Betingad sannolikhet. Oberoende händelser.

Antag att vi vet att en tärning fallit så att den visar udda antal prickar. Denna förhandskunskap påverkar förstås våra sannolikhetsberäkningar; så t.ex. är nu P (3 prickar) = $\frac{1}{3}$ i motsats till $\frac{1}{6}$ som skulle gällt om vi ingenting vetat.

Allmänt gäller att om en händelse B inträffat och vi sedan söker sannolikheten för en händelse A så betecknas denna sannolikhet med $P(A/B)$ (detta utläses "sannolikheten för A *betingat* av B") och vi har:

(4) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Också denna formel är lätt att minnas om ytresonemang användes. Vi har så att säga fått B som nytt utfallsrum och $P(A/B)$ blir då *den del av detta* som A upptager dvs $= P(A \cap B)/P(B)$. (jfr fig. 3).

Om vi vet att händelserna A och B är *oberoende* av varandra så innebär detta att vår förhandskunskap att B inträffat inte påverkar sannolikheten att A inträffar, dvs vi har $P(A/B) = P(A)$. Insatt i (4) ger detta:

(5) $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{om}^{*} \; A \text{ och } B \text{ oberoende.}$$

Not. Formel (4) kan skrivas $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ och om vi här byter A och B får vi $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A)$. Men $P(B \cap A)$ är förstås lika med $P(A \cap B)$ och vi har således:

(5A) $$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Denna dubbla möjlighet att "lösa upp" $P(A \cap B)$ kommer ofta till användning (Se ex. 6).

Not. Formel (5) kan generaliseras till:

(6) $$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$$

som alltså gäller om händelserna A_i är oberoende. En motsvarande generalisering av (5A) existerar också, men själva formeln är klumpig så vi skriver inte upp den. (~~Principen framgår av tillägg 1.~~)

* I själva verket gäller här $\Leftrightarrow$ dvs $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ är *definitionen* på oberoende mellan två händelser.

Ex. 6 Vi har två urnor. Den första urnan innehåller 2 vita och 3 svarta kulor, medan den andra urnan innehåller 1 vit och 2 svarta. En kula tages på måfå från den första urnan och lägges (utan att man ser dess färg) i den andra urnan. Därefter drages en kula (på måfå) ur denna andra urna.

a) Vad är sannolikheten att den dragna kulan är vit?

b) Betingat av att den dragna kulan är vit, vad är sannolikheten att den överflyttade kulan var svart?

Lösning: Man ska alltid börja med att införa beteckningar för de ingående händelserna. Därvid ska man se till att man inte inför för få beteckningar (då går inte talet att lösa) eller för många (då blir det svåröverskådligt). Vi inför här: V_1 = den överflyttade kulan är vit. S_1 = den överflyttade kulan är svart. V_2 = den dragna kulan är vit. S_2 = den dragna kulan är svart. (Genom att använda $S_1 = V_1^*$ och $S_2 = V_2^*$ kunde vi klarat oss med färre beteckningar men det hade här inte varit någon särskild vinst.) Nästa steg är att skriva upp vad som är givet. Vi har $P(V_1) = \frac{g}{m} = \frac{2}{5}$. $P(S_1) = \frac{3}{5}$ $P(V_2/V_1) = \frac{2}{4}$ (ty om vi vet att en vit kula flyttats över har vi fått 2 vita kulor i den andra urnan och 4 kulor totalt). På samma sätt: $P(V_2/S_1) = \frac{1}{4}$.

Nu övergår vi till att se vad som är sökt. I a) gäller det att bestämma $P(V_2)$. Eftersom händelsen V_2 alltid inträffar tillsammans med minst en av händelserna V_1 och S_1 gäller att $V_2 = V_2 \cap (V_1 \cup S_1)$ dvs. enl räknelag 1 sid 4 har vi $V_2 = (V_2 \cap V_1) \cup (V_2 \cap S_1)$. Detta ger $P(V_2) = P((V_2 \cap V_1) \cup (V_2 \cap S_1)) = (2) = P(V_2 \cap V_1) + P(V_2 \cap S_1) - P((V_2 \cap V_1) \cap (V_2 \cap S_1))$. Eftersom V_1 och S_1 inte kan inträffa samtidigt kan inte heller $(V_2 \cap V_1)$ och $(V_2 \cap S_1)$ inträffa samtidigt, dvs. $P((V_2 \cap V_1) \cap (V_2 \cap S_1)) = 0 \therefore P(V_2) = P(V_2 \cap V_1) + P(V_2 \cap S_1) = (5A) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) + P(S_1) \cdot P(V_2/S_1) = (\text{enl. det givna}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$.

