängd = 6 år

Intäkter (år 1-3) = 20 tkr

Intäkter (år 4-6) = 30 tkr

Driftskostnader (år 1-6) = 10 tkr

Säljvärde (år 6) = 15 tkr

Kalkylränta = 10 %

Hjälp VD:n att bedöma lönsamheten genom att beräkna NPV.

Uppgift I.19

En maskin kostar 800 tkr i inköp och förväntas generera intäkter som motsvarar 200 tkr under 10 år. I slutet av år 10 kan maskinen säljas för 10 % av grundinvesteringen. De årliga driftskostnaderna förväntas att vara konstanta under alla 10 åren. Hur höga får dessa driftskostnaderna maximalt vara för att investeringen ska vara lönsam? Kalkylräntan är 10 %.

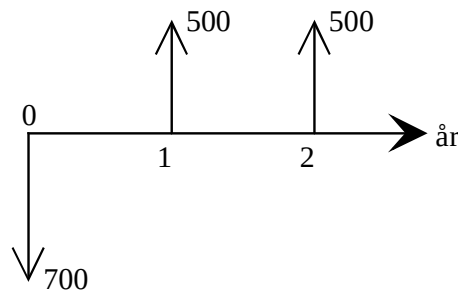
Uppgift I.20

En viss investering ger 500 kronor i avkastning i början av år 1. I slutet av år 1 erhålles 700 kronor och i slutet av år 2 erhålles 200 kronor från investeringen.

Utrangering sker efter år 2. Utrangeringsvärdet kan försummas. Hur mycket måste erhållas vid slutet av varje år i oändlig tid, för att ge samma nuvärde som den ovan beskrivna investeringen? Kalkylräntan i företaget är 5%.

Andra metoder för lönsamhetsberäkningar

Uppgift I.22

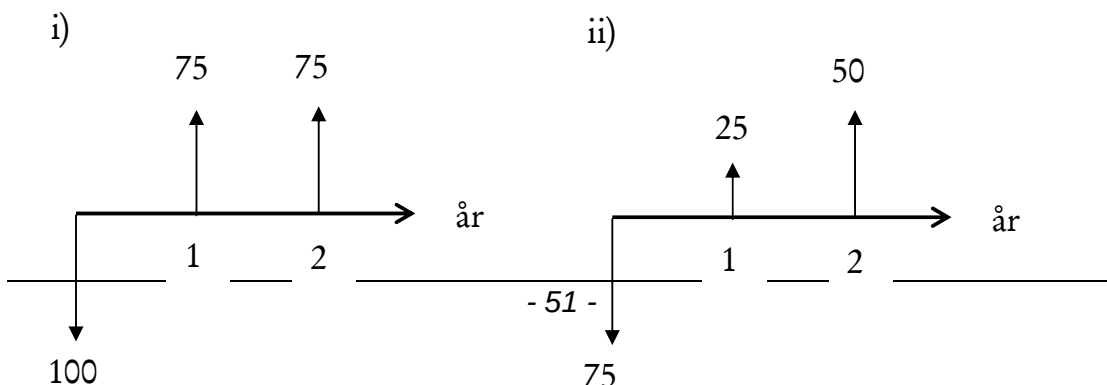


Betalningsströmmar i projektet illustreras i figuren ovan. Kalkylräntan är 10%.

- Bestäm projektets nuvärde.
- Bestäm internräntan. Är projektet lönsamt? Motivering krävs.

Uppgift I.23

Beräkna respektive internräntan för följande projekt:



Uppgift I.25

För tre investeringsprojekt gäller följande förväntade inbetalningar:

	I dag	Efter ett år	Efter två år
A	-300	600	0
B	-300	200	400
C	-300	300	300

- Beräkna internräntan för de tre projekten.
- Vilket projekt är mest lönsamt?

Uppgift I.26

Ett företag har fått ett erbjudande om ett långtidskontrakt med en av stadens mest besökta pizzerior. Detta projekt skulle innebära följande betalningar:

Slutet av år:	0	1	2	3	4
Summa:	-200	+100	+100	+100	+100

Beräkna för detta projekt:

- pay-off tiden, utan hänsyn till ränta.
 - nuvärdet om den diskreta kalkylräntan är på 10 %.
 - nuvärdeskvoten.
- (870827)

Uppgift I.27

Ett i praktiken vanligt mått för lönsamhetsbedömning av investeringar är payoff-metoden. Antag att vi har en given investering med försumbart restvärde enligt nedan:

G = Grundinvesteringsbelopp

a = Årliga konstanta inbetalningsöverskott

n = investeringens livslängd

- i) Visa att investeringens internränta kan approximeras med det inverterade värdet av payoff-tiden (utan hänsyn till ränta).
- ii) Hur påverkas approximationen av storleken på livslängden och internräntan?

(770830)

Uppgift I.28

För fem olika investeringsprojekt gäller följande:

Projekt	1	2	3	4	5
Nuvärde av framtida betalningar	70	20	60	30	10
Grundinvestering	30	15	35	13	5

Antag att ett företag har 70 till förfogande för investeringar år 1.
Rangordna projekten med hjälp av nuvärdeskvoter.

Uppgift I.19

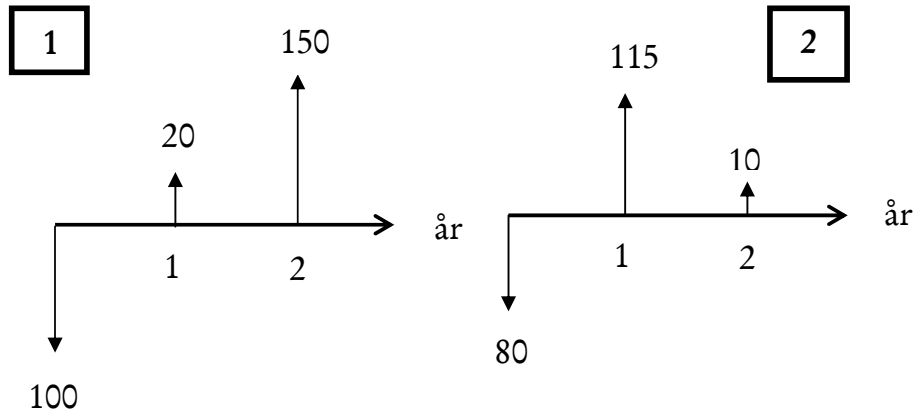
Investering	Grundinvestering	Disk. betalningsöverskott	Internränta
A	200	250	14.0%
B	300	350	15.0%
C	500	700	19.7%

- a) Rangordna alternativen i prioritetsordning om:
 - i) Tillgängligt kapital är en knapp resurs?

- ii) Investeringarna är helt oberoende?
- b) Varför ger inte internräntekriteriet och nuvärdeskriteriet
nödvändigtvis
samma rangordning av beroende investeringar?
(880317)

Uppgift I.20

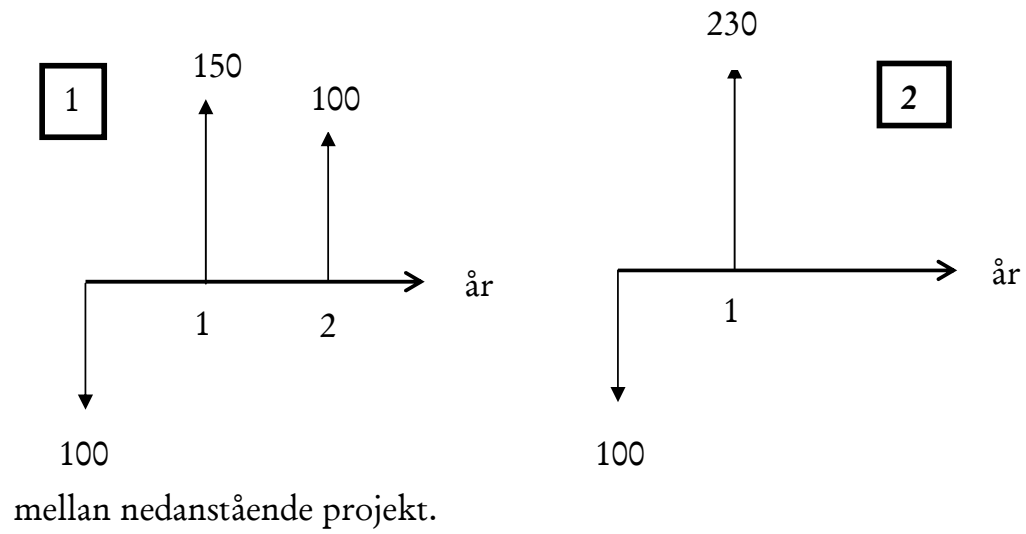
Antag att företaget A&T har att välja på nedanstående investeringsalternativ, 1 och 2. Ägarna, A och T har, har olika uppfattning om företagets kalkylränta. A tycker att 17 % räcker medan T kräver 19 %.



- Vilken investering är mest lönsam med A:s kalkylränta?
- Vilken investering är mest lönsam med T:s kalkylränta?
- Förklara skillnaden mellan svaren i uppgift a) och b).
- Beräkna Fisher-räntan.
- Vid en närmare granskning av kostnaden för grundinvesteringarna, som tidigare var 100 tkr (för investering 1) respektive 80 tkr (för 2), visade det sig att investering 1 istället skulle kosta 130 tkr och investering 2 istället 120 tkr. Vilken är den maximala kalkylräntan som A&T kan använda sig av för att respektive investering skall visa sig lönsam? Tolka resultatet. Finns det någon Fisherränta och är den relevant i detta fall?

Uppgift I.31

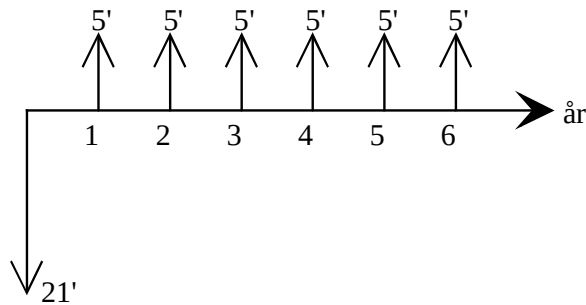
Utred när NPV-metoden och internräntemetoden ger olika rangordning



Real och nominell kalkyl med skatt och inflation

Uppgift I.32

SolÅretOm AB funderar på att köpa in ett nytt solarium. De betalningar som uppkommer beskrivs i figuren nedan. Kalkylräntan efter skatt är 7% och skattesatsen är 30%.



- Beräkna NPV utan hänsyn till skatteeffekter och avgör om investeringen är lönsam.
- Antag att SolÅretOm nu är vinstdrivande och gör avskrivningar enligt 20-regeln. Beräkna NPV efter skatt.
- Hur påverkas en investerings lönsamhet av hänsyn till skatteeffekter?

Uppgift I.33

Ett projekt har grundinvesteringen 1 300 tkr. Efter tre år beräknas projektet vara avslutat och värdelöst. Inbetalningsöverskotten de tre åren beräknas till (*beloppen angivna i löpande priser*):

år 1: 400 tkr

år 2: 600 tkr

år 3: 650 tkr

Inflationen antas bli 6% årligen och företaget räknar med en real kalkylränta på 10%.

- a) Vilket är sambandet mellan den nominella räntan före skatt och den reala räntan före skatt?

Beräkna projektets nuvärde med hjälp av:

- b) en nominell kalkyl.
c) en real kalkyl.
d) Förklara de principiella skillnaderna mellan en real kalkyl med en nominell kalkyl?

Uppgift I.34

Företaget A&T AB har för avsikt att satsa 1 Mkr och köpa en DNA-generator. Marginalskatten är 75% och företaget har alternativa placeringsmöjligheter till en ränta före skatt på 12%. Avskrivningstiden är 5 år.

- a) Bestäm hur stora avskrivningarna blir varje år om företaget varje år väljer den mest gynnsamma av 20-regeln eller 30-regeln i syfte att få skriva av så mycket som möjligt.
b) Antag att A&T inte orkar att välja avskrivningsregel varje år utan utnyttjar alltid 20-regeln. Efter 4 år säljer de maskinen för 800 000 kr. Beräkna restvärdet efter skatt vid försäljningen.

- c) Hur påverkas nuvärdet om maskinen istället för att skrivas av över fem år istället skrivas av omedelbart (d v s i sin helhet redan i slutet av år 1)? (Inga beräkningar behövs.)

Uppgift I.35

Transportföretaget Rudeknäcks Frakt AB har under sin driftige chef Rutger expanderat kraftigt och funderar på att köpa en ny lastbil. Man räknar med att behålla bilen i 6 år. Efter dessa 6 år har bilen ett restvärde på 5% av inköpsvärdet. Lastbilen som kostar 300 000 kr skrivs av enligt 20-regeln. Företaget väntar sig att bilen under de sex åren kommer att köra in

100 000 kr/år om man bortser från reparationskostnaderna. Dessa kostnader väntas vara 5000 kr/år de första tre åren för att sedan öka till 15 000 kr/år de tre sista åren. Det mycket vinstgivande företaget använder en kalkylränta före skatt på 15%. Antag att alla in- och utbetalningar sker vid respektive års slut.

- a) Beräkna investeringens nuvärde utan hänsyn till skatt.
- b) Beräkna investeringens nuvärde med hänsyn till skatt om skattesatsen $s = 40\%$.

(790307)

Uppgift I.37

Ett företag funderar på att köpa en ny maskin. Den kostar 1000 och kommer att skrivas av på fem år enligt 20-regeln.

Inbetalningsöverskotten beräknas till 300 de första tre åren och 200 de därpå följande. Restvärdet efter fem år beräknas vara 200. Alla belopp är angivna i dagens penningvärde. Företaget kräver en nominell förräntning före skatt på 25%. Inflationen beräknas bli 8% och företagets skattesats är 50%.

Beräkna nuvärdet av investeringen.

Uppgift I.38

Lille Kalle valde klokt nog att utbilda sig till civilingenjör. Detta resulterade i en studieskuld på 100 000 kr. Nu har tiden kommit, när han skall börja betala tillbaka skulden. Han har därvid reflekterat över CSN:s erbjudande om rabatt vid omedelbar återbetalning. Eftersom Kalle skall betala av sin studieskuld på 20 år, får han 20% rabatt av CSN om han utnyttjar erbjudandet.

Vid normal avbetalning betalar Kalle (något förenklat) 5 000 kr/år de fem första åren, 7 500 kr/år nästföljande tio år och 10 000 kr/år de fem sista åren. Betalningarna kan hänföras till slutet av respektive år och indexuppräkningsindex är inkluderad i de angivna beloppen (indexuppräkningsindex är som bekant inte avdragsgill).

Kalle vet, att den framtida inflationen är av stor betydelse i sammanhanget och har därför en real kalkylränta före skatt på 5%. Den nominella kalkylräntan (som du skall använda i uppgifterna nedan) kan då räknas ut som $r_n = (1 + r_r)(1 + i) - 1$, där i = inflation.

- a) Kalle vinner 80 000 kr på Lotto och har möjlighet att betala tillbaka studieskulden utan att ta något banklån. Han räknar med en marginalsattesats på 50%. Jämför CSN:s erbjudande med det normala avbetalningsalternativet då det är en förväntad inflation på 5 % per år.
- b) Kalle vinner inte på Lotto utan tar ett banklån på 80 000 kr. Låneräntan är 14% och amortering sker med 20 000 kr i slutet av år 5, 10, 15 och 20. Räntan betalas i slutet av varje år under lånets 20-åriga livslängd och är skattemässigt avdragsgill. Antag att inflationen förväntas bli 5 procent/år. Utvärdera CSN:s erbjudande med beaktande av den valda finansieringen då Kalle har 50% marginalsatt respektive 75% marginalsatt.

(851030)

Uppgift I.40

A&T, ett lönsamt rederi, överväger att investera i ett nytt fartyg för att frakta timmer på Östersjön. Transporterna är jämnt fördelade över året och marknaden är konkurrensutsatt.

Den totala initiala investeringen för ett fartyg är 5 Mkr. Av dessa 5 Mkr läggs 800 tkr i handpenning direkt vid beställningen av fartyget och resten betalas vid dess leverans ett år senare. Skeppet skrivs av linjärt över 20 år från och med leveransåret. Den årliga underhållskostnaden för fartyget är 200 tkr. Båten kan säljas i slutet av varje år inom den maximala tekniska livslängden på 40 år. Säljvärdet, som antas påverkas av den allmänna inflationen, redovisas i tabell nedan som en funktion av tid i drift, T .

Säljvärde för fartyget (i dagens penningvärde)

År i drift, T	Värde (Mkr)
1 – 4	$5 - 0.25T$
5 – 10	$4 - 0.2(T - 4)$
11 – 20	$2.8 - 0.15(T - 10)$
21 – 30	$1.3 - 0.1(T - 20)$
31 – 40	0.25

Marknadspris för ett års bränslebehov är i dag 500 tkr. När fartyget levereras medföljer ett bränslekontrakt som garanterar en årlig bränslekostnad på 500 tkr i fem år från och med leveranstillfället. Detta kontrakt kan inte förlängas, så A&T måste, efter de första fem åren, köpa bränsle till marknadspris.

Den årliga personalkostnaden är 1 500 tkr i dag. A&T har en effektiv skattesats på 34% och den nominella kalkylräntan är 20% före skatt. Inflationen prognosticeras till 2% per år. Alla kostnader stiger i takt med inflationen, undantaget bränslepriset som stiger med hela 4% per år. Den förväntade årliga intäkten är idag 3 500 tkr och på grund av den tuffa marknadssituationen förväntas intäkten endast stiga med 1% per år.

Alla kostnader och intäkter antas uppstå i slutet av varje år.

- a) Bestäm investeringens nuvärde om fartyget används till timmerfrakt i 6 år och därefter säljs.

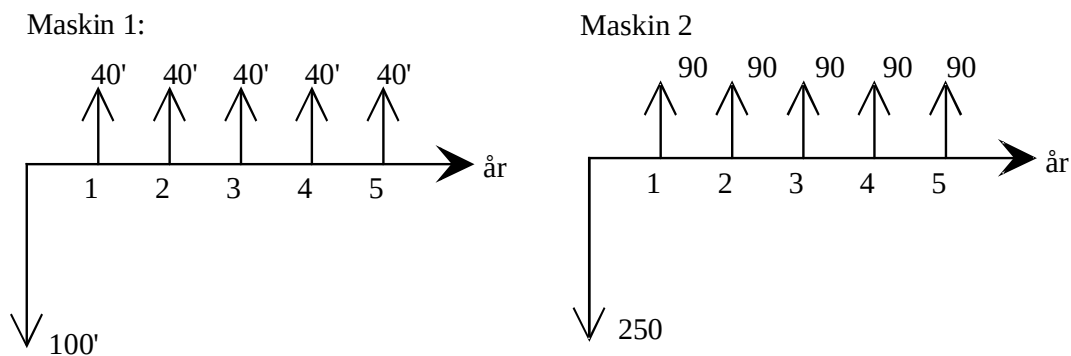
b) Vad är den 5-åriga realbränsleprisgarantin värd i dag?

(000821)

Utbyteskalkylering

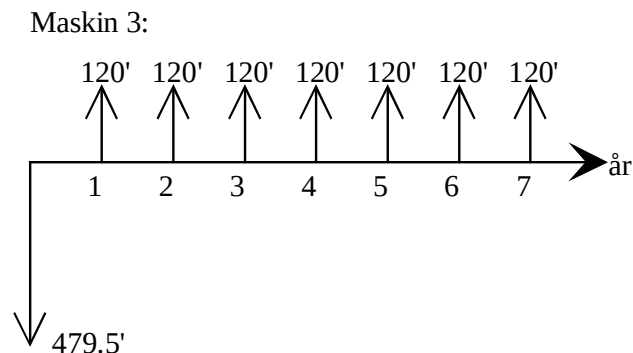
Uppgift I.41

Ett företag i Lingham skall köpa in en ny maskin för tillverkning av äppelcider. Man har att välja mellan två olika maskiner, med betalningsströmmar enligt nedanstående figurer och kalkylräntan $r = 10\%$. Betalningsströmmar i tusentals kronor.



