Sannolikhetslära

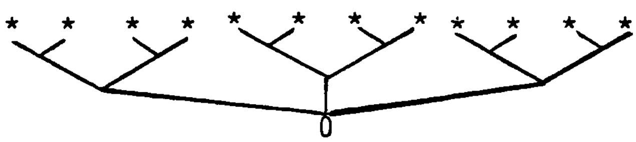
- **Ordlista till NCT**
  - Random experiment =Slumpförsök
  - Outcome=Utfall
  - Sample space=Utfallsrum
  - Event=Händelse
  - Set=Mängd
  - Subset=Delmängd
  - Union=Union
  - Intersection=Snitt
  - Complement=Komplement
  - Mutually exclusive=Varandra uteslutande, oförenliga, disjunkta
  - Collectively exhaustive=Uttömmande
  - Probability=Sannolikhet
  - Complement rule=Komplementsatsen
  - Addition rule=Additionssatsen
  - Conditional probability=Betingad sannolikhet
  - Multiplication rule=Multiplikationssatsen
  - Independent=Oberoende
  - Bayes’ theorem=Bayes’ sats

I. KOMBINATORIK OCH SANNOLIKHET.

När man ska bestämma sannolikheten för att få en sexa vid ett kast med en tärning delar man "ett" med "sex". Här är "ett" det antal fall som är *gynnsamma* för att man ska få en sexa medan "sex" är antalet *möjliga* fall*. Samma sätt att räkna kommer till användning i följande exempel:

Ex. 1 Ett kombinationslås kan öppnas om tre spakar ställes på ett visst sätt. Den första spaken har tre lägen och de båda övriga två lägen. En person ställer in låset *helt på måfå* (detta betyder att alla inställningssätt är lika sannolika). Vad är sannolikheten att låset går att öppna?

Lösning: I följande "släktträdsliknande" diagram motsvarar varje väg från 0 till * ett inställningssätt av låsspakarna.



Antalet möjliga inställningssätt (=m) är detsamma som antalet * och det är klart från diagrammet att detta antal är = $3 \cdot 2 \cdot 2$. Detta är ett exempel på den mycket användbara *multiplikationsprincipen* (i fortsättningen kallad M-principen). Antalet gynnsamma fall (=g) är förstås 1 och vi får den sökta sannolikheten $p = g/m = 1/12$.

För att i vissa situationer effektivt kunna räkna antalet fall behövs begreppet $\binom{n}{k}$. Vi inför nu detta:

Ex. 2 Hur många tresiffriga tal med *olika* siffror kan man få från siffrorna 1, 2, . . ., 9? ("Olika" ska tolkas som "alla tre olika".)

Lösning: Talets första siffra kan väljas på 9 sätt och för vart och ett av dessa sätt kan (eftersom siffrorna ej fick vara lika) den andra siffran väljas på 8 sätt och för vart och ett av dessa $9 \cdot 8$ sätt kan den tredje siffran väljas på 7 sätt. Totalt (enl. M-principen) kan således $\underline{\underline{9 \cdot 8 \cdot 7}}$ tresiffriga tal med olika siffror bildas från 1,2,...,9.

---

* Obs. att denna beräkning förutsätter (vilket vi också gör i fortsättningen) att samtliga fall är lika sannolika.(I tärningsexemplet betyder detta att inte tärningen är "sned" på något vis!)

Vi skulle också kunna göra på följande sätt: Först väljer vi ut *vilka* siffror som skall ingå i det tresiffriga talet (låt oss kalla detta antal sätt för x) och bestämmer oss sedan för vilken av dessa tre siffror som ska vara talets första siffra (detta kan göras på 3 sätt), därefter vilken siffra som skall vara talets andra siffra (2 sätt) och slutligen vilken talets sista siffra ska vara (1 sätt). Totalt (enl M-principen) $x \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sätt. Tillsammans med resultatet nyss ger detta: $9 \cdot 8 \cdot 7 = x \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ dvs. $x = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$ dvs. $x = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!}$

$\frac{n!}{(n-k)!k!}$ brukar betecknas $\binom{n}{k}$ och vi har alltså att $x=\binom{9}{3}(=84)$. Talet x anger antalet sätt att välja ut 3 olika siffror av 9 när man *inte* tar hänsyn till den ordning i vilken de utväljes (Så att säga antalet "råmaterial" till tresiffriga tal med olika siffror.)

Ex. 3 Från en väl blandad kortlek (52 kort) får man 13 kort (en giv i bridge!). Vad är sannolikheten för att man får 5 spader, 2 hjärter, 6 ruter och inga klöver?

Lösning: "Väl blandad" tolkas som att varje urval av 13 kort från de 52 har samma sannolikhet att erhållas. Antalet möjliga fall är $\binom{52}{13}$ eftersom man inte bryr sig om i vilken ordning man får upp korten, utan bara intresserar sig för *vilka* kort man får upp. Antalet gynnsamma fall får man på följande sätt: Det finns $\binom{13}{5}$ sätt att välja ut de 5 spaderkorten och för vart och ett av dessa sätt finns det $\binom{13}{2}$ sätt att välja hjärterkorten etc. M-principen ger nu $g = \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{6} \cdot \binom{13}{0}$ fall. (Eftersom 0! definieras som 1 blir $\binom{13}{0} = 1$; $\binom{13}{0}$ är med bara för att göra det hela så generellt som möjligt.)

