F9

Introduktion till sannolikhetslära

Introduktion till sannolikhetslära

- Människor talar om ”sannolikheter”:
  - Sannolikheten att få sju rätt på Lotto
  - Sannolikheten att få stege på en pokerhand
  - Sannolikheten att bli godkänd på en tenta
- Statistik bygger på sannolikhetslära

Introduktion till sannolikhetslära

- **Slumpmässigt försök** (random trial)
  - Ett försök som kan upprepas under likartade förhållanden och där resultatet vid varje upprepning inte kan förutsägas med säkerhet
  - Ex tärningskast (1,2,3,4,5,6?), lottdragning (vinst eller ej?), sannolikhetsurval (vilka blir dragna?)
- **Utfall** (outcome)
  - Resultatet av ett slumpmässigt försök
  - Ex ”få en sexa” vid tärningskast

Utfallsrum

Utfallsrummet U = mängden av alla tänkbara utfall:
  - Ex U={1,2,3,4,5,6}

Exempel

Slumpförsök	Utfallsrum
Kast med 6-sidig tärning	U={ }
Kast med mynt	U={ }
Slumpmässigt urval av N=10 personer	U={ }

Introduktion till sannolikhetslära

- **Händelse** (event): betecknas A, B,…
  - En samling av ett eller flera utfall
  - En delmängd av utfallsrummet
  - Ex slumpförsök: tärningskast, U={1,2,3,4,5,6}
- Vill bestämma sannolikheten att A ska inträffa
- P(A)=?
  - Ex sannolikheten att få högst en trea?

Händelse	Delmängd
A=att få ett udda antal	A={1,3,5}
B=att få högst 3	B={1,2,3}
C=att få 6:a	C={6}
D=att *inte* få 6:a	D={1,2,3,4,5}
E=att få 7:a	Tom delmängd

Egenskaper hos sannolikheter

- Sannolikheter bör vara som relativa frekvenser!
- Sådana ligger mellan 0 och 1:

  $0 \le P(A) \le 1$
- Om P(A)=0 $\longrightarrow$ A är en **omöjlig** händelse
- Om P(A)=1 $\longrightarrow$ A är en **säker** händelse

Egenskaper hos sannolikheter

- **Disjunkta** händelser
  - A och B är händelser som inte kan inträffa samtidigt
  - Ömsesidigt uteslutande
    - Ex myntkast A={krona}, B={klave}, tärningskast A={1,3,5} B={2}
- **Komplement** till A
  - Händelsen att A *inte* inträffar
  - De utfall i U som inte tillhör A
  - Vi använder beteckningen A*
    - Ex A={1,2} $\longrightarrow$ A*={3,4,5,6} vid kast med tärning
    - P(A eller A*)=P(A)+P(A*)=1 $\longrightarrow$
    - P(A)=1-P(A*), P(A*)=1-P(A)

Bestämning av sannolikheter

- **Subjektiva** sannolikheter
  - Tilltro till en framtida händelse
  - Varierar mellan olika personer
- **Klassisk sannolikhetsdefinition**
  - Om alla utfall är lika sannolika

$$P(A) = \frac{antalet \quad gynnsamma \quad utfall}{antalet \quad möjliga \quad utfall}$$

  - Ex A={1,3,5} $\longrightarrow$ P(A)= 3/6 = 1/2
- Empiriskt bestämd sannolikhet
  - Om utfallen har olika sannolikhet/vi vet inte sannolikheten
  - Ex osymmetrisk tärning

Relativ frekvens

- Antag att ett försök upprepas *n* ggr, den sökta händelsen inträffar *f* ggr, då gäller

$$rf = \frac{f}{n} \qquad 0 \leq f \leq n$$

- Stora talens lag
  - Relativa frekvenser är stabila och närmar sig ett visst värde då antalet upprepningar av försöket (n) ökar

Relativ frekvens

- Gränsvärdet kallas för den **teoretiska sannolikheten**
- Använd den observerade relativa frekvensen för händelsen som en skattning av den teoretiska sannolikheten

Exempel

- Kasta en tärning 12 ggr. Hur många gånger får vi en 6:a?
- Kasta en tärning 30 ggr. Hur många gånger får vi en 6:a?
- Kasta ett mynt 30 ggr. Hur många gånger får vi krona?

Stora talens lag

- Om utfallen har olika chans att inträffa kan vi ej använda den klassiska definitionen
- Vi kan använda den relativa frekvensen
- Hur många upprepningar av försöket behövs?
- Hur många gånger behöver vi kasta ett mynt för att uppskatta sannolikheten att få krona?
  - Sannolikheten att den relativa frekvensen för en händelse är nära den teoretiska sannolikheten ökar om antalet upprepningar ökar

Exempel: symmetrisk tärning

- Kasta en tärning 30 ggr. Hur många gånger får vi en 6:a?
- Kasta en tärning 100 ggr. Hur många gånger får vi en 6:a?
- Kasta en tärning 1000 ggr. Hur många gånger får vi en 6:a?
- Relativa frekvensen närmar sig ett värde – här 1/6 = 0,1667 – när vi upprepar försöket ett stort antal gånger
  - Detta är värdet utifrån klassiska definitionen
- Detta värde kallar vi för **sannolikheten för händelsen**

Additionssatsen

- P(A eller B)=P(A eller B eller båda)= P(minst en av händelserna A och B inträffar)
- **Additionsatsen**
  - P(A eller B)= P(A)+P(B)-P(A och B)
  - Om disjunkta P(A och B)=0
  - Ex A={1,2,3,4}, B={2,4,6} → A och B={2,4}
  - P(A eller B)=P(A)+P(B)-P(A och B)=4/6 + 3/6 – 2/6 = 5/6
  - A eller B={1,2,3,4,6}, U={1,2,3,4,5,6}
  - P(A eller B)=5/6

Relativa frekvenser för flera händelser

- Antag två händelser som inte kan inträffa samtidigt
  - Relativa frekvensen är f_1/n resp f_2/n
  - Relativa frekvensen för att den ena *eller* den andra inträffar

$$rf = \frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} = \frac{f_1 + f_2}{n}$$

Exempel

- Vi kastar en tärning 100 ggr och får 19 ettor och 16 sexor. Relativa frekvensen för en etta eller sexa är

$$rf = \frac{19}{100} + \frac{16}{100} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

Multiplikationssatsen för oberoende händelser

- A och B är **oberoende** händelser om P(A och B) = P(A)P(B)
- Exempel
  - Sannolikheten att få sexa på första kastet och etta på andra?
  - P(6 på första och 1 på andra)=

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$