- a) Vilken maskin bör företaget köpa om restvärdet efter fem år är noll för båda maskinerna?

Helt plötsligt dyker ett annat alternativ upp. Grannen har en hembränningsapparat som han vill bli av med p g a risken för en polisrazzia. Denna skulle kunna användas i ciderproduktionen, men av förklarliga skäl så är restvärdet även för denna investering noll. Betalningsflöden enligt figur nedan.



b) Vilken av maskinerna skall nu köpas in?

Uppgift I.42

Bränneriföretaget A&T i Borensberg, har redan en maskin. Maskinen sjunger dock på sista versen, men kommer att fungera i fem år till. Intäkterna de resterande åren är 20 000 kr/år och restvärdet är obefintligt, kalkylränta 10%. Därefter står företaget inför två alternativ:

- i) Köp en ny maskin år fem, för 150 000 kr som fungerar i tio år och återinvestering sker i oändlig tid. Intäkterna $c_i = 30\,000$ kr för $i = 1, 2, \dots, 10$. Restvärdet för den nya maskinen är noll.
 - ii) Renovera maskinen för 50 000 kr och den fungerar ytterligare tre år med intäkterna $c_6 = c_7 = c_8 = 25\,000$ kr. Restvärdet efter renovering är 10 000 kr. Byte sker därefter till den nya maskinen.
- a) Lös m h a nuvärdesmetoden.
 - b) Lös m h a att jämföra annuiteter. Anta investering i oändlig tid.

Uppgift I.45

Konsultföretaget A&T har riktat in sig på stålindustrin, ty de har fått överta ett gammalt valsverk, som dock har sett sina bästa dagar. A&T funderar därför på att införskaffa ett nytt valsverk, men är osäkra på när det är ekonomiskt optimalt att byta ut valsverket och behöver din hjälp.

Följande förutsättningar gäller för det gamla valsverket, som har en återstående teknisk livslängd på 10 år. Totala driftskostnaden under närmaste året beräknas till 20 tkr och därefter förväntas kostnaderna öka linjärt med 3 tkr/år. Valsverket är sedan länge avskrivet och går när som helst att sälja till ett företag, som sysslar med återvinning av delar från valsverk, för 10 tkr.

Det nya valsverket kostar 100 tkr i inköp och har konstanta driftskostnader på 10 tkr/år. Den ekonomiska livslängden är 6 år och därefter kan valsverket säljas för 40 tkr. Vilket år ska A&T byta valsverket om företaget använder en kalkylränta på 10%? Ingen hänsyn behöver tas till eventuell inflation och skatt.

Uppgift I.46

I ett företags maskinpark ingår bland annat en mycket gammal maskin. Dess driftskostnader under det närmaste året, inklusive reparationskostnader och intäktsbortfall vid driftstopp, beräknas till 21 500 kr. Under de närmast följande åren efter det första beräknas driftskostnaderna stiga med 1500 kr per år. Dess nuvarande utrangeringsvärde 10 000 kr beräknas sjunka till 5 000 kr om man behåller maskinen ytterligare ett år. Efter det första året räknar man med att den relativa värdeminskningen blir 10% per år utgående från maskinens värde i början av år 2.

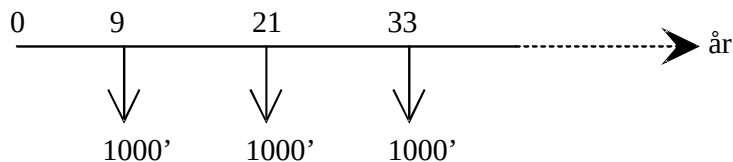
Avdelningsingenjören föreslår att maskinen byts ut mot en ny maskin, vars anskaffningspris är 80 000 kr. Denna beräknas ha en livslängd av sju år, varefter man tror sig kunna sälja den för 10 000 kr. De genomsnittliga driftskostnaderna för den nya maskinen blir 12 000 kr per år. Företagets kalkylränta är 15%. Vilket år är det mest lönsamt att genomföra maskinbytet?

(770611)

Kedjeinvesteringar

Uppgift I.46

Beräkna nuvärdet av nedanstående kedjeinvestering som förväntas pågå i oändlighet. Använd en kalkylränta på 10%.



Uppgift I.49

ABRA-KEMI AB är en ren processindustri vars produkter är olika derivat av råolja. För att få fram de olika produkterna måste råoljan genomlöpa en stor destillationsanläggning, som består av ett antal olika kolonner, reaktorer och ugnar. På grund av de ökade miljökraven, har företaget ålagts av myndigheterna att montera in ett svavelfilter i inloppet till en av kolonnerna. Detta måste i framtiden bytas ut vart fjärde år, för att reningshållningsnormerna skall vara uppfyllda.

Eftersom montering respektive byte av filter inte kan ske utan att hela anläggningen släcks ner, uppstår en kostnad för stillestånd av 40 000 kr och en för filterbyte av 5 000 kr varje gång. Dessutom innebär nedsläckningen att en speciell Kobolt/mangan-katalysator som ingår i en avsvavlingsreaktor måste bytas ut. Katalysatorn som kostar 110 000 kr, har i vanliga fall en livslängd av fyra år och utbyttes senast för ett år sedan. Myndigheterna har lovat täcka 75% av merkostnaden som ett införande av filtret medför. Din uppgift som konsult blir nu, att utifrån företagets kalkylränta på 20% beräkna hur stor merkostnaden (uttryckt i nuvärde) blir.

(740309)

Uppgift I.50

En hyresvärd reparerar alla lägenheter vart 10:e år. Av rättviseskäl satsar han en lika stor summa pengar i alla lägenheter vid varje reparationstillfälle. Detta belopp uppgår till 20 000 kronor. För fyra år sedan reparerades alla lägenheterna. Färgen, som då användes, var felblandad (fabrikationsfel) så den börjar nu flagna. Därför krävs nu en ommålning. Den kostar 17 000 kr per lägenhet. Färgen skulle enligt garantiutfästelse hålla i 10 år, varför färgbolaget nu skall stå för den merkostnad som uppstår. Till följd av det inträffade missödet skall reparationerna i fortsättningen ske vart 8:e år till en kostnad av 20 000 kronor/lägenhet. Det ställda räntekravet på 10% accepteras av färgbolaget. Reparationerna förväntas pågå i all framtid.

Hur stor blir den merkostnad per lägenhet, som hyresvärden kan utkräva av färgbolaget?

Kontinuerliga betalningsflöden och räntor

Uppgift I.51

Kontinuerliga räntor är i vissa sammanhang enklare att använda än diskreta.

- a) Vad blir nuvärdet av en betalning på 100 000 kr som kommer om ett år om man använder en kontinuerlig ränta på 12.00%?
- b) Vilken diskret ränta motsvarar den kontinuerliga på 12.00%?

Uppgift I.52

Den diskreta kalkylräntan är 10 % före skatt. Skattesatsen är 30 %. Beräkna den kontinuerliga räntan efter skatt.

Uppgift I.53

En 3-månaders statsskuldväxel ger avkastningen 4.21% (enkel årsränta). Vilken kontinuerlig ränta motsvarar detta? (Ledning: Börja med att räkna ut den diskreta, effektiva avkastningen.)

Uppgift I.56

Idag är det 1 januari 1999 och den franske vingrossisten, A&T Bordeaux, har just fått in 1998 års produktion av årgångsvin från ett av slotten i trakten. Av försäljningspolitiska skäl väntar han med att börja sälja av vinet tills 1 januari 2000. Efterfrågan på vinet kan erfarenhetsmässigt beräknas med funktionen

$$V = K * e^t \quad ; K = 200 \text{ flaskor}; t = \text{tiden i år mätt från början av år 2000}$$

Grossisten säljer flaskorna för 24 kr/st. Med ovanstående efterfrågan kommer det inkomna partiet att räcka i tre år. Grossistens kontinuerliga

kalkylränta är 8%. Beräkna nuvärdet av försäljningen, d v s nuvärdet 1 januari 1999.

Uppgift I.57

En slipmaskin kostar 90 000 kr. Dess restvärde minskar med 5 000 kr/år till 15 000 kr efter 15 år som är den längsta tekniska livslängden.

Driftskostnaderna är (t = maskinens ålder):

Direkt lön	18 000 kr/år
Indirekt lön	1 500 kr/år
Ström	2 500 kr/år
Underhåll	$5\,000 + 500(t-1)$ kr/år

Beräkna nuvärdet av kostnaderna för slipmaskinen om den används i 15 år. Kontinuerlig kalkylränta är 10%. Driftskostnaderna är kontinuerliga.

Uppgift I.58

Vi har 1000 kr till förfogande för att investera i projekt A eller B. Vi kräver en avkastning på kapitalet på 50 procent/år. Projekt A kräver en investering på 1000 kr i början av år 1 samt därefter en återinvestering på 1000 kr vartannat år i oändlig tid med start i början av år 3. Projektet ger 1000 kr i avkastning i slutet av varje år i oändlig tid med början år 1. Projektet B kräver en investering på 1000 kr i början av år 1. Därefter ger projektet kontinuerligt avkastningen $k \cdot e^{0.2t}$ i oändlig tid, där t är tiden (år) och k är en konstant.

- a) Vad är nuvärdet av projekt A?
- b) Vad är nuvärdet av projekt B?
- c) Vad är villkoret på k för att projekt B skall vara bättre än projekt A?

(750401)

LÖSNINGAR

Beslutsteori

Lösning B.5

$$a) \quad u_{ij} = -p_{in} \cdot a_i + p_{ut} \cdot \min\{a_i, b_j\} + p_{rea} \cdot \max\{0, a_i - b_j\}$$

	$b_1=10$	$b_2=20$	$b_3=30$	$b_4=40$	EMV(a_i)
	$q_1=0,4$	$q_2=0,3$	$q_3=0,2$	$q_4=0,1$	
$a_1=10$	500	500	500	500	500
$a_2=20$	300	1000	1 000	1 000	720
$a_3=30$	100	800	1 500	1 500	730
$a_4=40$	-100	600	1 300	2 000	600

Maximera EMV $\Rightarrow$ **Välj a_3 = köp in 30 enheter**

$$b) \quad EVPI = \min EOL = EPC - EMV_{\max} = \sum u_j^* q_j - EMV_{a_3} = 1000 - 730 = 270$$

Lösning B.6

$$a) \quad (r = \text{regn i mm})$$

	$r < 1$	$1 \leq r < 6$	$6 \leq r < 10$	$r \geq 10$	EMV(a_i)
	$q_1=0,4$	$q_2=0,3$	$q_3=0,2$ (0,5-0,3)	$q_4=0,1$	
a_1 =ingen försäkr	0	-2 000	-5 000	-9000	-2 500
a_2 =alt 1	-1 000	8 000	-6 000	-10 000	-200
a_3 =alt 2	-3 000	6 000	3 000	-12 000	0
a_4 =alt 3	-6 000	3 000	0	-4 000	-1 900

$\Rightarrow$ **Välj alt 2**

$$b) \quad EMV(a_4) = 0.4(-x) + 0.3(11' - x - 2') + 0.2(11' - x - 5') + 0.1(11' - x - 9') > (\max EMV = 0)$$

$$\Rightarrow x \leq 4\,100 \text{ kr}$$

Lösning B.7

$$a) \quad u_{ij} = -p_{in} \cdot a_i + p_{ut} \cdot \min\{a_i, b_j\} + p_{rea} \cdot \max\{0, a_i - b_j\}$$

	$b_1=20$	$b_2=30$	$b_3=40$	EMV(a)
	$q_1=0, \quad q_2=0, \quad q_3=0,$ 4 3 3			
$A_1=2$ 0	100	100	100	100
$A_2=3$ 0	100	180	180	148
$A_3=4$ 0	80	160	240	152

Maximera EMV $\Rightarrow$ **Köp 40 stycken**

b) Nytt alternativ: $EMV(\text{köpa in för 11 kr/st}) = 0.4(300-220) + 0.3(450-330) + 0.3(600-440) = 116 < 152 \Rightarrow$ **Det lönar sig ej**

c) $p = \text{försäljningspriset}$

$$EMV(a_1) = 20p - 200$$

$$EMV(a_2) = 0.4(20p + 70 - 270) + 0.6(30p - 270) = 26p - 242$$

$$EMV(a_3) = 0.4(20p + 140 - 360) + 0.3(30p + 70 - 360) + 0.3(40p - 360) = 29p - 283$$

$$EMV(a_1) > 0 \Rightarrow p > 10; \quad EMV(a_2) > 0 \Rightarrow p > 121/13; \quad EMV(a_3) > 0$$

$$\Rightarrow p > 283/29$$

$$EMV(a_3) \geq EMV(a_2) \Rightarrow p \geq 41/3$$

$\Rightarrow$ **Köp 30 stycken om $121/13 < p < 41/3$**

Köp 40 stycken om $p \geq 41/3$

Lösning B.9

- a) Antag inköp av x st. granar! $\Rightarrow 9x > 6x + 500$
 $\Rightarrow$ Om $x > 167$, köp av bonden!

$$x_{\min} = 225 \text{ (enligt tabellen i uppgiften)} > 167 \Rightarrow \textbf{Köp av bonden!}$$

- b) $a = \text{försäljningspriset på julafton}$

	$b_1=225$	$b_2=250$	$b_3=275$	$b_4=300$	EMV(a_i)
	$q_1=0,2$	$q_2=0,4$	$q_3=0,3$	$q_4=0,1$	
$a_1=225$	850	850	850	850	850
$a_2=250$	$700+25a$	1000	1000	1000	$940+5a$
$a_3=275$	$550+50a$	$850+25a$	1150	1150	$910+20a$
$a_4=300$	$400+75a$	$700+50a$	$1000+25a$	1300	$790+42.5a$

$$a \leq -18 \Rightarrow \text{köp 225 granar}$$

$$-18 < a \leq 2 \Rightarrow \text{köp 250 granar}$$

$$2 < a \leq 5.33 \Rightarrow \text{köp 275 granar}$$

$$a > 5.33 \Rightarrow \text{köp 300 granar}$$

- c) $a = 5 \text{ kr} \Rightarrow \text{EPC}(\text{förväntad vinst under säkerhet}) = 850 \cdot 0.2 + 1000 \cdot 0.4 +$
 $1150 \cdot 0.3 + 1300 \cdot 0.1 = 1045 \text{ kr}$

- d) $\text{EVPI}(\text{värdet av perfekt information}) = \text{EPC} - \text{EMV}_{\max} =$
 $\text{EOL}_{\min}(\text{alternativförlust}) = 1045 - 1010 = 35 \text{ kr}$

Lösning B.10

a)

	$b_1=5$	$b_2=15$	$b_3=25$	EMV(a_i)
	$q_1=0,2$	$q_2=0,5$	$q_3=0,3$	
$a_1=0$	0	0	0	0
$a_2=10$	0	250	250	200
$a_3=20$	-250	250	500	225
$a_4=30$	-500	0	500	50

⇒ **Beställ 20 skidpar!**

b) $x = \text{bristkostnad}$

	$b_1=5$	$b_2=15$	$b_3=25$	EMV(a_i)
	$q_1=0,2$	$q_2=0,5$	$q_3=0,3$	
$a_1=0$	$-5x$	$-15x$	$-25x$	$-16x$
$a_2=10$	0	$250-5x$	$250-15x$	$200-7x$
$a_3=20$	-250	250	$500-5x$	$225-1,5x$
$a_4=30$	-500	0	500	50

a_3 är alltid bättre än a_1 och a_2 !

⇒ **Köp 20 st par om $0 \leq x < \frac{350}{3}$**
Köp 30 st par om $x \geq \frac{350}{3}$

Lösning B.13

	$b_1=10$	$b_2=11$	$b_3=12$	$b_4=13$	$b_{45}=14$	EMV(α)
	$q_1=1/5$	$q_2=1/3$	$q_3=1/6$	$q_4=1/6$	$q_5=2/15$	

$\alpha_1 = 10$	600	640	680	690	700	655
$\alpha_2 = 11$	550	660	700	740	750	670
$\alpha_3 = 12$	500	610	720	760	800	656.7
$\alpha_4 = 13$	450	560	670	780	820	627.7
$\alpha_5 = 14$	400	510	620	730	840	587

$\Rightarrow$ Maximera EMV = 670 kr. Hyrbil AB bör ha **11 egna bilar**.

Lösning B.15

Utdelningsmatris:

	S1	S2	S3	S4	Wald	Laplace	Hurwicz $\gamma = 0.6$
A1	-10	-5	-2	-18	-18	-35/4	-8.4
A2	-8	-8	-8	-10	-10	-34/4	-8.8
A3	-2	-11	-19	-2	-19	-34/4	-8.8

Regretmatris:

	S1	S2	S3	S4	Savage
A1	8	0	0	16	16
A2	6	3	6	8	8
A3	0	6	17	0	17

- a) Alt 2
- b) Alt 2
- c) Alt 2 eller alt 3
- d) Alt 1

Lösning B.17

	S1	S2	S3	Laplace	Maximax	Hurwicz $\gamma = 0.5$
B1	x	10	15	$(25+x)/3$	x eller 15	$x < 10 \Rightarrow 7.5 + x/2$ $10 \leq x < 15 \Rightarrow 12.5$ $x \geq 15 \Rightarrow 5 + x/2$
B2	8	12	12	32/3	12	10
B3	14	12	8	34/3	14	11

- a) B3 om $x \leq 9$, annars B1
- b) B1
- c) B3 om $x \leq 7$, annars B1

Lösning B.18

Låt betalningsmatrisen ha elementen u_{ij} . Låt naturens alternativ ha sannolikheterna $p_1, p_2, \dots, p_m$.

$$EMV_i = \sum_{j=1}^m p_j u_{ij}$$

$$EOL_i = \sum_{j=1}^m p_j (\max_k u_{kj} - u_{ij}) = \sum_{j=1}^m p_j \max_k u_{kj} - EMV_i$$

$$\therefore EOL_i = \text{konstant} - EMV_i$$

- i) Genom att maximera EMV_i minimeras högerledet, varför EOL_i minimeras.
- ii) Genom att erhålla fullständig information då naturen väljer j kan utdelningen $\max_k u_{kj}$ erhållas. I genomsnitt erhålles därvid

$$\sum_{j=1}^m p_j \max_k u_{kj}$$

Förbättringen i utdelning till följd av fullständig information blir därför i genomsnitt:

$$\sum_{j=1}^m p_j \max_k u_{kj} - \max_i \sum_{j=1}^m p_j u_{ij} = \min_i EOL_i$$

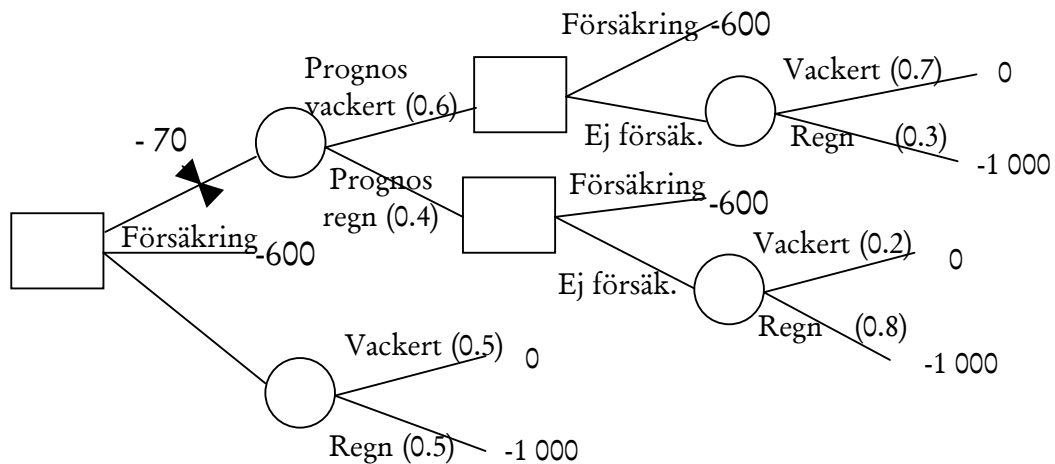
varför $EOL_{\min}$ tolkas som förväntat värde av fullständig information.

