LÖSNINGAR TENTAMEN 28/10 2011

Uppgift 1

a) $\Rightarrow$ E.

b) $\Rightarrow$ A.

c) $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 2$

$Var(X_1) = Var(X_2) = Var(X_3) = 9$

$$Y = 3X_1 - 2X_2 + X_3$$

$$E(Y) = 3E(X_1) - 2E(X_2) + E(X_3)$$
$$= 3(2) - 2(2) + 2 = 4$$

$$Var(Y) = 3^2 Var(X_1) + 2^2 Var(X_2) + Var(X_3)$$
$$= 9(9) + 4(9) + 9 = 126$$

$\Rightarrow$ C.

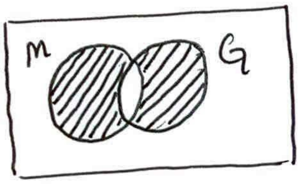
Uppgift 2.

M = mustasch   G = glasögon

$P(M) = 0.40$ $P(G) = 0.30$ $P(G \cap M) = 0.25$

a) $P(G|M) = \dfrac{P(G \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0.25}{0.40} = 0.625 \Rightarrow$ E.

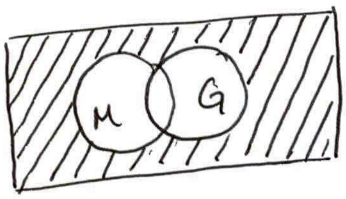
b) Vi söker $P(G \cup M) - P(G \cap M)$



$$P(G \cup M) = P(G) + P(M) - P(G \cap M)$$
$$= 0.30 + 0.40 - 0.25 = 0.45$$

$$P(G \cup M) - P(G \cap M) = 0.45 - 0.25 = 0.20 \Rightarrow \text{C.}$$

c) Vi söker $1 - P(G \cup M)$



$P(G \cup M) = 0.45$

$1 - 0.45 = 0.55$

$\Rightarrow$ A.

Uppgift 4.

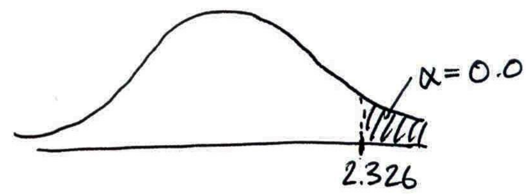
a) $H_0: P = 0.08 \quad H_1: P > 0.08 \Rightarrow$ B.

b) Testvariabel: $$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0,1) \text{ under } H_0.$$

Beslutsregel: Ensidigt test och vi förkastar för "stora" värden (i högra svansen)

$\alpha = 0.01$

$Z_{0.01} = 2.326$



∴ Förkasta H_0 om $Z_{obs} > 2.326$

$\Rightarrow$ C.

c) Observerat värde: $\hat{p} = 55/500 = 0.11$

$$Z_{obs} = \frac{0.11 - 0.08}{\sqrt{\frac{0.08(0.92)}{500}}} = 2.473 \approx 2.5 \quad \Rightarrow E.$$

d) Ny undersökning: $n = 500 \quad \hat{p} = \frac{75}{500} = 0.15$

95% konfidensintervall: $\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$$0.15 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.15(0.85)}{500}}$$

$$0.15 \pm 0.0313$$

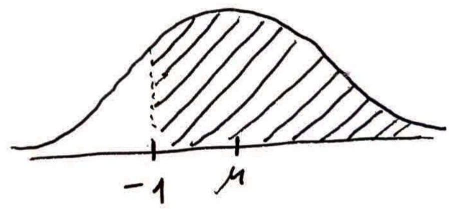
$$[0.119 ; 0.181] \Rightarrow B.$$

Uppgift 3.

X = vikten soppa i g

$X \sim N(\mu, \sigma) \quad \mu = 300 \quad \sigma = 25$

a) $P(X > 275) = P\left(Z > \frac{275-300}{25}\right)$



$= P(Z > -1)$

$= P(Z < 1) = 0.8413 \Rightarrow$ C.

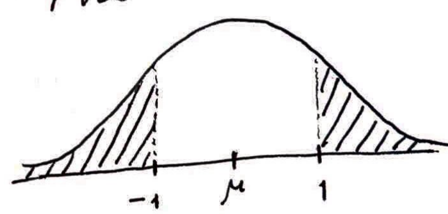
b) $n = 25$, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Vi söker: $1 - P(295 < \bar{X} < 305)$

$P(295 < \bar{X} < 305) = P\left(\frac{295-300}{25/\sqrt{25}} < Z < \frac{305-300}{25/\sqrt{25}}\right)$

$= P(-1 < Z < 1)$

$= 0.6826$



Skuta arean: $1 - 0.6826 = 0.3174 \Rightarrow$ B.

c) Y = # som spiller tomatsoppa

$Y \sim Bin(n, p) \quad n = 10 \quad p = 0.03$

Vi söker: $P(Y \geq 2) = P(Y=2) + P(Y=3) + \cdots + P(Y=10)$

$= 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)]$

$P(Y=0) = \binom{10}{0} 0.03^0 (1-0.03)^{10-0} = 0.97^{10} = 0.73742$

$P(Y=1) = \binom{10}{1} 0.03^1 (1-0.03)^{10-1} = 10 \cdot 0.03 \cdot 0.97^9 = 0.22807$

Alltså: $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [0.73742 + 0.22807]$

$= 1 - 0.96549 = 0.03451$

$\Rightarrow$ D.