$\therefore$ Den sökta sannolikheten $= \frac{\binom{13}{5}\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{6}\cdot\binom{13}{0}}{\binom{52}{13}}$

(Vi avstår från själva den siffermässiga beräkningen, och påpekar bara att den kan underlättas dels genom förkortning dels genom Stirlings formel:

$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ som gäller för stora värden på n.)

Ex. 4 (För den som också tycker om poker.) Vad är sannolikheten att man vid giv i poker (5 kort!) får *precis* fyra spader?

Lösning: $m = \binom{52}{5}$ $g = \binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1}$ $\Rightarrow$ sökt sannolikhet $p = \frac{g}{m} = \frac{\binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{5}} (\approx 0.01)$

(Det finns ju 13 spaderkort och 39 kort i de andra färgerna. Också här har M-principen använts vid beräkningen av g.)

II. HÄNDELSER OCH SANNOLIKHET.

Betrakta återigen ett tärningskast. Mängden möjliga utfall kallas utfallsrummet och betecknas Ω. (Här är $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.) Händelser (i samband med tärningskastet) kan uppfattas som delmängder av Ω . Som delmängder av Ω räknas då även Ω själv, samt $\emptyset$ (den tomma mängden). Följande exempel (med händelserna i det vänstra ledet och mängderna i det högra) illustrerar sambandet:

Ex. 5 (Låt X beteckna antalet prickar som tärningen visar)

a) $(X = 4) = \{4\}$ b) $(X \leq 3) = \{1,2,3\}$ c) $(X \leq 7) = \Omega$.
d) $(X > 7) = \emptyset$ e) $(X \text{ udda}) = \{1,3,5\}$

Detta att händelser kan uppfattas som mängder är något som gäller allmänt. Också de operationer man kan göra på mängder (t.ex. snitt, union och komplement) har sin motsvarighet för händelser som vi ser av följande tabell:

Händelse	Motsvarande mängd
A inträffar	A
B inträffar	B
A inträffar ej	A* (* betecknar komplement)
Både A och B inträffar	$A \cap B$ ($\cap$ -"- snitt)
Minst en av A och B inträffar (uttrycks ibland som: "någon av A och B inträffar")	$A \cup B$ ($\cup$ -"- union)

Not. Motsvarigheten mellan händelser och mängder avspeglar sig också i beteckningar, t.ex. Ω för en säker händelse (dvs. en händelse som med 100%ig sannolikhet inträffar) och på samma sätt står $\emptyset$ för en omöjlig händelse. Vidare ser man ofta i matematiskt statistiska sammanhang uttryck som "snitthändelse" "komplementhändelse" etc.

Några räknelagar som gäller för mängder (och därmed också för händelser) är:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (jfr. $a(b+c)=ab+ac$ där a,b och c är tal.)

2. $(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$

3. $(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$

Vi kan lätt verifiera dessa lagar genom att rita mängddiagram, (lämpligen ritar man därvid höger och vänster-led var för sig.) Vidare kan t.ex. 2 tolkas i ord sålunda: "Att inte någon av A och B inträffar är detsamma som att både A* och B* inträffar."

Sannolikhet.

Om vi tänker oss mängddiagrammen ritade så att *ytan* av A är lika med *sannolikheten* för händelsen A blir det lätt att minnas de lagar som gäller för sannolikheter.

Fig.1

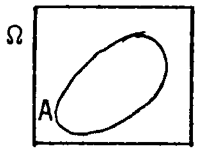


Fig.2

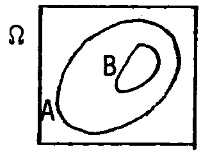


Fig.3

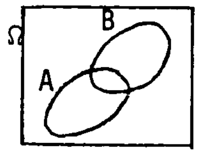
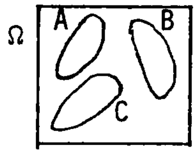


Fig.4



Från fig.1 får vi (om sannolikheten för händelsen A betecknas $P(A)$): $P(A) = 1-P(A^*)$ eftersom ytan av Ω är 1 (ty Ω är ju en säker händelse dvs. $P(\Omega) = 1$).

Fig.2 illustrerar det fall när ett utfall i B automatiskt också ligger i A. dvs då händelsen B medför A. Vi har då $P(B) \leq P(A)$. *För att*
(1) *visa att två händelser har samma sannolikhet räcker det därför att visa att händelserna medför varandra ömsesidigt (dvs. att* $A \Leftrightarrow B$ *gäller.)*

(2) Fig.3 ger oss det viktiga sambandet $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (ytan av $A \cap B$ räknas ju två gånger då man lägger ihop $P(A)$ och $P(B)$ och måste alltså dras bort för att man ska få ytan av $A \cup B$).

I fig.4 slutligen är mängderna disjunkta dvs. ingen av motsvarande händelser kan inträffa samtidigt som någon av de andra. Vi har $P(A \cup B \cup C) =$ $= P(A) + P(B) + P(C)$. Denna relation kan lätt generaliseras till:

(3) $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

som alltså gäller när A_i:na är disjunkta.

Not. (3) gäller även för $n = \infty$.