Lösning B.23

- a) **Välj A-a** $\Rightarrow EMV = 0.6 \cdot (0.2 \cdot (-50) + 0.8 \cdot 100) + 0.4 \cdot 50 = 62$
 b) Vill ej riskera förlust $\Rightarrow$ Kapa grenen A-a
 $\Rightarrow$ Välj B-c eller B-d ($EMV = 57$)
 c) Två alternativ:
 $A-a \Rightarrow q = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$
 $B-d \Rightarrow q = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35$
 $\Rightarrow$ **Välj A - a**

Lösning B.29

a)



$$EMV_{\text{prognos}} = 0.6 \cdot (0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot (-1000)) + 0.4 \cdot (-600) - 70 = -490 \text{ kr}$$

$$EMV_{\text{försäkring}} = -600 \text{ kr}$$

$$EMV_{\text{utan prognos}} = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot (-1000) = -500 \text{ kr}$$

Alternativ lösning m h a trädnedbytning

$\Rightarrow$ **Välj prognos och ta försäkring när prognos visar regn!**

b) Maximalt villig att betala för prognos: $500 - (490 - 70) = 80 \text{ kr}$

$$c) P(\text{prog} = \text{regn} | \text{regn}) = \frac{P(\text{regn} | \text{prog} = \text{regn}) \cdot P(\text{prog} = \text{regn})}{P(\text{regn})} = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.5} = 0.64$$

Lösning B.34

a)

$$EMV = \frac{(10 * x^{1/2} + x - x) * x}{150} - x(1 - \frac{x}{150}) = \frac{10 * x^{3/2} + x^2}{150} - x, 0 \leq x \leq 100$$

$$\frac{\partial EMV}{\partial x} = \frac{15 * x^{1/2} + 2x}{150} - 1$$

Extrempunkt: $x = 32,345$

Teckenstude (- 0 +) ger $x = 32,3$ är minpunkt(!) $\Rightarrow EMV(32,3) = -13,1$

Test av intervallgränserna:

$$x = 0 \Rightarrow EMV(0) = 0$$

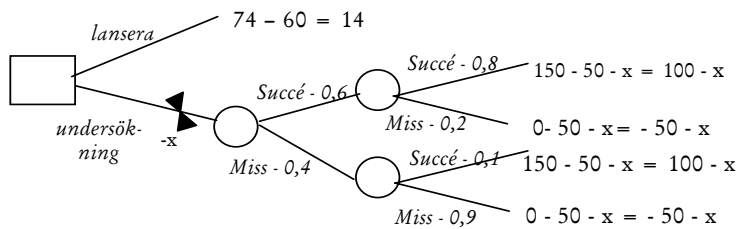
$$x = 100 \Rightarrow EMV(100) = 33,3$$

(Kan också ses grafiskt- växande andragradsfunktion)

$\Rightarrow$ satsa maximala 100 miljoner kr på marknadsföring.

b)

(utdelning i miljoner kr)



EMV (lansera nu) = $74 - 60 = 14$ miljoner kr

$$EMV$$
 (undersökning) = $0,48 * (100 - x) + 0,12 * (-50 - x) + 0,04 * (100 - x) + 0,36 * (-50 - x) = 0,52(100 - x) + 0,48(-50 - x) = 28 - x$

Värdet av marknadsundersökning: EMV (undersökning) > EMV (lansera nu)

$$28 - x > 14 \Rightarrow x < 14 \text{ miljoner kr.}$$

$\Rightarrow$ Företaget är maximalt villigt att betala 14 miljoner kr.

Lösning B.35

a) Förväntad utdelning = trädets värde = 16

b) Rena strategier:

$$\lambda_1 = a_1, b_1, c_1$$

$$\lambda_2 = a_1, b_1, c_2$$

$$\lambda_3 = a_1, b_2, c_1$$

$$\lambda_4 = a_1, b_2, c_2$$

$$\lambda_5 = a_2, b_1, c_1$$

$$\lambda_6 = a_2, b_1, c_2$$

$$\lambda_7 = a_2, b_2, c_1$$

$$\lambda_8 = a_2, b_2, c_2$$

c) $EMV(\lambda_1) = 0.5(0.2 \cdot 10 + 0.8 \cdot 20) + 0.5(0.4 \cdot 10 + 0.6 \cdot 0) = 11$

$$EMV(\lambda_2) = 14$$

$$EMV(\lambda_3) = 13$$

$$EMV(\lambda_4) = 16$$

$$EMV(\lambda_5) = 9$$

$$EMV(\lambda_6) = 12$$

$$EMV(\lambda_7) = 11$$

$$EMV(\lambda_8) = 14$$

d) Naturens strategier

$$\eta_1 = s_1, t_1 \quad \eta_3 = s_2, u_1$$

$$\eta_2 = s_1, t_2 \quad \eta_4 = s_2, u_2$$

e) Utdelningsmatris

	η_1	η_2	η_3	η_4	EMV
	$q_1=0,$ 1	$q_2=0,$ 4	$q_3=0,$ 2	$q_4=0,$ 3	
λ_1	10	20	10	0	11
λ_2	10	20	10	10	14
λ_3	10	20	20	0	13
λ_4	10	20	20	10	16
λ_5	30	10	10	0	9
λ_6	30	10	10	10	12
λ_7	30	10	20	0	11
λ_8	30	10	20	10	14

Lösning B.38

a) Beslutsfattarens strategier

$$\lambda_1 = a_1, b_1$$

$$\lambda_2 = a_1, b_2, c_1$$

$$\lambda_3 = a_1, b_2, c_2$$

$$\lambda_4 = a_2, d_1, e_1$$

$$\lambda_5 = a_2, d_1, e_2$$

$$\lambda_6 = a_2, d_2, e_1$$

$$\lambda_7 = a_2, d_2, e_2$$

b) Betalningsmatris

	O_1	O_2	EMV
	p_1	$1 - p_1$	

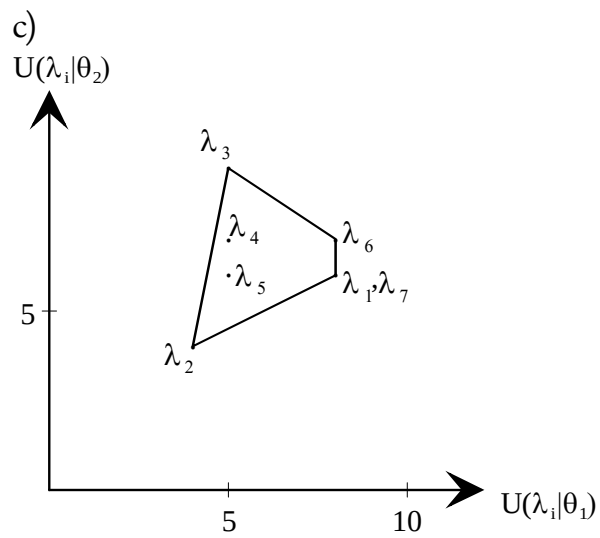
λ_1	8	6	$6 + 2p_1$
λ_2	4	4	4
λ_3	5	9	$9 - 4p_1$
λ_4	5	7	$7 - 2p_1$
λ_5	5	6	$6 - p_1$
λ_6	8	7	$7 + p_1$
λ_7	8	6	$6 + 2p_1$

$$p_1 < \frac{2}{5} \Rightarrow \lambda_3 \text{ bäst.}$$

$$p_1 = \frac{2}{5} \Rightarrow \lambda_3 \text{ eller } \lambda_6 \text{ bäst.}$$

$$\frac{2}{5} < p_1 < 1 \Rightarrow \lambda_6 \text{ bäst.}$$

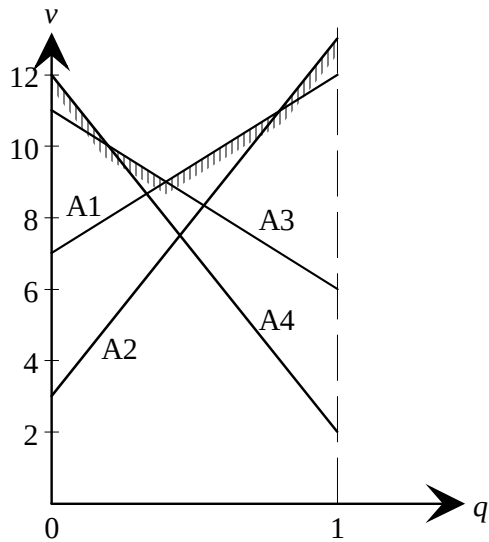
$$p_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_6 \text{ eller } \lambda_7 \text{ bäst.}$$



Lösning S.3

a) $v^* > u^* \Rightarrow$ Blandade strategier

B1 dominerar över B3, q andel av B1



$$A1 = A3 \Rightarrow \begin{cases} q^* = 0,4 \\ v^{**} = 9 \end{cases}$$

B väljer B1 i fyra fall av tio, B2 i de övriga.

b) A4 och A2 är redundanta

$$p \text{ är andel av A1} \Rightarrow 12p + 6(1-p) = 7p + 11(1-p) \Rightarrow p^* = 0.5$$

$\Rightarrow$ A väljer A1 i vartannat fall och A3 i vartannat.

c) Spelets värde = $v^{**} = u^{**} = 0.5 \cdot 12 + 0.5 \cdot 6 = 9$

Lösning S.4

a) Normalform:

Rena strategier för A:

A1 a_1, d_1, e_1

=

A2 a_1, d_1, e_2

=

A3 a_1, d_2, e_1

=

A4 a_1, d_2, e_2

=

A5 a_2, c_1

=

A6 a_2, c_2

=

Rena strategier för B:

B1 = b_1, f_1, g_1

B2 = b_1, f_1, g_2

B3 = b_1, f_2, g_1

B4 = b_1, f_2, g_2

B5 = b_2, f_1, g_1

B6 = b_2, f_1, g_2

B7 = b_2, f_2, g_1

B8 = b_2, f_2, g_2

b) Normalform:

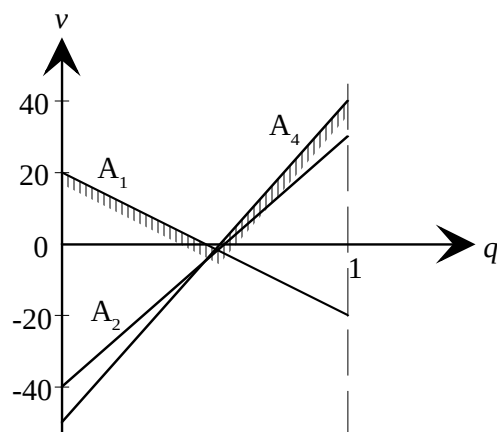
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	Radmin
A1	3	3	3	3	-1	-1	-1	-1	-1
A2	3	3	3	3	1	1	1	1	1
A3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
A4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A5	-1	-1	4	4	-1	-1	4	4	-1
A6	4	0	4	0	4	0	4	0	0
Kol. max	4	3	4	4	4	1	4	4	

- c) Optimala strategier: **A väljer A2 eller A4. B väljer B6** ger jämvikt i **(A2,B6) eller (A4,B6)**. (*se tabell*)

Lösning S.6

- a) $v^* = 20 > -20 = u^* \Rightarrow$ blandade strategier. A1 dominerar A3, B4 dominerar B1 och B3 dominerar B2.

Bestäm först B's strategier, q är andel av B3 och $(1-q)$ av B4.



$$A1 = A4 \Rightarrow q^* = 7/13 \Rightarrow v^{**} = -20 \cdot 7/13 + 20 \cdot 6/13 = -1.54$$

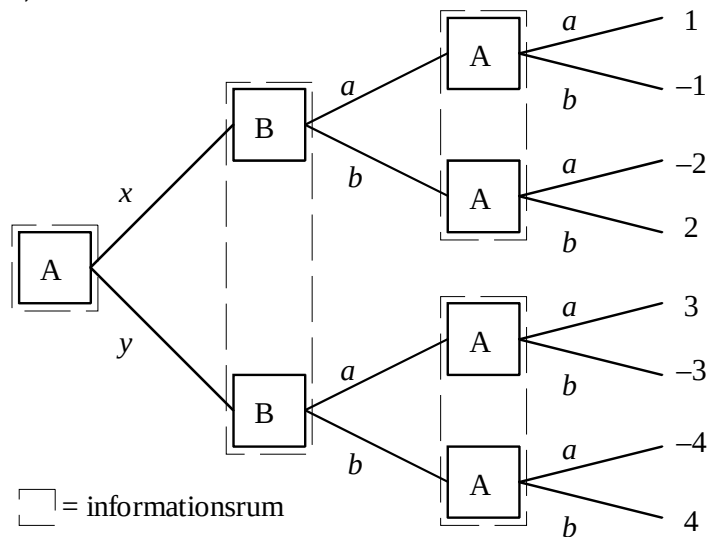
För A gäller nu att A2 är redundant, se figur, p är andel av A1 och $(1-p)$.
 $-20p + 40(1-p) = 20p - 50(1-p) \Rightarrow p^* = 9/13$

A's vinst = $u^{**} = -1.54$, då A väljer A1 i 9 fall av 13 och A4 i de övriga.

- b) B väljer B3 i 7 fall av 13 och B4 i de övriga (analog lösning med a-uppgiften).

Lösning S.9

a)

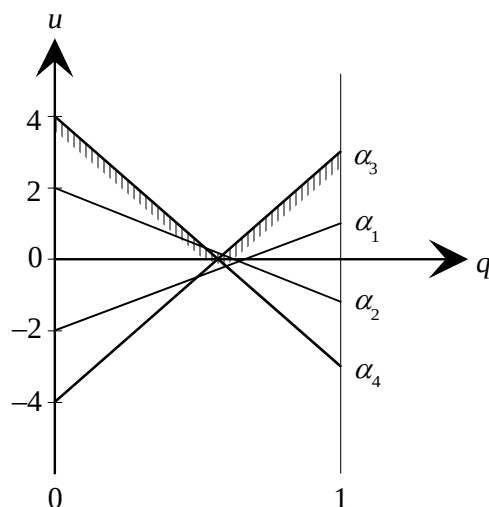


a)

	$\beta_1 = a$	$\beta_2 = b$	radmin
$\alpha_1 = xa$	1	-2	-2
$\alpha_2 = xb$	-1	2	-1
$\alpha_3 = ya$	3	-4	-4
$\alpha_4 = yb$	-3	4	-3
kol. max	3	4	

Ej sadelpunkt $\Rightarrow$ Blandade strategier

B väljer β_1 med slh q



Optimum fås då $\alpha_2 = \alpha_3 \Rightarrow$

$$q \cdot (-1) + (1-q) \cdot 2 = 3q + (1-q) \cdot (-4) \Rightarrow q^* = 0,6$$

A väljer α_2 med slh p . Optimum fås i skärningen $\alpha_2 = \alpha_3 \Rightarrow p^* = 0.7$ dvs A väljer α_2 med slh 0,7 och α_3 med slh 0,3.

$$\text{Spelets värde} = -0.7 + 0.3 \cdot 3 = 0.2$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1 = 0.6 \\ \beta_2 = 0.4 \end{array} \right\} EPC_A = 0.6 \cdot 3 + 0.4 \cdot 4 = 3.4$$

Lösning S.11

a) $u^* = \max_i \min_j u_{ij} = \max_i \{8, 2\} = 8$ (plats (1;1))

$$v^* = \min_j \max_i u_{ij} = \min_j \{12, 4\} = 4$$
 (plats (1;1))

$\Rightarrow$ Ja, ty båda spelarna väljer punkten (1;1)

b) A1 dominerar ej direkt över A2, ty $10 < 20$, men totalt sett finns **dominans**, ty B1 dominerar bort B2 och därefter dominerar A1 över A2.

c) Ja, om de väljer (2;2).

d) Nej, ty vid samarbete ökar A's intäkt och inte B's.

Lösning S.12

a)

- 1) B2 dominerar B3
- 2) A1 dominerar A2
- 3) B1 eller B2 dominerar B4
- 4) A4 dominerar A3
- 5) B2 dominerar B1
- 6) A4 dominerar A1

Ger lösningen **[A4,B2]**.

b)

	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄
a ₁	[0];{-2}	-7;{-2}	-3;-3	{-1};-7
a ₂	-3;-5	-8;-2	-2;-2	{-1};[1]
a ₃	-7;[1]	-3;0	-6;-3	-2;0
a ₄	-2;-4	[0];[0]	[-1];-1	-7;-7

- | | |
|---|---|
| ✓ A föredrar A1 då B spelar B1 | ✓ B föredrar B1 eller B2 då A spelar A1 |
| ✓ A föredrar A4 då B spelar B2 | |
| ✓ A föredrar A4 då B spelar B3 | ✓ B föredrar B4 då A spelar A2 |
| ✓ A föredrar A2 eller A1 då B spelar B4 | ✓ B föredrar B1 då A spelar A3 |
| | ✓ B föredrar B2 då A spelar A4 |

Detta ger *svag* Nash i **[A1,B1]** (ty B är *indifferent* mellan B1 och B2 då A spelar A1) och **[A2,B4]** *stark* i **[A4,B2]**.

c) Antag motsatsen: $s \in D$ och $s \notin ne$. Då $\exists s': u_k(s') > u_k(s)$ för en spelare k , dvs strategi s' dominerar strikt s , vilket ger motsägelsen $s \notin D$. Alltså gäller $s \in D \Rightarrow s \in ne$.

Slutsats: En iterativ dominanslösning är därmed också en svag Nashlösning.