Uppgift 5

a) Vi ska testa

H_0: Oberoende mellan val av webbläsare & operativsystem

H_1: Ej ———————— " ————————

Alltså: Test av oberoende i korstabell $\Rightarrow$ χ^2-test

$\Rightarrow$ E. är testvariabeln.

b)

	Mac OS	Windows	R_i
Firefox	285 (294)	315 (306)	600
Chrome	110 (98)	90 (102)	200
Opera	95 (98)	105 (102)	200
C_j	490	510	$n=1000$

Förväntat värde inom parentes ovan, beräknade enligt $E_{ij} = \dfrac{R_i C_j}{n}$

$$\chi^2_{obs} = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(285-294)^2}{294} + \frac{(315-306)^2}{306}$$

$$+ \frac{(110-98)^2}{98} + \frac{(90-102)^2}{102}$$

$$+ \frac{(95-98)^2}{98} + \frac{(105-102)^2}{102} = 3.6014$$

$\Rightarrow$ A.

c) # frihetsgrader: $(r-1)(c-1) = (3-1)(2-1) = 2$, $\alpha = 0.05$

$\chi^2_{2,0.05} = 5.99$

Eftersom $\chi^2_{obs} = 3.6014 < 5.99$ kan vi ej förkasta H_0

$\Rightarrow$ D.

Uppgift 6.

Män	kvinnor
$n_x = 186$	$n_y = 210$
$\bar{x} = 1566.5$	$\bar{y} = 1671.5$
$S_x = 863.3$	$S_y = 730.2$

a) 95% konfidensintervall för $(\mu_x - \mu_y)$:

oberoende urval, $n_x > 30, n_y > 30$, σ_x^2 okänd, σ_y^2 okänd

$$\Rightarrow (\bar{x}-\bar{y}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}$$

$$(1566.5 - 1671.5) \pm 1.96\sqrt{\frac{(863.3)^2}{186} + \frac{(730.2)^2}{210}}$$

$$-105 \pm 1.96(80.90691)$$

$$-105 \pm 158.5775$$

$$[-263.5775 ; 53.5775]$$

Tolkning: med 95% säkerhet kommer intervallet att täcka den sanna skillnaden mellan medelantalet ord talade hos kvinnor och män.

b) Vi vill testa $H_0: \mu_x - \mu_y = 0$ (ingen skillnad)

$H_1: \mu_x - \mu_y \neq 0$ (det råder skillnad)

Eftersom intervallet i (a) täcker värdet 0 (dvs det värde vi har i H_0), kommer vi ej kunna förkasta H_0 på 5% signifikansnivå. Alltså har vi inte stöd för att det finns skillnad i medelantalet ord talade av män och kvinnor under en dag.

$\longrightarrow$

→ uppgift 6, forts.

c) $H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

$H_1: \mu_x - \mu_y < 0$ (ensidigt test)

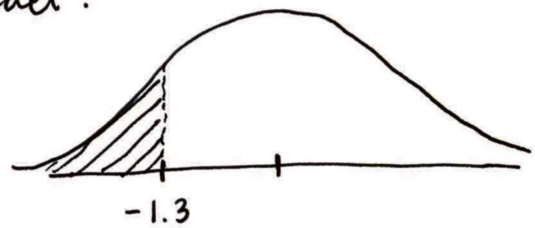
Testvariabel:

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - D_0}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}}$$

Observation:

$$Z_{obs} = \frac{(1566.5 - 1671.5)}{\sqrt{\frac{(863.3)^2}{186} + \frac{(730.2)^2}{210}}} = \frac{-105}{80.90691} = -1.298 \approx -1.3$$

p-värdet:



$P(Z < -1.3) =$

$1 - P(Z < 1.3) = \underline{\underline{0.0968}}$

Tolkning: p-värdet är sannolikheten att vi kommer att observera ett mer extremt värde än det värde vi observerat givet att nollhypotesen är sann.

För att professorn ska kunna förkasta H_0 måste en signifikansnivå α väljas som är större än p-värdet.

Dvs för att förkasta H_0 måste vi välja

$\alpha > 0.0968$.