I b) ska vi tydligen bestämma $P(S_1/V_2)$. Vi har $P(S_1/V_2) = (4) =$

$$= \frac{P(S_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = (5A) = \frac{P(S_1) \cdot P(V_2/S_1)}{P(V_2)} = \frac{3/5 \cdot 1/4}{7/20} = \frac{3}{7}.$$

Not. Vad vi gjort i a) är att vi (i princip) härlett en lag som kallas *totala sannolikhetslagen*. Under hänvisning till denna kunde vi direkt ha satt upp sambandet $P(V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) + P(S_1) \cdot P(V_2/S_1)$. Knepet att "vända på betingningen" som vi använt i b) är huvudidén i den s.k. "Bayes sats". Frågeställningen i b) kan förefalla ovanlig, men i själva verket finns det många praktiska situationer där Bayes sats kommer till användning.

III. STOKASTISK VARIABEL.

Uttrycket "stokastisk variabel" kan skrämma vem som helst, men i själva verket rör det sig om en smart form av *beteckningssätt* som vi faktiskt redan har använt oss av. När vi nämligen i exempel 5 använde X för att beteckna antalet prickar vid kast med en tärning, så var det just en stokastisk variabel vi införde! Mera allmänt gäller följande:

En storhet X vars värde beror på slumpen kallas för en stokastisk variabel. Mängden av de värden som X kan antaga betecknas Ω_X. Om Ω_X har ändligt eller numrerbart oändligt* många element så kallas X för *diskret*.

Ex. 7 I tärningsexemplet är $\Omega_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ och X följaktligen en diskret stokastisk variabel.

Ex. 8 Tärningen kastas till dess man får en sexa. Låt X beteckna antalet kast som behövs. $\Omega_X = \{1,2,3,4...\}$. Här är antalet element i Ω_X inte ändligt, det finns ju ingen övre gräns för antalet kast som behövs för att få en sexa. (Visserligen är sannolikheten för att man skulle få hålla på mer än säg 1000 gånger "försvinnande liten" men det var ju inte detta det gällde.) Antalet element är dock numrerbart oändligt varför X är diskret.

För en s.k. *kontinuerlig stokastisk variabel* X är antalet element i Ω_X "fler än" numrerbart oändligt många.

Ex. 9 Om ett visst arbete vet man på förhand bara att det tar mellan 1 och 6 timmar att utföra. Låt X beteckna tidsåtgången för arbetet ifråga. Ω_X omfattar nu i princip *alla* reella tal mellan 1 och 6 och denna mängd går inte att numrera. Detta X är således en kontinuerlig stokastisk variabel.

Not. Införandet av stokastiska variabler är mycket praktiskt men man får noga hålla i minnet att X är en beteckning och inte ett tal. Följande exempel illustrerar en vanlig typ av misstag.

---

* "Numrerbart oändligt" innebär att elementen i princip kan numreras, men att det inte finns något "sista" element.

Ex. 10 En på måfå uttagen äggkartong innehåller sex ägg vilkas vikter kan betraktas som stokastiska variabler. Låt Y beteckna vikten av alla sex äggen. Hur ser sambandet mellan Y och de enskilda äggvikterna ut?

Lösning: Helt fel vore $Y = 6X$ där X är den enskilda äggvikten, ty detta skulle svara mot att alla äggen vägde exakt lika mycket. Rätt är istället $Y = X_1 + X_2 +\ldots+ X_6$ där X_i:vikten av ägg nr i. ($i=1,2,\ldots,6$). Obs. att vi har använt ":" istället för "=" mellan den stokastiska variabeln (X_i) och det den betecknar. ("=" är annars mycket vanligt men egentligen inte särskilt logiskt).

De värden som X antar är däremot tal och för att ange att X tar värdet x skriver man $X = x$ där alltså (stora) X är en symbol för något slumpmässigt och (lilla) x är ett tal. (Den som inte kan skilja på stora och små bokstäver kommer tyvärr inte att gå långt inom matematisk statistik!)

IV DISKRET STOKASTISK VARIABEL.

Antag att vi har en diskret stokastisk variabel X. För att fullständigt beskriva hur de värden den antar beror på slumpen, måste vi känna $P(X=x)$ för alla $x \in \Omega_X$. $P(X=x)$, som är en funktion av x, betecknas $p_X(x)$ och kallas för *sannolikhetsfunktionen* för den stokastiska variabeln X.

