Ytterligare exempel på hypotesprövning

I tal 1 på PÖ5 har man följande modell: ①

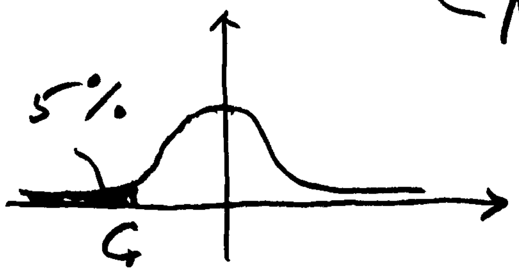
$X_1, X_2 \ldots X_{12}$ ober. $N(\mu, 0.1)$

Här är X_j: vikten i kg av mjölpåse nr j. Man har observerat $\bar{x} = 1.95$. Mjölpåsarna ska i genomsnitt väga 2 kg (dvs $\mu = 2$ ska gälla). Det vore nu naturligt att fråga om $\bar{x} = 1.95$ ger belägg för att $\mu < 2$ istället är vad som gäller. Man ställer därför upp hypoteserna:

$H_0: \mu = 2 \qquad H_1: \mu < 2$

Eftersom testvariabeln Z ska väljas så att den får en känd fördelning när H_0 är sann väljer vi $Z = \dfrac{\bar{X} - 2}{0.1/\sqrt{12}}$ som ju är $N(0,1)$ när H_0 är sann. Om $\mu < 2$ gäller tenderar Z att bli liten så testet blir:

$Z < C \Rightarrow H_0$ förkastas. Vi har vidare sambandet Risknivå =
= P(förkasta H_0 när den är sann)
Med risknivån vald till 5 %
ger detta: $P(\underset{\uparrow}{Z} < C) = 5\%$
N(0,1) när H_0 är sann



Jfr. tabell 8 längst ner $\Rightarrow C = -1.645$

Utförande av test: $Z_{obs} = \dfrac{1.95-2}{0.1/\sqrt{12}} =$
$= -1.73 < -1.645 \Rightarrow H_0$ förkastas.

P-metoden.

Genom att beräkna sannolikheten att $\overline{X}$ blir 1.95 (eller mindre) när H_0 är sann (dvs när $\mu=2$ gäller) kan vi utföra testet med den s k p-metoden. Man jämför därvid den beräknade sannolikheten med den valda risknivån. Vi får

$$P_{\mu=2}(\overline{X} \le 1.95) = P_{\mu=2}\left(\frac{\overline{X}-2}{0.1/\sqrt{12}} \le \frac{1.95-2}{0.1/\sqrt{12}}\right) =$$
$$= F(-1.73) = 1 - F(1.73) = (\text{tabell } 1) = 1 - 0.9582 =$$
$$= 0.0418 < 5\% \Rightarrow H_0 \text{ förkastas.}$$

Stickprov i par.

Åtta personer har mätts morgon och kväll med följande resultat:

Person	1	2	3	4	5	6	7	8
Morgonlängd	172	168	180	181	160	163	165	177
Kvällslängd	172	167	177	179	159	161	166	175

Här är det felaktigt att använda modellen för oberoende stickprov (jfr. modellen för smältpunkt för legeringar som vi använde tidigare) eftersom väntevärdena (t.ex.) i rad 1 inte kan antas vara lika. Istället gör man nu så att man gör om det till ett stickprov genom att bilda:

X = Morgonlängd − Kvällslängd.

Modell: $X_1, X_2 \cdots X_8$ ober $N(\mu, \sigma)$

Här måste σ skattas (med s) d.v.s. vi får en t-fördelning. $s^2 =$ (se F.S. sid 1)

$$= \frac{8 \cdot \sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2}{8(8-1)} = \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{8} x_i = 0 + \cdots + 2 = 10 \\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 0^2 + \cdots + 2^2 = 24 \end{array}\right)$$

$$= \frac{8 \cdot 24 - 10^2}{8(8-1)} \Rightarrow s \approx 1.2817 \ (\approx \sigma)$$

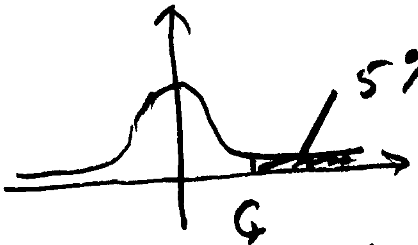
Vi väljer nu att (på nivå 5%) testa om man är längre på morgonen än på kvällen:

Dvs $H_0: \mu = 0$ $\quad H_1: \mu > 0$

Med $T = \dfrac{\bar{x} - 0}{S/\sqrt{8}}$ får vi testet:

$T > C \Rightarrow H_0$ förkastas.

$5\,\% = P(T > C)$ ← $t(8-1)$ när H_0 är sann.



Tabell 8 $\Rightarrow C = 1.895$

$$T_{obs} = \frac{10/8 - 0}{1.2817/\sqrt{8}} \approx 2.76 > 1.895 \Rightarrow$$ (H_0 förkastas.

Ett verkligt exempel från "väljarbarometern".

I sept 2009 sympatiserade 29% av väljarna med moderaterna baserat på ett OSU av 1895 personer. I sept 2011 var samma siffra 32.7% (nu baserat på 1901 personer.) För att avgöra om denna uppgång är "statistiskt säkerhetsställd" testar vi nu $H_0: p_1 - p_2 = 0$ mot $H_1: p_1 - p_2 > 0$

(p_1 = verkliga prop. sympatiförer i sept 2011, p_2 dito sept 2009)

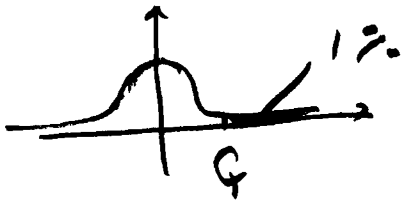
Som testvariabel väljer vi

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0}{\sqrt{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)\cdot\left(\frac{1}{1901} + \frac{1}{1895}\right)}} \quad \text{där } \hat{p}_0 = \frac{1901\cdot 0.327 + 1895\cdot 0.290}{1901 + 1895}$$

(Se sid 7 i F.S.)

TEST: $Z > G \Rightarrow H_0$ förkastas

Eftersom $Z \approx N(0,1)$ när H_0 är sann får vi med 1% risknivå:



Tabell 8 längst ner ger $G = 2.326$

$$Z_{obs} = \frac{0.327 - 0.290}{\sqrt{0.309 \cdot 0.691 \cdot \left(\frac{1}{1901} + \frac{1}{1895}\right)}} = 2.47 > G \Rightarrow$$

$\Rightarrow H_0$ förkastas.

Tveksam metod att hantera siffrorna ovan.

Med $H_0: p_1 - p_2 = 0$ mot $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$ och risknivå 1% får man

TEST: $|Z| > 2.576 \Rightarrow H_0$ förkastas

d.v.s. $|Z_{obs}| = 2.47 < 2.576 \Rightarrow H_0$ förkastas ej! På basis av detta resultat skulle alltså någon kunna hävda att uppgången i moderatsympatier *inte* var statistiskt säkerhetsställd, men det han/hon testat är dock inte uppgången utan bara *förändringen*. Läs 10.5. i boken (Allmänt om hypotesprövning och vad man bör se upp med.)