Lösning S.13

a)

i)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
A_1	1;1	$\{3\};2$	$[3];\{3\}$	-1;-7	$\{4\};\{X\}$
A_2	$[4];\{1\}$	$\{3\};0$	$2;\{1\}$	-1; $\{1\}$	3;-1
A_3	0;0	1;0	1; $[1]$	$[2];0$	$\{4\};0$

- ✓ A föredrar A_2 då B spelar B_1
- ✓ A föredrar A_1 eller A_2 då B spelar B_2
- ✓ A föredrar A_1 då B spelar B_3
- ✓ A föredrar A_3 då B spelar B_4
- ✓ A föredrar A_1 eller A_3 då B spelar B_5
- ✓ B föredrar B_3 eller B_5 (beroende på X) då A spelar A_1
- ✓ B föredrar B_1 eller B_3 eller B_4 då A spelar A_2
- ✓ B föredrar B_3 då A spelar A_3

Detta ger:

$X < 3$: Stark i $[A_1, B_3]$ och svag i $[A_2, B_1]$

$X = 3$: Svag i $[A_2, B_1]$ och $[A_1, B_3]$ och $[A_1, B_5]$

$X > 3$: Svag i $[A_2, B_1]$ och $[A_1, B_5]$

ii) Till exempel Battle of the Sexes:

	b_1	b_2
a_1	(2;1)	(0;0)
a_2	(0;0)	(1;2)

$[A_1, B_1]$ och $[A_2, B_2]$ är starka Nashlösningar

Lösning S.15

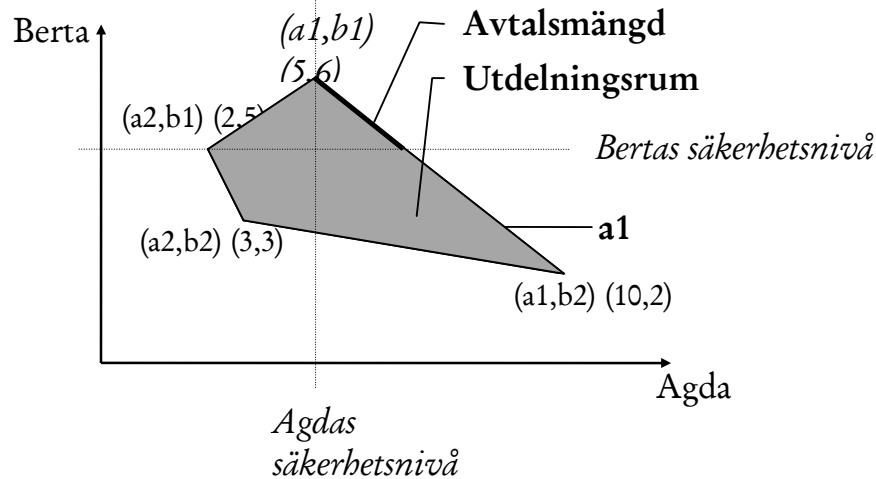
a) Tvåpersoners icke-konstantsummespel.

b)

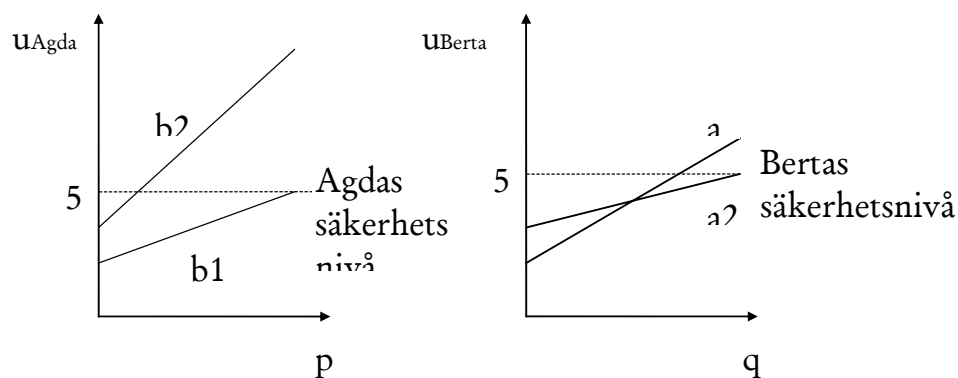
		Berta	
		Högervarv (b1)	Vänstervarv (b2)
Agda	Högervarv (a1)	5,6	10,2
	Vänstervarv (a2)	2,5	3,3

c)

d) De strategiskombinationer som inte båda spelarna kan vinna på att lämna. I det här fallet sammanfaller paretooptimaliteten med de punkter som ligger i den linje som svarar mot en ren a1-strategi.

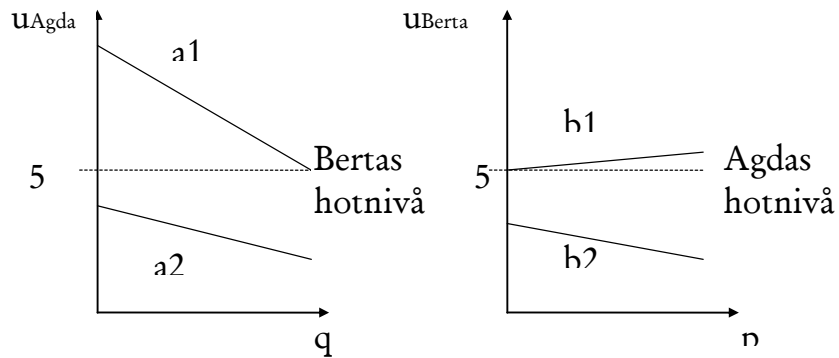


e) Avtalsmängden är den del av det paretooptimala området som ligger



över respektive spelares säkerhetsnivå (se figuren ovan).

Förutsatt att Agda väljer a_1 med slh p och a_2 med slh $1-p$ och att Berta väljer b_1 med slh q och b_2 med slh $1-q$.



f)

Agdas hotstrategi blir att ta vänstersvängen och Bertas att ta högersvängen.

Lösning S.16

a)

Köparens strategier Säljarens strategier

$$\lambda_1 = \beta_1, \beta_3, \beta_5$$

$$\gamma_1 = \alpha_1, \alpha_3$$

$$\lambda_2 = \beta_1, \beta_4, \beta_5$$

$$\gamma_2 = \alpha_1, \alpha_4$$

$$\lambda_3 = \beta_1, \beta_3, \beta_6$$

$$\gamma_3 = \alpha_2, \alpha_5$$

$$\lambda_4 = \beta_1, \beta_4, \beta_6$$

$$\gamma_4 = \alpha_2, \alpha_6$$

$$\lambda_5 = \beta_2, \beta_3$$

$$\lambda_6 = \beta_2, \beta_4$$

(köparens nytta ; säljarens nytta)

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
λ_1	(6;-3)	(1;2)	(6;-3)	(0;0)
λ_2	(6;-3)	(1;2)	(1;2)	(1;2)
λ_3	(6;-3)	(0;0)	(6;-3)	(0;0)
λ_4	(6;-3)	(0;0)	(1;2)	(1;2)
λ_5	(0;0)	(0;0)	(6;-3)	(0;0)
λ_6	(0;0)	(0;0)	(1;2)	(1;2)

b)

1) γ_2 dominerar γ_1

2) λ_1 dominerar då λ_3, λ_5 och λ_2 dominerar $\lambda_4, \lambda_6 \Rightarrow \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$

stryks

3) γ_2 dominerar då $\gamma_3, \gamma_4 \Rightarrow \gamma_3, \gamma_4$ stryks

$\Rightarrow (\lambda_1 \gamma_2), (\lambda_2 \gamma_2)$ är de enda kvarvarande punkterna och då utdelningarna är lika stora i båda punkterna spelar det ingen roll är spelarna indifferent och det råder jämvikt.

c) Rena Nash-lösningar

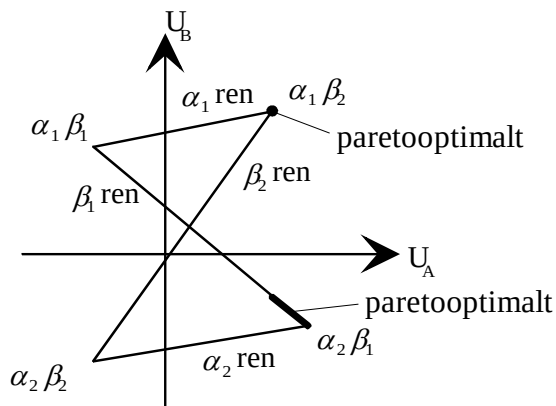
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
λ_1	(6;-3)	(1;2)	(6;-3)	(0;0)
λ_2	(6;-3)	(1;2)	(1;2)	(1;2)
λ_3	(6;-3)	(0;0)	(6;-3)	(0;0)
λ_4	(6;-3)	(0;0)	(1;2)	(1;2)
λ_5	(0;0)	(0;0)	(6;-3)	(0;0)

$$\lambda_6 \mid (0;0) \quad (0;0) \quad (1;2) \quad \boxed{(1;2)}$$

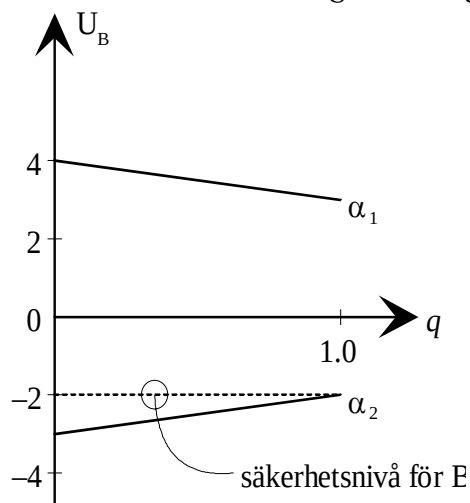
5 svaga Nash-lösningar (streckade och gråmarkerade i figuren).

Lösning S.17

a)



b) Definition: *Högsta genomsnittliga utdelning till resp. spelare oberoende av den andres strategi.* Antag att B väljer β_1 med andelen $q \Rightarrow$



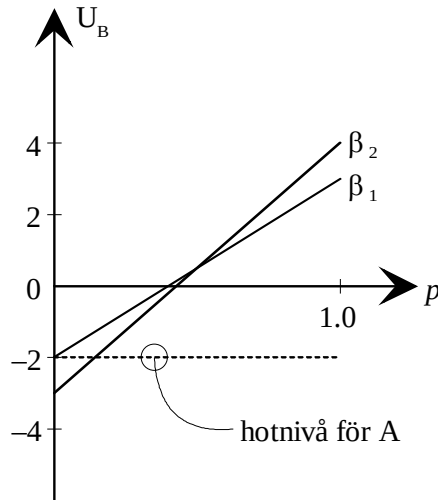
Säkerhetsnivån för B = -2 och säkerhetsstrategin är β_1 ren

P.s.s. för A ger säkerhetsnivån = $8/11$ och säkerhetsstrategin blir blandad med α_1 6 gånger av 11 och α_2 5 gånger av 11.

c) Definition: *Den mängd där paretooptimalitet och utdelning till resp. spelare är större än deras säkerhetsnivåer sammanfaller.*

I vårt fall sammanfaller avtalsmängden med paretooptimal lösningsmängd (se figur uppg. a)

- d) Definition: *En spelare försöker minimera den andres utdelning.*
A väljer α_1 med andelen p .



A's hotnivå blir -2 och hotstrategin är α_2 .

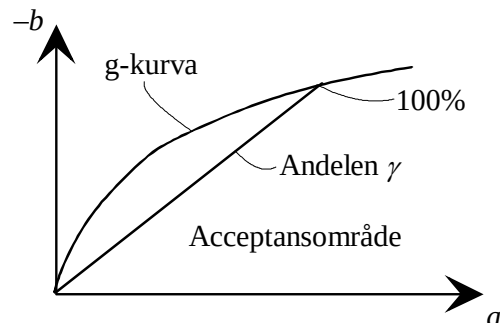
P.s.s. för B ger hotnivån $8/11$ och en blandad hotstrategi bestående av β_1 5 gånger av 11 och β_2 6 gånger av 11.

Lösning S.18

- a) $\sqrt{x+b}$ är en konkav funktion

Med $q = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$ hamnar 100%-projektet på g-kurvan

Varje mindre andel i projektet är fördelaktigt



b) Nyttä till A:

	0	50	100	radmin
0	0	0	0	0
50	100	100	0	0
100	0	0	100	0

c) Garantinivå till A:

i) Rena strategier: Max radmin = 0

ii) Blandade strategier: 0-raden domineras bort och kolumnerna 0 och 50 identiska ger p g a symmetri $p=0,50$ d v s man blandar strategierna med 50% från vardera.

d) Om B har samma nyttofunktion erhålles gemensamma utdelningar

	0	50	100
0	0,0	0,100	0,0
50	100,0	100,100	0,0
100	0,0	0,0	100,100

Vid samarbete bör båda kunna komma överens om (50,50) eller (100,100), kombinationer vilka ger båda 100.

Lösning S.19

Spelare: Försvararen F och Anfallaren A

Drag: F : {Öva (Ö), Vila (V)}, A : {Anfall (A), Reträtt (R)}

Spelordning:

1. Naturen tilldelar F egenskapen {stark (St), svag (Sv)} med $p = \{0.9, 0.1\}$

2. F observerar naturens drag

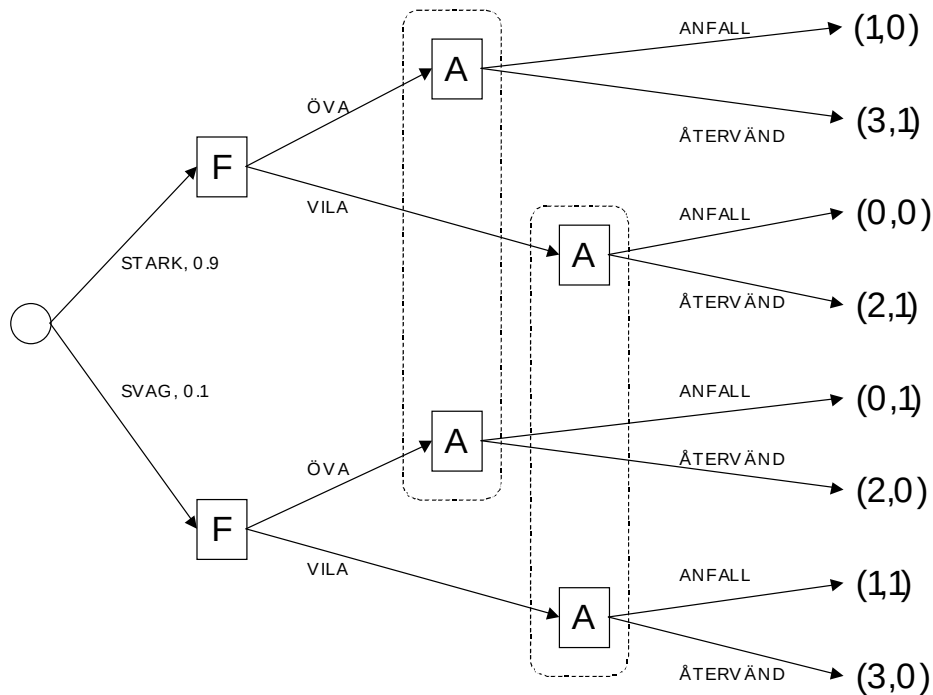
3. F drar {Ö, V}

4. A drar {A, R}

5. Utdelningar enl nedan.

Information : A observerar F's drag, ej naturens.

a) Teckna spelträdet nedan.



F, A har fyra strategier vardera, betingade på relevant information.

(u_F, u_A)		Anfallaren			
Försvararen		β_1	β_2	β_3	β_4
		A Ö, A V	A Ö, R V	R Ö, A V	R Ö, R V
α_1	Ö St, Ö Sv	0.9, 0.1	0.9, 0.1	2.9, 0.9	2.9, 0.9
α_2	Ö St, V Sv	1.0, 0.1	1.2, 0.0	2.8, 1.0	3.0, 0.9
α_3	V St, Ö Sv	0.0, 0.1	1.8, 1.0	0.2, 0.0	2.0, 0.9
α_4	V St, V Sv	0.1, 0.1	2.1, 0.9	0.1, 0.1	2.1, 0.9

b) Imperfekt, säker, asymmetrisk, ofullständig informationsstruktur.

c) Undersök för rena lösningar av typen (i) strikt dominans (DE), (ii) svag dominans (de), (iii) itererad dominans (ide), (iv) svaga Nash (ne) och (v) starka Nash (NE).

(i) DE = $\emptyset$.

(ii) de = $\emptyset$.

(iii) ide = $\emptyset$.

(iv) Svaga (rena) Nash jämvikter fås (t ex) genom responsfunktionerna $B_F(\beta)$ och $B_A(\alpha)$ för spelarnas icke-dominerade strategier α, β .

α	$B_A(\alpha)$	β	$B_A(\alpha)$
α_1	β_3, β_4	β_2	α_4
α_2	β_3	β_3	α_1
α_4	β_2, β_4	β_4	α_2

Def på svag Nash : $(a,b) \in ne$ omm $a \in B(b)$ och $b \in B(a)$
 $ne = \{(\alpha_1, \beta_3), (\alpha_4, \beta_2)\}$.

(v) Def på stark Nash : $(a,b) \in NE$ omm $a = B(b)$ och $b = B(a)$

$NE = \{(\alpha_1, \beta_3)\} = \{[(\ddot{O} | St, \ddot{O} | Sv), (R | \ddot{O}, A | V)]\}$

Signalen « $\ddot{O}$ » blir trovärdig genom sannolikheten för stark F. Att bluffa genom « V » är inte trovärdigt eftersom det vanligen skulle leda till kostnader.

d) Policy: gör allt för att ge intryck av beredskap och se till att motståndaren tror på budskapet. En försvarsstrategi behöver bara göra *trovärdigt* att man har över 50% chans att slå tillbaka angreppet. Använd signalen för att försvåra för motståndaren att härleda information om egenskaper (beredskap, utbildning, kassareserv)

Exempel inkluderar Churchills beslut att stanna i London under kriget, avvisningen av Sovjets bärgning av U137 i Karlskrona konflikten, Sveriges policy att alltid försvara hela territoriet samt argumentationen under Indien-Pakistan konflikten där Indien sannolikt vare sig vill eller kan använda kärnvapen i någon omfattning.

Lösning S.20

- a) Utan kommunikation gäller **(M,M)**, stark Nashlösning och **(I,I)** svag Nashlösning.

Med kommunikation (eller sidobetalningar) gäller bara **(M,M)**, ty endast Paretooptimala lösningar är acceptabla efter kommunikation!

- b) Låt $P(\text{Studenten väljer M}) = p$ och $P(\text{Företaget väljer M}) = q$. Teckna utdelningen för S respektive F. Derivera med avseende på p respektive q för att finna den optimala blandade strategin för S och F.

$$u_S(p) = p(8q - 2) + 6 - 2q$$

$$\frac{du_S}{dp} = 8q - 2 = 0 \quad \Rightarrow q = 0.25$$

Symmetri ger att $p = 0.25$. Jämviktslösningen ger nu att M väljes med endast 25% chans och **sannolikheten för mismatch (I,M) eller (M,I)** är

$$1 - pq - (1-p)(1-q) = 0.375. \text{ Förväntad utdelning är } 5.5 < 6.$$

Uppenbarligen är lösningen svag, eftersom spelarna tjänar på att gå över till en ren strategi (bara den är koordinerad).

- c) Använd resonemanget ovan. F spelar ju en blandad strategi.

$$u_S(p) = p(6 - 8\varepsilon) + 4 + 2\varepsilon$$

$$\frac{du_S}{dp} = 6 - 8\varepsilon \quad \Rightarrow p = \begin{cases} 1, & \varepsilon < 0.75 \\ 0.25, & \varepsilon = 0.75 \\ 0, & \varepsilon > 0.75 \end{cases}$$

D.v.s., S måste skatta felrisken och endast om felrisken överskrider 0.75 behöver S välja I.

- d) Paretooptimalitet är inte nödvändigt villkor för (svag) Nash-jämvikt, dvs kommunikation är viktig för att för socialt acceptable lösningar. Men om det finns en transaktionskostnad (t ex utbildning) involverad kan det löna sig för samhället som helhet om en aktör (staten, expert, Gud) går in och fastställer en (överlägsen) standard på en öppen marknad. Detta är också en av förklaringarna till varför

infrastrukturinvesteringar bör planeras centralt, även om ägandet kan vara privat/lokalt. Dock förutsätts utdelningsmatrisen på lång sikt känd.

Lösning S.21

a)

Student A	Student B	
	Fortsätt (F)	Sväng undan (S)
F	↓ (-5,-5)	→ (2,0)
S	↓ (0,2)	← (1,1) ↑

Rena strategier: Två stycken Nash-lösningar (S,F) och (F,S)

Blandade strategier: En Nash-lösning som erhålls exempelvis av maximering av student A:s utdelning, p är andelen av student A:s strategi som utgörs av Fortsätt och q är andelen av student B:s strategi som utgörs av Fortsätt.

$$\Rightarrow u_a = p(-5q + 2(1-q)) + (1-p)(0q + 1(1-q))$$

$$\frac{du_a}{dp} = 0 \Rightarrow q^* = \frac{1}{6}$$

Symmetri ger $p^* = \frac{1}{6}$

Svar: Båda studenterna kommer att välja Fortsätt i 1/6 fall medan de väljer Sväng undan i 5/6 fall.

b) Sannolikhet att båda svänger undan

$$(1 - \frac{1}{6}) \cdot (1 - \frac{1}{6}) = 0,694$$

c) Uttryck utdelningen som funktion av X

$$\frac{du_a}{dp} = p(Xq + 2(1-q)) + (1-p)(0q + 1(1-q)) = 0$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{1}{1-X} = p^*$$

Lösning S.22

A har fyra strategier, B två

A	B	
	u	d
L,L	2.5, 2.5	2.5, 2.5
L,R	4, 2.5	2, 1.5 + 0.5x
R,L	4, 1.5	2, 1
R,R	5.5, 1.5	1.5, 0.5x

Nash-lösningar vid rena strategier:

x	Svaga	Starka
1	L,L,d	R,R,u
2	L,L,d	R,R,u
3	L,L,d & R,R,u	

Nash-lösningar vid blandade strategier:

Antag att B väljer u med sannolikheten q och d med sannolikheten $(1-q)$.