Sannolikhetsfunktionen har följande viktiga egenskaper:

(7) 1. $0 \leq p_X(x) \leq 1$ för alla x 2. $P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} p_X(x)$

3. $1 = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p_X(x)$

Vi har här antagit att Ω_X = {alla heltal} samt att a och b är heltal; ingetdera antagandet innebär någon inskränkning.

Bevis: 1. följer omedelbart eftersom $p_X(x)$ är en sannolikhet för alla x.
2. följer av formel (3) ty $P(a \leq X \leq b) = P((X=a) \cup \ldots \cup (X=b))$ och dessa händelser är disjunkta. (Jfr. noten nedan!)
3. följer av 2. om vi sätter $a=-\infty$ och $b=+\infty$ och observerar att $P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$.

Ex. 11 (forts. av ex.7) Vi har direkt att $p_X(x) = 1/6$ om $x = 1,2,\ldots,6$ och $= 0$ annars.

Ex. 12 (forts. av ex.8) Inför S_i = i:te kastet ger sexa. Det är förståndigt att alltid börja med att beräkna $p_X(x)$ för ett *visst* x-värde innan man tar sig an ett allmänt x. Vi börjar med t.ex. $p_X(3)$: $p_X(3) =$ $= P(X=3) = P(S_1^* \cap S_2^* \cap S_3)$ = (enligt (6) med $n=3$; vi antar förstås att utfallen av de olika kasten är oberoende av varandra) $= P(S_1^*) \cdot P(S_2^*) \cdot P(S_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6}$. Analogt får vi för allmänt x $(\in \Omega_X)$: $P(X=x) = (\frac{5}{6})^{x-1} \cdot \frac{1}{6}$

$$\because \text{ Svar: } p_X(x) = \begin{cases} (\frac{5}{6})^{x-1} \cdot \frac{1}{6} & \text{om } x=1,2,3\ldots \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Not. Av detta kan vi nu t.ex. räkna ut $P(3 \leq X \leq 5) = P((X=3) \cup (X=4) \cup (X=5)) =$ $= (3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \sum_{x=3}^{5} p_X(x)$ etc.

Oberoende diskreta stokastiska variabler.

Om *samtliga* de händelser som (de stokastiska variablerna) X och Y beskriver är oberoende säges X och Y vara oberoende. Mera exakt gäller (jfr (5)).

Def. $P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$ för *alla* x och y $\Leftrightarrow$ X och Y är oberoende (stokastiska variabler).

Om vi inför $p_{X,Y}(x,y) = P((X=x)\cap(Y=y))$ kan definitionen ovan skrivas mer kompakt

(8) *Def.* $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$ för *alla* x och y $\Leftrightarrow$ X och Y oberoende.

Väntevärde.

Antag vi kastar vår tärning 600 ggr och sedan bestämmer medelantalet prickar per kast dvs. vi beräknar sammanlagda antalet prickar i de 600 kasten och delar med 600. Säg att a_j är det antal kast av de 600 som givit j prickar. Totalsumman blir då $1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \ldots + 6\cdot a_6$ och det sökta medeltalet $M = \frac{1\cdot a_1+2\cdot a_2+\ldots+6\cdot a_6}{600}$. Men detta kan skrivas $M = 1\cdot\frac{a_1}{600} + 2\cdot\frac{a_2}{600} + \ldots + 6\cdot\frac{a_6}{600}$ och eftersom $a_1 \approx a_2 \approx \ldots \approx a_6 \approx 100$ bör gälla om tärningen är symmetrisk så får vi $M \approx 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \ldots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$.

Det ligger nära till hands att förmoda att ju fler kast man gör, desto närmare kommer man 3.5 och kunde man göra oändligt många kast så skulle man få precis 3.5. Så är det också, men det är inte fråga om någon konvergens i vanlig mening utan om vad som brukar kallas "konvergens i sannolikhet" dvs. vad som gäller är att $P(|M-3.5| > \varepsilon) \to 0$ då antalet kast växer.* (ε är ett godtyckligt tal > 0).

(9) Vi leds nu till följande definition; $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\cdot p_X(x)$ där vänsterledet utläses "väntevärdet för X" (jfr. engelska "expectation").

Not. En analogi med mekanik är här nyttig, Om sannolikhetsfördelning uppfattas som en *fördelning av massan 1 på x-axeln*, så kommer E(X) att motsvara *tyngdpunkten* i denna massfördelning. (Detta sätt att se saken ger direkt (rita figur!) svaret i ex. 13!)

---

* Den uppmärksamme läsaren ser att M här uppfattas som en stokastisk variabel. (Vilket den också är *innan* vi gjort kasten.)