A:s utdelning blir då:

$$u_a = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 4q + 2(1-q) \\ 4q + 2(1-q) \\ 5,5q + 1,5(1-q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2 + 2q \\ 2 + 2q \\ 1,5 + 4q \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_a(p) = p(2,5q + 2,5(1-q)) + (1-p)(5,5q + 1,5(1-q))$$

$$\frac{du_a}{dp} = 2,5 - 5,5q - 1,5 - 1,5q = 0 \Rightarrow q = 0,25$$

Då $q = 0,25$ är A:s utdelning 2,5 oavsett strategi, A är indifferent $\Rightarrow$ Svag Nash!

$\Rightarrow$ B väljer u i 1 fall av 4, d i övriga

Sätt upp B:s utdelning som funktion av q

$$u_b(q) = q(2,5p + 1,5(1-p)) + (1-q)(2,5p + 0,5x(1-p))$$

$$\frac{du_b}{dq} = 1,5 - 1,5p - 0,5x + 0,5xp = (1,5 - 0,5x)(1-p) = 0$$

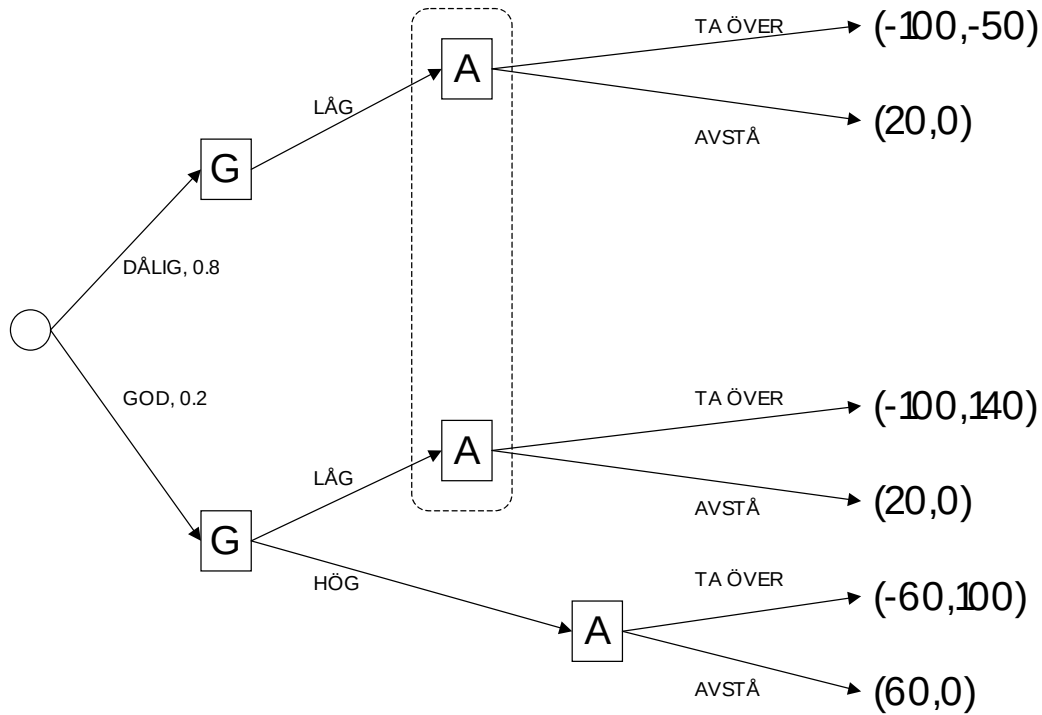
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow p=1 \\ x=2 \Rightarrow p=1 \\ x=3 \Rightarrow p \text{ väljs godtyckligt} \end{cases}$$

Iterativ dominans:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow R, R, u \\ x=2 \Rightarrow R, R, u \\ x=3 \Rightarrow \text{Ingen dominans} \end{cases}$$

Lösning S.23

a)



b) Graaf har två strategier, SSAB fyra

(u_{SSAB}, u_{Graaf})	Graaf	
SSAB	Låg (L)	Hög (H)
TÖ L, TÖ H	-12, -100	-20, -92
TÖ L, A H	-12, -100	-40, -68
A L, TÖ H	0, 20	20, 4
A L, A H	0, 20	0, 28

Dominans ger $S^* = (\text{Låg, Avstå} | \text{Låg, Ta över} | \text{Hög})$

c) Naturen väljer Dålig eller God, Graaf väljer alltid Låg, SSAB avstår. Utdelningen är 20 till Graaf och 0 till SSAB.

Lösning S.25

Spelare : Ivar (I), MEL (M)

Drag : I : {« Teknik (T) », « Ekonomi (E) », « Tiga (0) »}, M : {Te, Ek, Ch }

Spelordning:

1. Naturen drar {Te, Ek} med slh $p = \{0.5, 0.5\}$
2. I observerar naturens drag
3. I drar {T,E,0}
4. M drar {Te, Ek, Ch} betingat på Is drag
5. Utdelningar enl nedan.

Information: Imperfekt, ofullständig, asymmetrisk, säker.

Beteckna Ivars strategier enl notationen $\alpha\beta = (\alpha|Te, \beta|Ek)$ där $\alpha, \beta \in \{T,E,0\}$,

MELs strategier enl notationen $\alpha\beta\gamma = (\alpha|T, \beta|E, \gamma|0)$ där $\alpha, \beta, \gamma \in \{Te, Ek, Ch\}$. Antalet strategier är alltför stort för att lösa problemet i normalform.

a) Spelet degenererar till ett beslutsteoretiskt problem mot naturen.
 $E(Te) = E(Ek) = 1.5$ och $E(Ch) = 3$. MEL väljer alltid Chef.

b) Imperfekt, ofullständig, asymmetrisk, säker.

c) Alla strategier som går ut på att "babbla", dvs att förstöra informationsinnehållet i svaret genom att alltid svara samma sak. T ex strategin TT ger som bästa svar C--. {TT,C--} är NE då (i) I straffas vid avvikelse (max punkt) och (ii) M inte bara kan förlora på att avvika (se responsfunktion $u_M(TT, \beta)$ nedan). Logiken är följande för M: *"Ivar skulle inte svara frivilligt för att förlora på det, alltså saknar hans svar information som låter mig sänka hans nytta."*

β	u_M
	(TT, β)
Txx	1.5
Exx	1.5
Cxx	3

d) Jämför strategiprofilen $\{TE, TET\}$ med utdelningen $u_I = 2$ och $u_M = 5$. Jämvikten är svag NE eftersom (i) I inte kan öka den och (ii) M inte kan öka den genom avvikelse. Notera att det är viktigt att Ivar inte får ett chefsjobb om han tiger, annars bryter jämvikten ned. Logiken är svag, liksom jämvikten. [Skulle möjligen kunna göras mer trolig genom en blandad strategi där MEL slumpar ut jobb till tigande kandidater, som incitament att tala sanning!]

α	$u_I(\alpha, TET)$	β	$u_M(TE, \beta)$
TT	1.5	TET	5
TE	2	TEC	5
TO	1.5	TEE	5
EE	1.5	ET-	-2
ET	1	EE-	1.5
EO	1	TT-	1.5
OO	1.5		
OT	1.5		
OE	2		

Lösning S.26

Spelare: Arbetssökande Linus (L), arbetsgivare (A)

Drag: L : {studier (S), vila (V)}, A : {Jobb (J), Inget (N)}

Spelordning: 1. Naturen drar {G, D} med slh $p = \{0.4, 0.6\}$

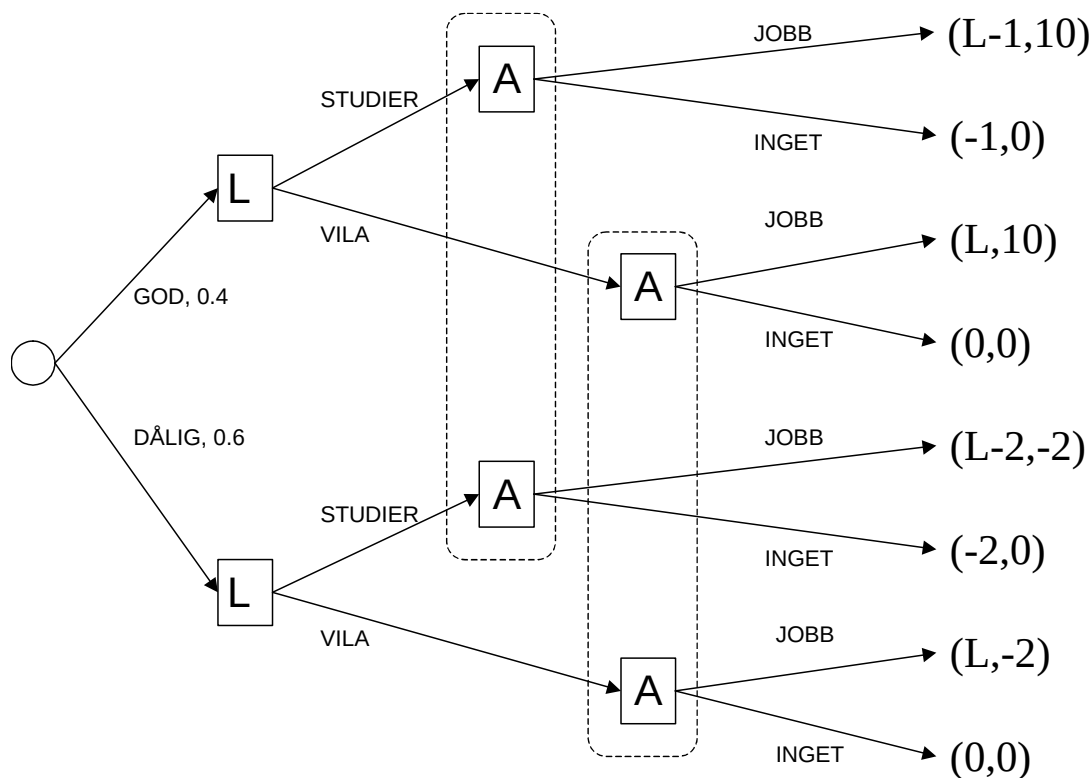
2. L observerar naturens drag

3. L drar {S, V} öppet

4. A drar {J, N} betingat på L:s drag

5. Utdelningar enl nedan.

Information: Imperfekt, ofullständig, asymmetrisk, säker.



L,A har fyra strategier vardera, betingade på relevant information.
Beteckna L's strategier $\alpha\beta = \{\alpha|G, \beta|D\}$, A's strategier $\gamma\delta = \{\gamma|S, \delta|V\}$.

a)

(u_L, u_A)		A (L = 4)			
L		JJ	JN	NJ	NN
SS		2.4, 2.8	2.4, 2.8	-1.6, 0	-1.6, 0
SV		3.6, 2.8	1.2, 4	2, -1.2	-0.4, 0
VS		2.8, 2.8	1.2, -1.2	1.6, 4	-1.2, 0
VV		4, 2.8	0, 0	4, 2.8	0, 0

Svaga (rena) Nashjämvikter fås (t ex) genom responsfunktionerna $B_L(\beta)$ och $B_A(\alpha)$ för spelarnas icke-dominerade strategier.

α	$B_A(\alpha)$	β	$B_L(\beta)$
SS	JJ, JN	JJ	VV
SV	JN	JN	SS
VS	NJ	NJ	VV
VV	NN	NN	VV

ne = $\{(SS, JN), (VV, JJ), (VV, NJ)\}$.

Def på stark Nash : $(a,b) \in \text{NE}$ omm $a = B(b)$ och $b = B(a)$, $\text{NE} = \emptyset$.

b) A differentierar betalningen till W|S och L|V. Utdelningsmatrisen blir

(u_L, u_A) L	A			
	JJ	JN	NJ	NN
SS	W-1.6, 2.8	W-1.6, 2.8	-1.6, 0	-1.6, 0
SV	$0.4W + 0.6L - 0.4$, 2.8	$0.4W - 0.4$, 4	$0.6L - 0.4$, -1.2	-0.4, 0
VS	$0.4L + 0.6W - 1.2$, 2.8	$0.6W - 1.2$, -1.2	$0.4W - 1.2$, 4	-1.2, 0
VV	L, 2.8	0, 0	L, 2.8	0, 0

För att göra (SV,JN) till NE krävs

- (i) $0.4W - 0.4 > 0.6W - 1.2 \Leftrightarrow W < 4$
- (ii) $0.4W - 0.4 > W - 1.6 \Leftrightarrow W < 2$
- (iii) $0.4W - 0.4 > 0 \Leftrightarrow W > 1$

[Det skulle inte löna sig att göra (VS,NJ) till NE, då detta skulle kräva att (SS,JN) slår ut (SV,JN). I valet mellan de båda NE står den förra som den klart mest realistiska.]

Slutsats: Gör lönen W för utbildning lägre än utbildningskostnaden för en mindre lämpad, men högre än utbildningskostnaden för den lämpade. Då sker självsortering.

Lösning S.27

Spelare : A, B

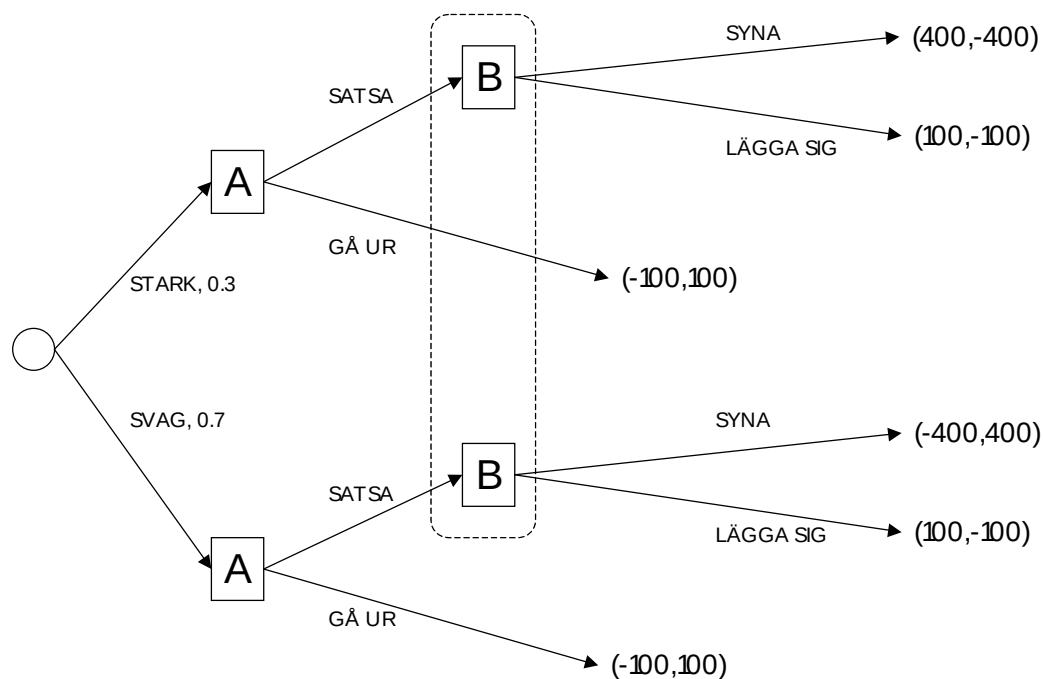
Drag : A: {Satsa (B), gå ur (D)}, B: {Syna (C), lägga sig (F)}

Spelordning :

1. Naturen drar {Stark (St), Svag (Sv)} med slh $p = \{0.3, 0.7\}$
2. A observerar naturens drag
3. A drar {B,D}
4. B drar {C, F}
4. Utdelningar enl nedan.

a)

Information: Imperfekt, ofullständig, asymmetrisk, säker.



b) Ta fram utdelningsmatrisen.

$(\pi_A = -\pi_B)$		B	
A		C B	F B
α_1	B St, B Sv	-160 ;160	100 ; -100
α_2	B St, D Sv	50 ; -50	-40 ; 40
α_3	D St, B Sv	-310 ;310	40 ; -40
α_4	D St, D Sv	-100 ;100	-100 ;100

(ex. $0,3 \cdot 400 + 0,7 \cdot -400 = -160$ och $0,3 \cdot 100 + 0,7 \cdot -100 = -40$)

Rena lösningar:

i) Strategierna $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ är strikt dominerade av α_1 respektive α_2 DE = $\emptyset$.

(ii) $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ är svagt dominerade strategier av α_1 respektive α_2 . de = $\emptyset$.

(iii) Itererad (svag) dominans ger inget. ide = $\emptyset$

(iv) Svaga (rena) Nash jämvikter fås (t ex) genom responsfunktionerna $B_A(\beta)$ och $B_B(\alpha)$.

α	$B_B(\alpha)$	β	$B_A(\beta)$
α_1	C	C	α_2
α_2	F	F	α_1

Svag Nash : ne = $\emptyset$

(v) Stark Nash : NE = $\emptyset$. (dvs inga rena Nashlösningar)

Alla rena strategier domineras alltså av blandade p g a bluffmomentet.

Blandad Nash, $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ bortdominerade.

Låt $p = P(\alpha_1)$ och $1-p = P(\alpha_2)$ samt $\theta = P(C)$ samt $1-\theta = P(F)$

Utdelning

$$\pi_A = p[-160\theta + 100(1-\theta)] + (1-p)[50\theta - 40(1-\theta)]$$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p} = -160\theta + 100(1-\theta) - (50\theta - 40(1-\theta)) = 0$$

$$\pi_B = \theta[160p - 50(1-p)] + (1-\theta)[-100p + 40(1-p)]$$

$$\text{Sätt } \frac{\partial \pi_B}{\partial \theta} = 0$$

Det ger att en blandad Nashjämvikt fås för $p^* = 9/35 = 0.257$ samt $\theta^* = 0.40$.

$$E[\pi_A] = -4 \text{ och } E[\pi_B] = 4.$$

Om B väljer att avvika från den blandande jämvikten (dvs. $\theta^* = 0.40$)

kommer A att välja en ren strategi. Väljer B $\theta^* > 0.40$ blir $\frac{\partial \pi_A}{\partial p} < 0$ som

medför att A kommer välja att minimera p , dvs. $p = 0$. Alltså kommer A inte att bluffa.

$$\pi_A = \{p = 0, \theta > 0.40\} = 50\theta - 40(1 - \theta) = 90\theta - 40 > -4$$

$$\pi_B = \{p = 0, \theta > 0.40\} = -100\theta + 40(1 - \theta) = 40 - 90\theta < 4$$

Svar: A spelar α_1 i 9 fall av 35 och α_2 i övriga. B väljer C i 4 av 10 fall och F i övrigt. Utdelningen blir -4 för A och 4 för B. Om B väljer att spela C i fler än 4 fall av 10 kommer A endast spela α_2 .

Lösning S.28

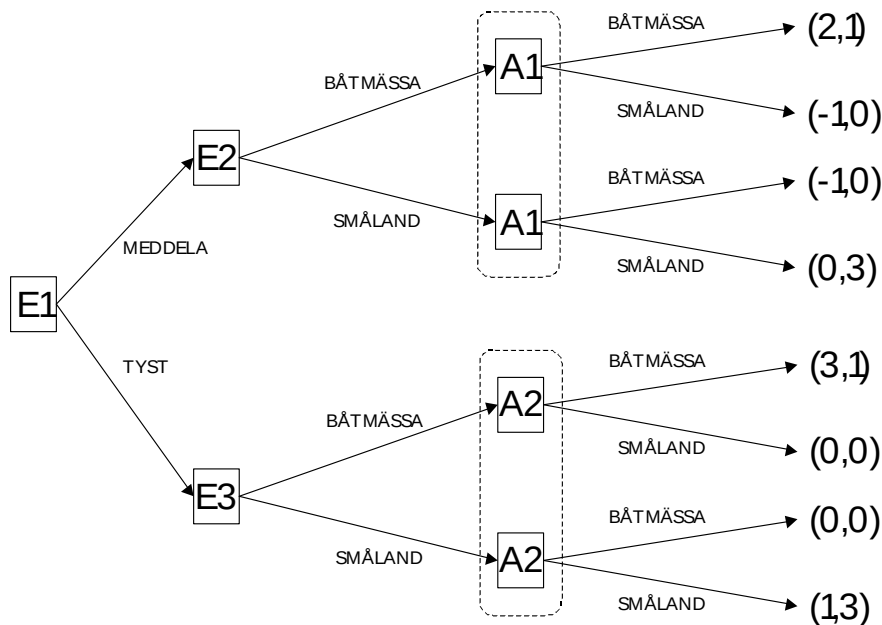
Spelare : Eskil [E], Ulla [U]

Drag : E : {Meddela (M), Tyst (T) ; Båtmässa (B), Småland (S)}, U : {B, S}

Spelordning :

1. E drar öppet {M, T}
2. E drar i hemlighet {B, S}
3. A drar {B,S}
4. Utdelningar enl nedan.

Information : Imperfekt, fullständig, asymmetrisk, säker.



Ulla har fyra strategier (B|M, B|T), (B|M, S|T), (S|M, S|T), (S|M, B|T). Eskil har åtta strategier enligt notationen (E1, E2|M, E3|T).

Notera att E2/E3 formellt inte är ömsesidigt uteslutande i en strategi (jfr. darrning eller ändrade informationsrum). De övriga används dock inte vidare i uppgiften.

(v_E, u_U) Eskil	Ulla			
	BB	BS	SS	SB
MBB	2,1	2,1	-1,0	-1,0
MBS	2,1	2,1	-1,0	-1,0
MSS	-1,0	-1,0	0,3	0,3
MSB	-1,0	-1,0	0,3	0,3
TBS	0,0	1,3	1,3	0,0
TSS	0,0	1,3	1,3	0,0
TBB	3,1	0,0	0,0	3,1
TSB	3,1	0,0	0,0	3,1

Rena lösningar :

- (i) Det saknas en strikt dominanslösning $DE = \emptyset$.
- (ii) {MS-} är svagt dominerade strategi dvs ingen entydig lösning. $de = \emptyset$.
- (iii) Itererad (svag) dominans från (ii) domineras {SB, SS, T-B, BB, T-S}, $ide = \{(MB-, BS)\}$.
- (iv) Svaga (rena) Nash jämvikter fås (t ex) genom responsfunktionerna $B_E(\beta)$ och $B_U(\alpha)$.

α	$B_U(\alpha)$	β	$B_E(\beta)$
MB-	BB, BS	BB	T-B
MS-	SS, SB	BS	MB-
T-S	BS, SS	SS	TB-
T-B	BB, SB	SB	T-B

Svag Nash : $ne = \{(MB-, BS), (T-B, BB), (T-B, SB)\}$

(v) Stark Nash : $NE = \emptyset$.

b) Jämviktsutfallen är $(E1, E2/E3, A) = (T, B, B), (T, S, S), (M, B, B)$ (från ne)

c) Utfallet (M, B, B) fås ur jämvikten $(MB-, BS)$ dvs $(M, B | M, - | T)$ samt $(B | M, S | T)$

d) $ide = \{(MB-, BS)\}$. Nu fås resultatet att Ulla väljer B vid kommunikation. (M,B,B) är dock bara en svag jämvikt, eftersom Eskil har incitament att avvika till (T,B,B).

Resultatet kan tolkas som att Ulla, med kännedom om matrisen och avsaknaden av meddelande, drar slutsatsen att Eskil endast gör detta av rationella skäl, dvs för att uppnå (T,B,B). Däremed väljer hon också B och härmed visas att möjligheten att kommunicera jämföras med att dra först. Uppgiften illustrerar både betydelsen av att dra först (first-mover advantage) och värdet av [ensidig och oförpliktigande] kommunikation ('cheap talk').

Nyttoteori

Lösning N.14

a) Antag för enkelhets skull $u(x) = Ax$

i) Lägsta försäljningspris ges av

$$u(p) = Ap = 0.5(AV) + 0.5(AW) \Rightarrow p = \frac{V+W}{2}$$

ii) Antag köppriset p^* , dra detta från betalningarna i lotteriet. Det högsta pris p^* man kan tänkas köpa lotteriet för, är det p^* vilket gör att förväntade utdelningen från lotteriet är $u(0) = 0$

$$\Rightarrow u(0) = 0.5(V - p^*)A + 0.5(W - p^*)A \Rightarrow p^* = \frac{V+W}{2}$$

b) Analogt resonemang

i)

$$1 - e^{-\lambda p} = 0.5(1 - e^{-\lambda V}) + 0.5(1 - e^{-\lambda W}) \Rightarrow p = -\frac{1}{\lambda} \ln(0.5(e^{-\lambda V} + e^{-\lambda W}))$$

$$\text{ii) } 1 - e^0 = 0.5(1 - e^{-\lambda(V-p^*)}) + 0.5(1 - e^{-\lambda(W-p^*)})$$

$$\Rightarrow 1 = 0.5(e^{-\lambda V} + e^{-\lambda W}) \cdot e^{-\lambda p^*}$$

$$\Rightarrow p^* = -\frac{1}{\lambda} \ln(0.5(e^{-\lambda V} + e^{-\lambda W})) = p \quad \text{V.S.V.}$$

Lösning N.15

$$u(\text{alt } 1) = 0.5u(100) + 0.5u(\text{alt } 1) \Rightarrow u(\text{alt } 1) = \sqrt{100} = 10$$

$$u(\text{alt } 2) = 0.3u(125) + 0.7u(0) = 7.5$$

$$u(\text{alt } 3) = 0.2 \cdot 0.5u(100) + 0.5u(121) + 0.4u(0) = 6.5$$

$$u(\text{alt } 4) = u(49) = 7$$

$\Rightarrow$ Välj alt 1

Lösning N.16

a) α = A:s andel i lotteriet

$$u(\text{lott}) = 0,3 \cdot u(1000\alpha) + 0,7 \cdot u(-100\alpha) > u(0)$$

$$\Rightarrow \alpha < 0,5$$

b) β = B:s andel av lotteriet

$$\beta = 0,8 \Rightarrow u(\text{lott}) = u(0) = 0$$

$$\text{Lös ut konstanten } a_B \text{ för B} \Rightarrow a_B = 348$$

CME fås av:

$$u(\text{lott}) = 0,3 \cdot u(0,6 \cdot 1000) + 0,7 \cdot u(-100 \cdot 0,6) = u(\text{CME})$$

$$\Rightarrow \text{CME} = 16 \text{ kronor}$$

$$\text{Riskaversionen: EMV} - \text{CME} = 138 - 16 = 122 \text{ kronor}$$

Lösning N.19

$$u(A) = qu(2a) + (1-q)u(0)$$

$$u(B) = q^2 u(2a) + q(1-q)u(a) + (1-q)qu(a) + (1-q)^2 u(0)$$

$$\text{men } u(0) = 0$$

$$u(B) - u(A) = (q - q^2)(2u(a) - u(2a))$$

$$q - q^2 \geq 0, \text{ ty } 0 \leq q \leq 1$$

$$2u(a) - u(2a) > 0, \text{ ty } 2u(a) > u(2a)$$

$$\Rightarrow u(B) > u(A)$$

Lösning N.21

a) Olika lotter:

$$u(2 \text{ olikalotter}) = u(125) \Rightarrow a + 0.01e^{500b} + 0.18e^{250b} + 0.81e^0 = a + e^{125b}$$

$$\text{sätt } e^{125b} = y$$

$$\Rightarrow y^4 + 18y^2 - 100y + 81 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow b = 0, \text{ men } b \neq 0 \\ y = 2,758 \Rightarrow b = \frac{\ln y}{125} \approx 8,12 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Lika lotter

$$u(\text{lika lotter}) = 0.1(a + e^{500b}) + 0.9(a + e^0) = u(\text{CME}) = a + e^{\text{CME}b}$$

$$\Rightarrow e^{\text{CME}b} = 0.1e^{500b} + 0.9 \Rightarrow \text{CME} = 234 \text{ kr}$$

b)

i)

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(a + e^{bx}) = be^{bx} > 0 \forall x$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = b^2e^{bx} > 0 \forall x$$

u växande och konvex $\Rightarrow$ spelglad

ii)

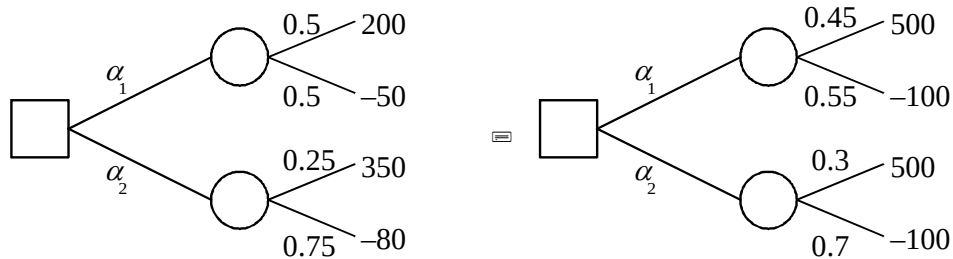
$$\text{Olika EMV} - \text{CME} = 50 - 125 = -75$$

$$\text{Lika EMV} - \text{CME} = 50 - 234 = -184$$

$\Rightarrow$ Störst spelglädje vid lika lotter

Lösning N.22

a) Rita ρ -funktionen. Ur denna fås



$$\text{CME}(\alpha_1) = 50; \quad \text{CME}(\alpha_2) = -25$$

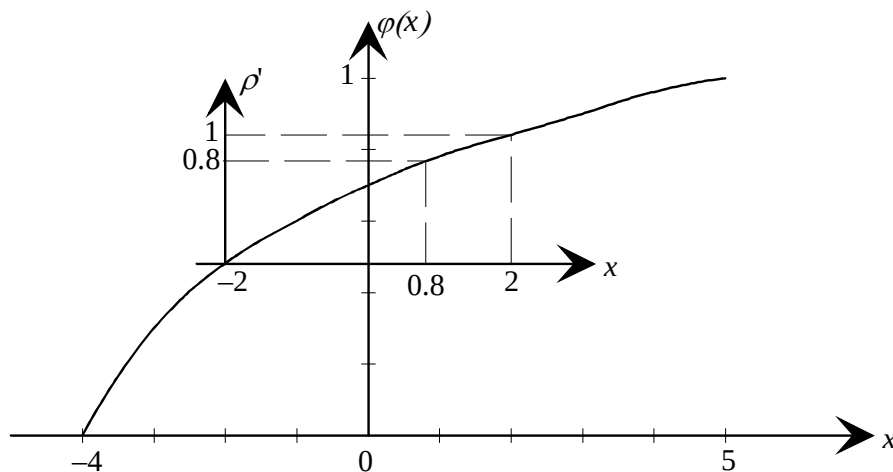
$\Rightarrow$ Han väljer α_1 .

b) Han är högst villig att betala så mycket att förväntad nytta av lotteriet är lika med nyttan av $\hat{x}$.

$$\Rightarrow u(\hat{x}) = \sum_j p_j \cdot u(x_j) \Rightarrow u^{-1}(\sum_j p_j \cdot u(x_j))$$

Lösning N.23

a) $\varphi(x) = \log(5+x); \varphi(5) = 1; \varphi(-4) = 0$



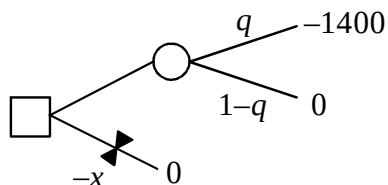
b) $\text{EMV} - \text{CME} > 0 \Rightarrow$ Riskaversion

$$\text{c) } u(3) \leq qu(5) + (1-q)u(-4) = q \Rightarrow \log 8 \leq q \Rightarrow q \geq 0.9$$

d) Gå in i figuren ovan ρ' bildas $\Rightarrow \text{CME} \approx 0.8$

Lösning N.24

a)



$$qu(-1400) + (1-q)u(0) < u(-x) \Rightarrow \\ \Rightarrow u^{-1}[qu(-1400) + (1-q)u(0)] < -x \Rightarrow x < 14$$

$\Rightarrow$ Carl är villig att betala upp till 14 000 kronor

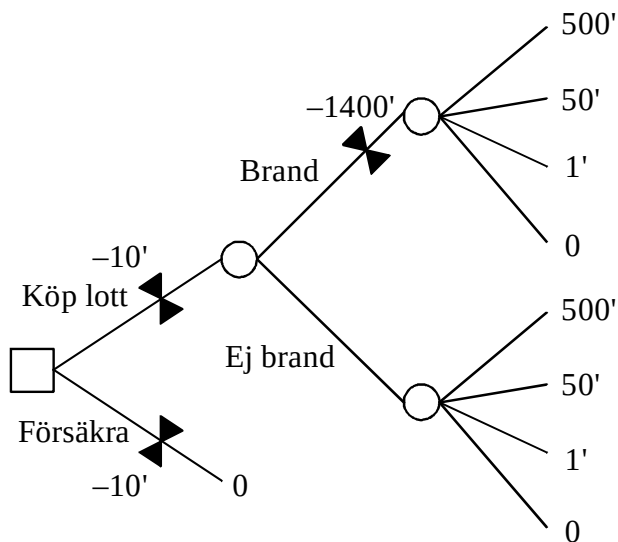
Försäkringsbolaget agerar riskneutralt:

$$|q(-1400) + (1-q) \cdot 0| < |-x| \Rightarrow x > 0.14$$

$\Rightarrow$ Bolaget är intresserat om premien > 140 kr.

$\therefore$ Avtal kan tecknas om $140 \text{ kr} < \text{premien} < 14\,000 \text{ kr}$

b)



$$E[u(lott)] = 0.000001 \cdot u(-910) + 0.000019 \cdot u(-1360) + \\ + 0.00018 \cdot u(-1409) + 0.008 \cdot u(-1410) + 0.000999 \cdot u(490) + \\ + 0.018981 \cdot u(40) + 0.17982 \cdot u(-9) + 0.7992 \cdot u(-10) = -16121.6$$

$$E[u(Försäkring)] = u(-10) = -100$$

⇒ **Köp försäkring**

c) Köp ej försäkring om $|CME| < |EMV|$

$$dvs\ bestäm\ det\ \gamma\ som\ uppfyller\ \left| u^{-1}(qu(-1400'\gamma)) \right| < \left| q(-1400'\gamma) \right|$$

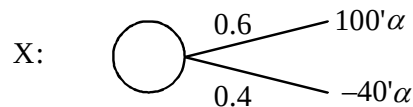
där γ är Carls andel i huset.

Lösning N.26

a) God marknad: $NPV = -140' + \sum_{i=1}^{\infty} 24'(1+0.1)^{-i} = 100'$

Dålig marknad: $NPV = -140' + \sum_{i=1}^{\infty} 10'(1+0.1)^{-i} = -40'$

Betrakta projekt X för A



där $\alpha \in [0,1]$ är A's andel av projekt X

Acceptansvillkor för A: $u(\alpha X) > u(0)$

$$\Rightarrow 0.6 \left[\frac{a100'\alpha}{a + 100'\alpha} \right] + 0.4 \left[\frac{-a40'\alpha}{a - 40'\alpha} \right] > 0, \text{ där } a = 40' \Rightarrow \alpha < 11/25$$

Acceptansvillkor för B: $u(\beta X) > u(0) = 0$, där $a = 60' \Rightarrow \beta < 33/50$

Totalt antal aktier: $\frac{140000}{1000 \cdot 1.40} = 100$ st

⇒ **A tecknar maximalt 44 stycken, B max 66 st.**

b) Nytt acceptansvillkor: $u(\alpha X + 10') > u(10')$

$$0,6 \left(\frac{a(100\alpha + 10')}{a + 100\alpha + 10'} \right) + 0,4 \left(\frac{a(-40\alpha + 10')}{a - 40\alpha + 10'} \right) > \frac{a \cdot 10'}{a + 10'}$$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{88}{160} = 0,55$$

$\Rightarrow$ A tecknar maximalt 55 stycken

Lösning N.27

a)

$$EMV = p \frac{x}{n} + (1-p) \frac{-y}{n} \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{p}{1-p} x$$

b) Villkor för acceptans: $u(\text{projekt}) \geq u(\text{ej deltaga}) = 0$

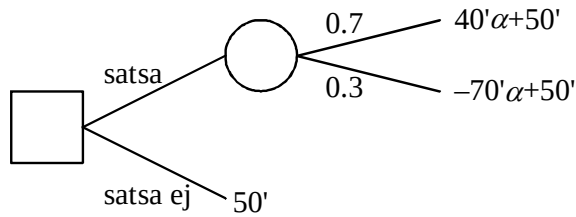
$$\Rightarrow p \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) + (1-p) \log \left(1 - \frac{y}{n} \right) \geq 0 \Rightarrow y \leq n \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{\frac{-p}{1-p}} \right) \quad \forall x \geq 0$$

c)

$$y \leq n \left(1 - \left(1 - \frac{p}{1-p} \frac{x}{n} + \frac{\left(\frac{-p}{1-p} \right) \left(\frac{-1}{1-p} \right) \left(\frac{x}{n} \right)^2}{2!} + \dots \right) \right) \rightarrow \frac{p}{1-p} x \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Lösning N.28

a)



Acceptansvillkor $u(\alpha X) \geq u(0) = 0 \Rightarrow u(\alpha X + 50') \geq u(50')$, där $\alpha \in [0, 1]$

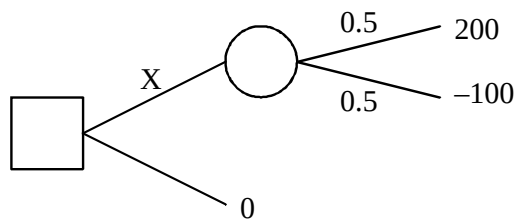
$$0.7 \left[\frac{160(40\alpha + 50)}{160 + 40\alpha + 50} \right] + 0.3 \left[\frac{160(-70\alpha + 50)}{160 - 70\alpha + 50} \right] \geq \frac{160 \cdot 50}{160 + 50} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 0.525$$

$\Rightarrow$ Kal är ingen fegis

b) $pu(40'\beta) + (1-p)u(-70'\beta) \geq 0$; Riskneutral $\Rightarrow 0.7 \cdot 40'\beta + 0.3(-70'\beta) \geq 0$

$7\beta \geq 0 \Rightarrow$ Satsa maximalt 50 000 kr

Lösning N.29



Acceptansvillkor för person 1: $u(\gamma X) \geq u(0)$

$$\Rightarrow 0.5u(\gamma 200) + 0.5u(-\gamma 100) \geq u(0) \Rightarrow 0 \leq \gamma \leq \frac{101}{200}$$

Maxnytta för person 1:

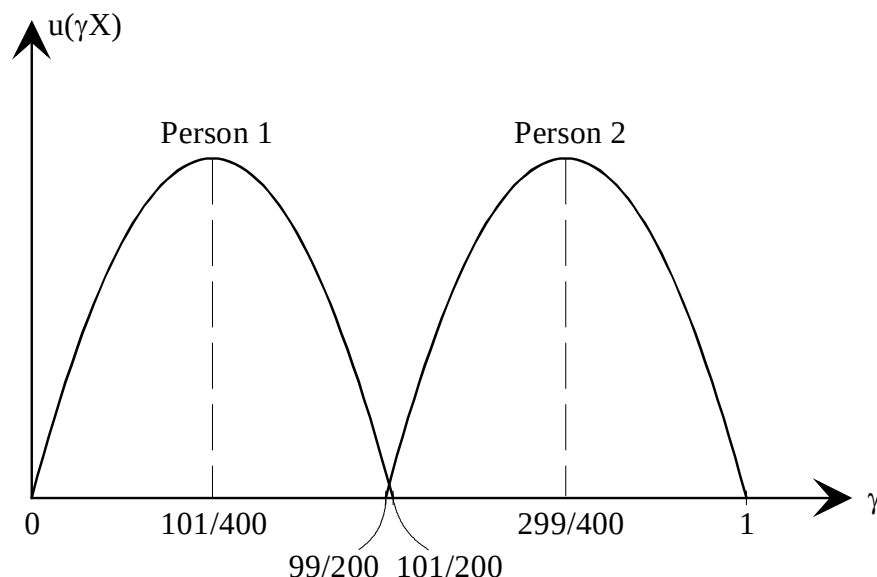
$$\frac{\partial u(\gamma X)}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (0.5 \ln(101 + 200\gamma) + 0.5 \ln(101 - 100\gamma)) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^* = \frac{101}{400}$$

Symmetri ger för person 2 acceptansvillkoret $0 \leq (1 - \gamma) \leq 101/200$

$$\Rightarrow 99/200 \leq \gamma \leq 1$$

Maxnytta för person 2: $\gamma^* = 299/400$



Paretooptimalitet råder då $\frac{101}{400} \leq \gamma \leq \frac{299}{400}$ om båda måste delta!

Paretooptimalitet råder då $\frac{99}{200} \leq \gamma \leq \frac{101}{200}$ om det krävs att båda accepterar sin andel i lotteriet för att det ska bli ett lotteri!

Lösning N 32

a)

$$u'(x) = 1 / (610 + x)$$

$$u''(x) = - (610 + x)^{-2} < 0 \Rightarrow \text{Riskavert}$$

$$u'''(x) = 2 (610 + x)^{-3} > 0 \Rightarrow \text{Avtagande riskaversion}$$

b)

$$u(\text{köp lott}) = 0,5 * u(2000) + 0,5 * u(-500) = 0,5 *$$

$$(\ln(610+2000) + \ln(610-500)) \approx 6,28$$

$$u(\text{köp inte lott}) = u(0) = \ln(610 + 0) \approx 6,41$$

$$\Rightarrow u(\text{köp lott}) < u(\text{köp inte lott}) \Rightarrow \text{köp INTE lotten}$$

c)

$$\text{andel} = y$$

$$u(\text{köp andel } y \text{ av lott}) =$$

$$u(y) = 0,5 * u(2000y) + 0,5 * u(-500y) = 0,5 * (\ln(610+2000y) + \ln(610 - 500y))$$

$$u'(y) = 0,5 * (2000/(610+2000y) - 500/(610-500y))$$

$$u'(y) = 0 \Rightarrow 4 * (610-500y) = (610+2000y)$$

$$2440 - 610 = 4000y$$

$$y = 1830 / 4000 \approx 0,46$$

$$u''(y) = 0,5 * (-2000*2000/(610+2000y)^2 - 500(-1)(-500)/(610-500y)^2)$$

$$\leq 0 \Rightarrow \text{max ok!}$$

$$u(0,46) = 0,5 * (u(920) + u(230)) \approx 6,64$$

$$6,64 > u(\text{köp inte lott}) \Rightarrow \text{lottandelen accepteras.}$$

d)

Jfr $u(F + x) = \ln(610 + F + x)$ och $u(x)$. Eftersom $u'''(x) > 0$ tar AA en större del av lotten.

e)

$$ARA(x) = -u''(x) / u'(x) = (610 + x)^{-1} \Rightarrow \text{Linjär, avtagande}$$

Jfrt med medelamerikanen kommer riskpremien för personerna A och AA att kräva allt mindre riskpremie med ökande förmögenhet, medan amerikanen kräver konstant riskpremium.

Investeringssteori

Lösning I.2

Samband mellan effektiv ränta, r_{eff} , och enkel ränta, r_{enk} : $(1 + r_{eff})^{\frac{d}{360}} = \left(1 + r_{enk} \frac{d}{360}\right)$

$$\Rightarrow r_{eff} = \left(1 + r_{enk} \frac{d}{360}\right)^{\frac{360}{d}} - 1 = \left(1 + 0.06 \frac{90}{360}\right)^{\frac{360}{90}} - 1 \approx 6.14\%$$

Lösning I.18

$$\begin{aligned} NPV &= -100 + \sum_{i=1}^3 \frac{20}{(1+r)^i} + \sum_{i=4}^6 \frac{30}{(1+r)^i} - \sum_{i=1}^6 \frac{10}{(1+r)^i} + \frac{15}{(1+r)^6} = \\ &= -100 + 20 \cdot \frac{1 - (1+r)^{-3}}{r} + \frac{1}{(1+r)^3} \cdot 30 \cdot \frac{(1 - (1+r)^{-3})}{r} - 10 \cdot \frac{1 - (1+r)^{-6}}{r} \\ &\quad + \frac{15}{(1+r)^6} = [r = 10\%] = \end{aligned}$$

$\Rightarrow NPV = -29,3 \text{ tkr} < 0$ d v s investeringen är inte lönsam.

Lösning I.19

Antag årliga driftskostnader = x [tkr] som reducerar intäkterna.

Lönsamt då $NPV > 0$:

$$\begin{aligned} NPV &= -800 + \sum_{i=1}^{10} \frac{(200 - x)}{(1+r)^i} + \frac{0,1 \cdot 800}{(1+r)^{10}} > 0 \\ &= -800 + (200 - x) \frac{1 - (1+r)^{-10}}{r} + \frac{80}{(1+r)^{10}} = [r = 10\%] = 459,76 - 6,14x > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x < 74,8 \text{ tkr/år}$ d v s de årliga driftskostnaderna får inte överstiga 74,8 tkr.

Lösning I.20

$$NPV_I = NPV_{II}$$

$$500 + 700(1+r)^{-1} + 200(1+r)^{-2} = a \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} \rightarrow \frac{a}{r} \text{ då } n \rightarrow \infty$$

$$a = 67.40 \text{ kr}$$

Lösning I.22

a)

$$NPV = -700 + \frac{500}{(1+r)} + \frac{500}{(1+r)^2}$$

$$r = 10\%$$

$$NPV = 168 \text{kr}$$

Svar: NPV = 168 kr

b) $NPV(r) = 0 \Rightarrow r = 27.5\%$

Lösning I.23

Sök räntesatsen som ger $NPV=0$.

$$\text{Internränta} \Rightarrow NPV(r) = 0 \Rightarrow -100 + \frac{75}{(1+r)} + \frac{75}{(1+r)^2} = 0$$

$$x = (1+r) \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 0$$

i) $r_1 = 31,9\%, (r_2 = -156,9\% \Rightarrow \text{förkastas})$

ii) $r_1 = 0\%, (r_2 = -166,7\% \Rightarrow \text{förkastas})$

Svar: Internräntan är för projekt i) 31,9 % och för ii) 0%.

Lösning I.25

$$a) \quad NPV_j = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1+R_j} + \frac{\beta_2}{(1+R_j)^2} = 0$$

$$\Rightarrow R_a = 100\% \quad R_b = 54\% \quad R_c = 62\%$$

b) A ty $R_a > R_c > R_b$

Lösning I.26

i.) 2 år

$$\text{ii.) } NPV = -200 + \sum_{i=1}^4 \frac{100}{(1+r)^i} = 117 \text{kr}$$

$$\text{iii.) } NVK = \frac{NPV}{G} = 0.585$$

Lösning I.27

$$NPV = -G + \sum_{k=1}^n \frac{a}{(1+r)^k} = -G + a \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 0$$

$$\text{Lös ut } r \Rightarrow r = \frac{a}{G} - \frac{a}{G(1+r)^n}; r \rightarrow \frac{a}{G} \text{ då } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Payofftiden} = G/a$$

Approximationen bättre för stora n och r .

Lösning I.28

$$NVK = \frac{-G + \sum a_i(1+r)^{-i}}{G}$$

$$NVK_1 = 40/30 = 1.33$$

$$NVK_2 = 5/15 = 0.33$$

$$NVK_3 = 0.71$$

$$NVK_4 = 1.31$$

$$NVK_5 = 1$$

Rangordning 1-4-5-3-2

Lösning I.29

a)

i) Använd nuvärdeskvot:

$$\left. \begin{aligned} NVK_A &= 250/200 = 1.25 \\ NVK_B &= 1.17 \\ NVK_C &= 1.4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Rangordning } C, A, B$$

ii) Nuvärde alternativt internränta $\Rightarrow C, B, A$

b) Frigjort kapital förräntas till olika räntor.

Lösning I.30

a)

Lönsam investering innebär $NPV > 0$ och bäst investering är den med högst NPV. Jämför, med A:s kalkylränta på 17%, vilken investering som ger störst NPV.

$$NPV_1(r) = -100 + \frac{20}{(1+r)} + \frac{150}{(1+r)^2}$$

$$NPV_2(r) = -80 + \frac{115}{(1+r)} + \frac{10}{(1+r)^2}$$

$$NPV_1(0,17) = 26,67'$$

$$NPV_2(0,17) = 25,60'$$

Svar: Välj investering 1 ty $NPV_1 > NPV_2$.

b)

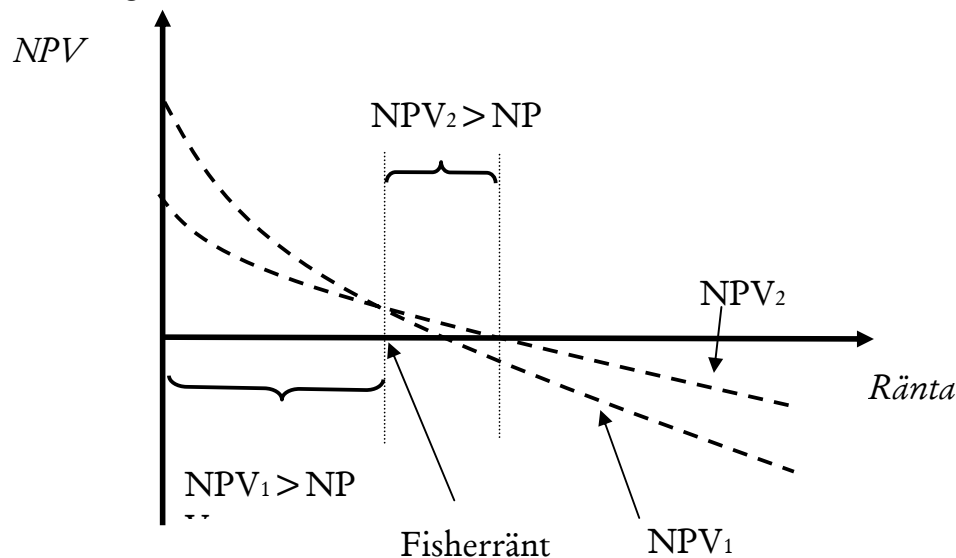
Som a) men med $r = 19\%$ ger

$$NPV_1(0,19) = 22,73'$$

$$NPV_2(0,19) = 23,70'$$

Svar: Välj investering 2 ty $NPV_2 > NPV_1$.

c) Uppgift a) och b) ger exempel på två investeringar som har en **Fisherränta**. En skiss ger att de båda investeringarna har följande utseende i en graf som illustrerar ränta kontra NPV.



Som synes i a) och b) ger lönsamhetsberäkningarna olika resultat beroende på kalkylräntans värde. Orsaken är att kurvorna korsar varann och därmed blir investering 2 lönsammare än investering 1 för en kalkylränta som överstiger Fisherräntan.

d)

$$NPV_1(r) = NPV_2(r)$$

$$-100 + \frac{20}{(1+r)} + \frac{150}{(1+r)^2} = -80 + \frac{115}{(1+r)} + \frac{10}{(1+r)^2}$$

$$r = 18,04\%$$

e) Beräkna internräntan, ty en ökning av räntan innebär att investeringen får ett negativt NPV och är därmed inte lönsam. Internräntorna fås genom att sätta $NPV = 0$ och lösa ut r .

$$NPV_1(r_1) = -130 + \frac{20}{(1+r_1)} + \frac{150}{(1+r_1)^2} = 0 \Rightarrow r_1 = 15,38\%$$

$$NPV_2(r_2) = -120 + \frac{115}{(1+r_2)} + \frac{10}{(1+r_2)^2} = 0 \Rightarrow r_2 = 3,86\%$$

Investering 2 är alltså bara lönsam upp till en kalkylränta på 3,86 % medan investering 1 är lönsam upp till 15,38 %. Det innebär att med A&T:s föreslagna kalkylräntor blir inget av projekten värda att investera i eftersom båda då ger negativt NPV. En Fisherränta föreligger dock på 29,67% och då är NPV negativt för båda investeringarna. Skulle detta

vara en tvingad investering, dvs ett alternativ måste väljas, blir Fisherräntan intressant, trots att båda investeringarna uppvisar negativt NPV. Detta för att Fisherräntan ändå innebär en rangordning av projekten.

Lösning I.31

$$NPV_1(r_1) = -100 + \frac{150}{(1+r_1)} + \frac{100}{(1+r_1)^2}$$

$$NPV_2(r_2) = -100 + \frac{230}{(1+r_2)}$$

1) Beräkna internräntan, dvs $NPV(r) = 0$. Detta ger:
 $r_1 = 100\%$ och $r_2 = 130\%$. Projekt 2 är bäst ty $r_2 > r_1$.

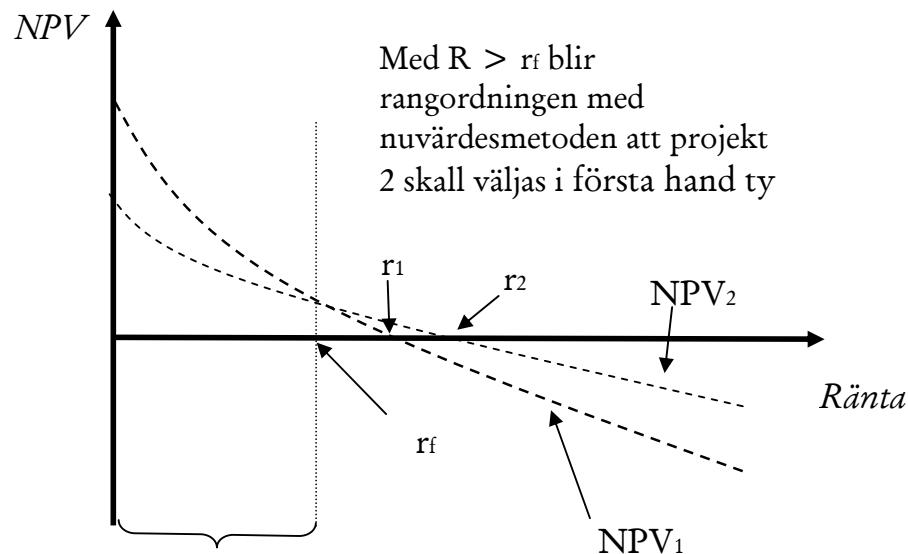
2) Beräkna Fisherräntan, dvs $NPV_1(r_f) = NPV_2(r_f)$. Detta ger $r_f = 25\%$

3) Sätt R = företagets kalkylränta. Används för att beräkna NPV.

Slutsats (se figur nedan):

Om $R > r_f (25\%)$ ger metoderna samma rangordning för projekten.

Om $R < r_f (25\%)$ ger metoderna olika rangordning.



Med $R < r_f$ blir rangordningen med nuvärdesmetoden att projekt 1 skall väljas i första hand ty $NPV_1 > NPV_2$.

Lösning I.32

a)

$$r_e = (1-s) \cdot r_f = [r_e = 0,07] \Rightarrow r_f = 0,1$$

$$NPV = -21 + 5 \frac{1-1,1^{-6}}{0,1} = 0,8'$$

Svar: NPV = 800 kr > 0 dvs lönsam investering.

b)

$$r_e = 0,07$$

$$\text{Avskrivningar (20-regeln): } \frac{G}{5} = \frac{21'}{5} = 4,2'$$

$$\text{Endast skattedelen ger positivt bidrag} \Rightarrow s \cdot 4,2'$$

$$\text{Även intäkterna måste beskattas} \Rightarrow (1-s) \cdot 5' = 3,5'$$

$$NPV = -21 + 3,5 \cdot \frac{1-1,07^{-6}}{0,07} + 4,2 \cdot 0,3 \cdot \frac{1-1,07^{-5}}{0,07} = 0,85'$$

Svar: NPV = 850 kr

c) Lönsamma projekt utan skattehänsyn är även lönsamma med skattehänsyn. Däremot kan olönsamma projekt utan skattehänsyn bli lönsamma med skattehänsyn, då vinstgenererande företag har möjlighet att göra avskrivningar, vilket i investeringssammanhang betraktas som inbetalningar.

Lösning I.33

a) $(1+r_n) = (1+i)(1+r_r)$

b) $(1+r_n) = (1+i)(1+r_r) \Rightarrow r_n = 16,6\%$

$$NPV_n = -1300 + 400(1+r_n)^{-1} + 600(1+r_n)^{-2} + 650(1+r_n)^{-3} = -105,6 \text{ tkr}$$

Svar: NPV = -105,6 tkr

c) $NPV_r = -1300 + 400(1+i)^{-1}(1+r_r)^{-1} + 600(1+i)^{-2}(1+r_r)^{-2} + 650(1+i)^{-3}(1+r_r)^{-3}$
= -105,6 tkr

d) Vid en nominell kalkyl anges betalningarna i det aktuella årets priser. Det innebär att priserna är löpande dvs löpande penningvärde, där inflationen är inkluderad. Använd nominell kalkylränta.

Vid real kalkyl anges alla betalningskonsekvenser omräknat i dagens penningvärde. Det innebär att priserna är reala d v s fast penningvärde. Använd real kalkylränta.

Lösning I.34

a)

År	Bokfört värde (30- regel)	(20-r)	Tillåtet avdrag (30-regeln)	(20-regeln)	Högsta avdrag	Skattebe- sparing (a · s)
0	1000	1000	-	-	-	-
1	700	800	300 (0.3·1000)	200 (1000- 800)	300 (30- regel)	225 (300·0.75)
2	490	600	210 (0.3·700)	100 (700- 600)	210 (30)	157.5
3	343	400	147 (0.3·490)	90 (490-400)	147 (30)	110.25
4	240	200	103 (0.3·343)	143 (343- 200)	143 (20)	107.25
5	140	0	60 (0.3·200)	200 (200-0)	200 (20)	150

b) Säljvärdet $y = 800$ tkr

Grundinvestering $G = 1000$ tkr

Gjorda avskrivningar $= 4 \cdot 200$ tkr $= 800$ tkr

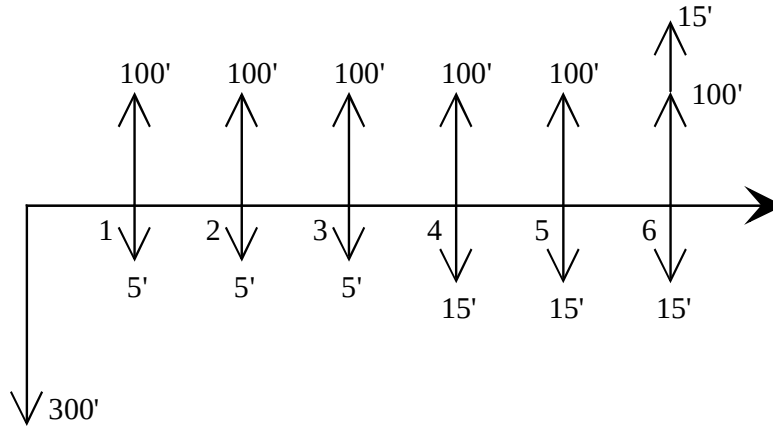
Bokfört värde år 4 $BV = G - 800$ tkr $= 200$ tkr

Restvärde $S = y(1-s) + s \cdot BV = 800(1-0.75) + 0.75 \cdot 200$ tkr $= 350$ tkr

c) **Nuvärdet ökar**, då de fiktiva inbetalningarna som avskrivningar motsvarar inträffar tidigare och har därmed större positiv påverkan på nuvärdet.

Lösning I.35

a)

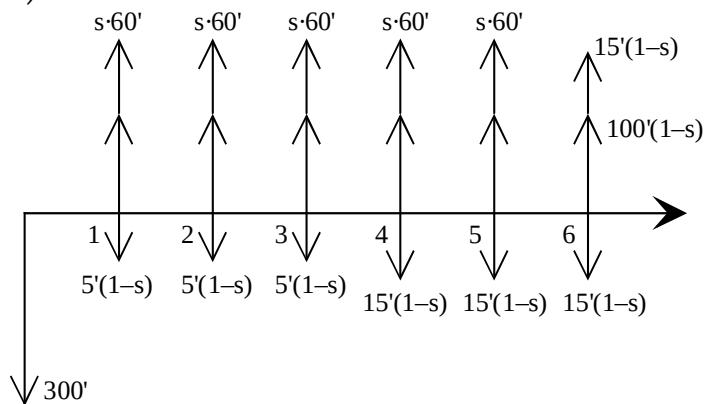


$$NPV_a = -300' + 95' \frac{1 - (1 + r_f)^{-3}}{r_f} + 85' \frac{1 - (1 + r_f)^{-3}}{r_f} (1 + r_f)^{-3} + 15' (1 + r_f)^{-6}$$

$$r_f = 0.15 \Rightarrow NPV_a = 51 \text{ tkr}$$

Svar: NPV = 51 tkr

b)



$$NPV_b = -300' + (100'(1-s) + s \cdot 60' - 5'(1-s)) \cdot \frac{1 - (1 + r_e)^{-3}}{r_e} + [100'(1-s) + s \cdot 60' - 15'(1-s)] \cdot \frac{1 - (1 + r_e)^{-2}}{r_e} \cdot (1 + r_e)^{-3} + \frac{100'(1-s) + 15'(1-s) - 15'(1-s)}{(1 + r_e)^6}$$

$$r_e = (1-s)r_f = 0.09 \Rightarrow NPV_b = 42.7 \text{ tkr}$$

Svar: NPV = 42,7 tkr

Lösning I.37

$$r_{ne} = (1-s)r_{nf} = 12.5\%$$

$$(1+r_n) = (1+i)(1+r_r) \Rightarrow r_{re} = 4.17\%$$

$$NPV = -1000 + \sum_{j=1}^5 \frac{s \cdot 0.2 \cdot G}{(1+r_{ne})^j} + \sum_{j=1}^3 \frac{(1-s)300}{(1+r_{re})^j} + \sum_{j=4}^5 \frac{(1-s)200}{(1+r_{re})^j} + (1-s)200(1+r_{re})^{-5} = 18.95$$

Lösning I.38

a) $r_{ne} = 5.125\%$

$$NPV_{avbet} = \sum_{i=1}^5 \frac{5000}{(1+r_{ne})^i} + \sum_{i=6}^{15} \frac{7500}{(1+r_{ne})^i} + \sum_{i=16}^{20} \frac{10000}{(1+r_{ne})^i} = 86794 \text{ kr}$$

⇒ Betala av nu!

b) i) $r_{ne} = 5.125\%$ låneräntan $r_D = 14\%$

$$NPV = 20 \left(\frac{1}{(1+r_{ne})^5} + \frac{1}{(1+r_{ne})^{10}} + \frac{1}{(1+r_{ne})^{15}} + \frac{1}{(1+r_{ne})^{20}} \right) + \sum_{i=1}^5 80 \frac{(1-s)r_D}{(1+r_{ne})^i} +$$

$$\sum_{i=6}^{10} 60 \frac{(1-s)r_D}{(1+r_{ne})^i} + \sum_{i=11}^{15} 40 \frac{(1-s)r_D}{(1+r_{ne})^i} + \sum_{i=16}^{20} 20 \frac{(1-s)r_D}{(1+r_{ne})^i} = 92\,980 \text{ kronor}$$

⇒ Välj normal avbetalning!

ii) $r_{ne} = 2.56\%$

$$NPV_{lån} = 87\,722 \text{ kr (se ovan)}$$

$$NPV_{avbet} = 112\,570 \text{ kr (se a)}$$

⇒ Välj lånet!

Lösning I.40

A&T: Varierande prisutveckling på bränsle, intäkter, säljvärde och resterande parametrar.

Givet		
r_{NB}	0.20	Nom. ränta före skatt
s	0.34	Skattesats
h (inflation)	0.02	För C_{main} , C_{staff} , S_T
h_f (bränsle)	0.04	För C_{fuel}
h_r (intäkt)	0.01	För R
T_E	20	År (avskrivningsperiod)
T_M	40	År (teknisk livslängd)
T_D	5	År (bränslekontrakt)
G	5000	Tot.inv. (inkl. handp.) (tkr)
G_C	800	Handpenning (tkr)
Y_T		Säljvärde (se tabell 1)
C_{main}	200	Underhåll (tkr/år) $t = 2, 3, \dots, T_M$
C_{staff}	1500	Personal (tkr/år) $t = 2, 3, \dots, T_M$
C_{fuel}	500	Bränsle (tkr/år) $t = 2, 3, \dots, T_M$
B_i		Bokfört värde (tkr)
R	3500	Förväntad intäkt (tkr/år) $t = 2, 3, \dots, T_M$

Ränta:

$$r_{NA} = (1-s)r_{NB}$$

$$r_{RA} = \frac{r_{NA} - h}{1+h}$$

- Generell inflation för r_{NA} , använd nominell kalkyl genom att uppdatera bränslepris och intäkt.
- Rörelsen startar under andra året, $t = 1$ istället för $t = 0$. Låt $T =$ avvecklingsår.

$$\begin{aligned}
 NPV(T) = & -G_C - (G - G_C)(1 + k_{NA})^{-1} \\
 & + \sum_{t=2}^T (1-s)R(1+h_r)^t(1+r_{NA})^{-t} \\
 & - \sum_{t=2}^T (1-s)(C_{main} + C_{staff})(1+h)^t(1+r_{NA})^{-t} \\
 & - \sum_{t=2}^{T_D+1} (1-s)C_{fuel}(1+r_{NA})^{-t} \\
 & - \sum_{t=T_D+2}^T (1-s)C_{fuel}(1+h_f)^t(1+r_{NA})^{-t} \\
 & + \sum_{t=2}^{T_E+1} s \frac{I}{T_E}(1+r_{NA})^{-t} \\
 & + (1-s)[Y_T(1+h)^T - B_T](1+r_{NA})^{-T}
 \end{aligned}$$

a)

Fartyget används i 6 år, beräkna $T = 7$:

$$\begin{aligned}
 NPV(7) = & -G_C - (G - G_C)(1+r_{NA})^{-1} \\
 & + R(1-s) \frac{(1+h_r)^2}{1+r_{NA}} \frac{1-(1+h_r)^6(1+r_{NA})^{-6}}{r_{NA}-h_r} \\
 & - (C_{main} + C_{staff})(1-s) \frac{(1+h)^2}{1+r_{NA}} \frac{1-(1+h)^6(1+r_{NA})^{-6}}{r_{NA}-h} \\
 & - C_{fuel}(1-s)(1+r_{NA})^{-1} \frac{1-(1+r_{NA})^{-T_D}}{r_{NA}} \\
 & - C_{fuel}(1-s)(1+h_f)^7(1+r_{NA})^{-7} \\
 & + \frac{s}{T_E} I(1+r_{NA})^{-1} \frac{1-(1+r_{NA})^{-6}}{r_{NA}} \\
 & + ((1-s)(1+h)^7 Y_6 + s \frac{14}{20} I)(1+r_{NA})^{-7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NPV(7) = & -800 - 3710.25 + 8454.81 - 4279.45 - 1020.36 - 182.32 \\
 & + 298.51 + 1645.44 \\
 = & 406.38
 \end{aligned}$$

⇒ Nuvärdet är 406,38 tkr.

b)

Nuvärden är additiva, sök inkremental värdet, dvs $NPV_{\text{kontrakt}} - NPV_{\text{ej}}$

$$\text{kontrakt } Värde_{\text{bränslekontrakt}} = \sum_{t=2}^{T_D+1} (1-s) C_{\text{fuel}} \left((1+h_f)^t - 1 \right) (1+r_{NA})^{-t} = 163630 \text{ kr}$$

$\Rightarrow$ Värdet av bränslekontraktet är 163 630 kr.

Lösning I.41

a) Jämför nuvärdena för maskin ett och två

$$NPV_1 = -100 + 40 \frac{1-1,1^{-5}}{0,1} = 51,6$$

$$NPV_2 = -250 + 90 \frac{1-1,1^{-5}}{0,1} = 91,2$$

$\Rightarrow$ Köp maskin två

b) Då det är olika livslängd på maskinerna, måste man jämföra annuiteterna för maskin 2 och 3.

$$NPV_3 = 104,7$$

$$a_3 = NPV_3 \frac{0,1}{1-1,1^{-7}} = 21,5$$

$$a_2 = NPV_2 \frac{0,1}{1-1,1^{-5}} = \{NPV_2 = 91,2\} = 24,1$$

$\Rightarrow$ Köp maskin 2!

Lösning I.42

a) Jämför nuvärden

$$NPV_{\text{länk}} = -150000 + 30000 \frac{1-1,1^{-10}}{0,1} = 34337 \text{ kr}$$

$$NPV_i = 20000 \frac{1-1,1^{-5}}{0,1} + \frac{1}{1,1^5} \cdot 34337 \frac{1}{1-1,1^{-10}} = 110514 \text{ kr}$$

$$NPV_{ii} = 20000 \frac{1-1,1^{-5}}{0,1} + \frac{1}{1,1^5} \left(-50000 + 25000 \frac{1-1,1^{-3}}{0,1} \right) + \frac{10000}{1,1^8} +$$

$$34337 \cdot \frac{1}{1,1^8} \frac{1}{1-1,1^{-10}} = 114108 \text{ kr}$$

$\Rightarrow$ Välj alternativ ii!

b) Jämför annuiteter

$$a_i = NPV_i \frac{0,1}{1-1,1^{-\infty}} = 11051$$

$$a_{ii} = NPV_{ii} \frac{0,1}{1-1,1^{-\infty}} = 11411$$

⇒ Välj fortfarande alternativ *ii*.

Lösning I.45

Annuitet (årskostnad) för ny maskin:

$$\hat{a}_{nymaskin} = \left(-100' - 10' \frac{1 - (1+r)^{-6}}{r} + 10'(1+r)^{-6} \right) \frac{r}{1 - (1+r)^{-6}} = -27776 \text{ kr}$$

Driftskostnad gammal maskin år $i = 20\,000 + 3\,000(i-1)$

Kapitalkostnad gammal maskin år $i = 10000(1+r) - 10000 = 1000$

Årskostnad gammal maskin år $i = \text{Driftskostnad år } i + \text{kapitalkostnad år } i$
 $=$
 $20\,000 + 3\,000(i-1) + 1000 = 21\,000 + 3\,000(i-1)$

Jämför årskostnader, byt valsverk år då $\text{årskostnad gammal maskin} > \text{årskostnad ny maskin}$

$$21\,000 + 3\,000(i-1) > 27776 \Rightarrow i = 3,26$$

Prövning ger $i=4$; VL=30 000 och VL > HL

$i=3$; VL = 27 000 och VL < HL

⇒ Byt efter 3 år

Lösning I.46

Annuitet (årskostnad) för ny maskin:

$$\left(-80' - 12' \frac{1 - (1+r)^{-7}}{r} + 10'(1+r)^{-7} \right) \frac{r}{1 - (1+r)^{-7}} = -30325 \text{ kr}$$

Driftskostnad gammal maskin år $i = 21\,500 + 1\,500(i-1)$

$$\text{Kapitalkostnad gammal maskin år } 1 = 10000(1+r) - 5000 = 6500$$
$$\text{år } i = 0.9^{i-2}(5000(1+r) - 5000 \cdot 0.9); i \geq 2$$

Årskostnad gammal maskin år i = Driftskostnad år i + kapitalkostnad år i
=
Jämför årskostnader, byt maskin då *årskostnad gammal maskin* >
årskostnad ny maskin

År 1: $21\,500 + 1\,500(1-1) + 6\,500 = 28\,000 < 30\,325$ dvs behåll gammal maskin

År i (Byt år i när nedanstående ekvation är uppfylld):

$$21500 + 1500(i-1) + 0.9^{i-2}(5000(1+r) - 0.9 \cdot 5000) > 30325; i \geq 2$$

$$\Rightarrow i + \frac{1250}{1500} 0.9^{i-2} > \frac{10325}{1500} = 6.88$$

Prövning ger $i=7$; VL > 7 och VL > HL
 $i=6$; VL = 6.55 och VL < HL

$\Rightarrow$ Byt efter 6 år

Lösning I.47

NPV_k = Nuvärdet av kedjan

NPV_L = Nuvärdet av länken = 1000 tkr

N = Tid mellan två länkar = 12 år

$$NPV_{k, \text{år } 9} = NPV_L (1 + (1+r)^{-N} + (1+r)^{-2N} + \dots) = \frac{NPV_L}{1 - (1+r)^{-N}}$$

$r = 10\%$

$$NPV_K = \frac{1000}{1 - 1.1^{-12}} = 1467 \text{ tkr}$$

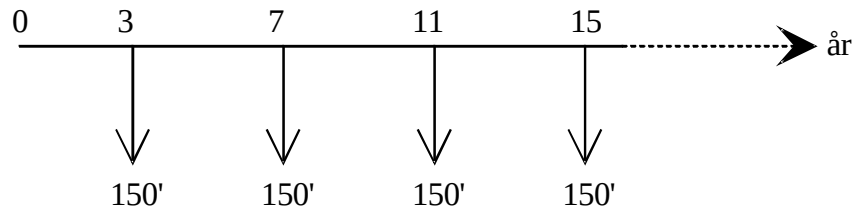
Detta gäller dock vid år 9 eftersom kedjan startar där. Diskonterat till idag:

$$NPV_{k, \text{år } 0} = \frac{1467}{1.1^9} = 622 \text{ tkr}$$

Svar: Nuvärdet av kedjan är 622 tkr.

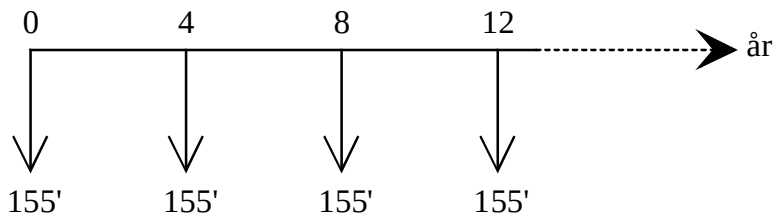
Lösning I.49

Alt. 1 Utan filter:



$$NPV_1 = (110' + 40') \cdot \frac{1}{1 - (1+r)^{-4}} \cdot \frac{1}{(1+r)^3} = 167.7 \text{ tkr}$$

Alt. 2 Med filter:

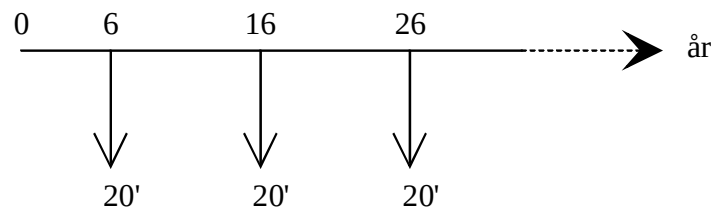


$$NPV_2 = (110' + 40' + 5') \cdot \frac{1}{1 - (1+r)^{-4}} = 299.4 \text{ tkr}$$

Merkostnad = 299.4' - 167.7' = **131.7 tkr** och staten betalar 99 kkr.

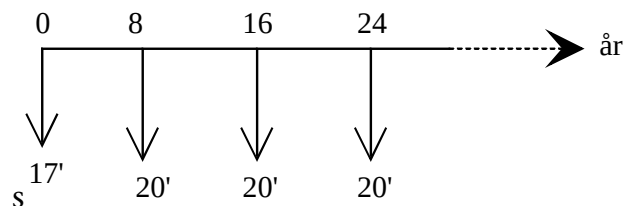
Lösning I.50

Alt. 1:



$$NPV_1 = -20' \cdot \frac{1}{1 - (1+r)^{-10}} (1+r)^{-6} = -18,4' \text{ kr}$$

Alt. 2:



$$NPV_2 = -17 - 20 \frac{1}{1 - (1+r)^{-8}} (1+r)^{-8} = -34,5 \text{ kr}$$

$$\text{Merkostnad} = |NPV_1 - NPV_2| = 16,1 \text{ kr}$$

Svar: 16 100 kr.

Lösning I.51

- a) $PV = 100000 \cdot e^{-0.1200 \cdot 1} \approx 88692 \text{ kr}$
 b) Samband mellan diskret ränta, r , och kontinuerlig, ρ : $(1+r) = e^\rho$
 $\Rightarrow r = e^\rho - 1 = e^{0.1200} - 1 \approx 12.75\%$

Lösning I.52

Utgå ifrån: $r_e = r_f(1-s)$

$$e^{\rho_e t} = 1 + r_t \Rightarrow \rho = \frac{1}{t} \ln(1 + r_t)$$

$$\rho_e = \frac{1}{1} \ln(1 + r_e) = \ln(1 + (1-s)r_f) = \ln(1 + (1-0.3)0.10) = 6.76\%$$

Lösning I.53

$$(1 + r_{eff})^{\frac{d}{360}} = \left(1 + r_{erk} \frac{d}{360}\right) \Rightarrow r_{eff} = \left(1 + r_{erk} \frac{d}{360}\right)^{\frac{360}{90}} - 1$$

 Numeriskt: $r_{eff} = \left(1 + 0.0421 \frac{90}{360}\right)^{\frac{360}{90}} - 1 \approx 4.28\%$
 $(1 + r_{eff}) = e^\rho \Rightarrow \rho = \ln(1 + r_{eff}). \text{ Numeriskt: } \rho = \ln 1.0428 \approx 4.19\%$

Lösning I.56

Beräkna NPV i början av 2000 (=slutet av 1999):

$$NPV_{00} = \int_0^3 \rho K e^{-\rho t} dt = \frac{\rho K}{1-\rho} [e^{(1-\rho)t} - 1] = 77217 \text{ kr}$$

Beräkna NPV 1 januari 1999 (=slutet av 1998).

$$NPV_{99} = e^{-\rho t} \cdot 77217 = 71280 \text{ kr}$$

Svar: Vinförsäljningen är idag värd 71 280 kr.

Lösning I.57

$$NPV = -G - \int (18' + 1,5' + 2,5' + 5' + 0,5(t-1))e^{-\rho t} dt + Se^{-\rho T} = -314,63 \text{ tkr}$$

Svar: NPV = -314,6 tkr

Lösning I.58

$$a) \text{ } NPV_A = 1000 \frac{1 - (1+r)^{-\infty}}{r} - 1000 \frac{1}{1 - (1+r)^{-2}} = 200 \text{ kr}$$

Svar: 200 kr

$$\rho = \ln(1+r) = 0.405$$

$$NPV_B = -1000 + \int_0^{\infty} k e^{0,2t - \rho t} dt = -1000 + \frac{k}{\rho - 0,2} = -1000 + 4,867k$$

Svar: -1000 + 4,87k

$$c) \text{ } NPV_B > NPV_A \Rightarrow -1000 + 4.87k > 200 \Rightarrow k > 247$$