Stockholms Universitet
Statistiska institutionen
Per Gösta Andersson

Statistikens grunder 1

SKRIFTLIG TENTAMEN
Måndagen den 4 november, 2019

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare

Gräns för godkänt: 50 poäng av totalt 100.

För maximal poäng krävs på varje uppgift tydliga, utförliga och välmotiverade lösningar.

1. (18p) Vid fel i ett elnätverk är sannolikheten 0.8 att det är ett transformatorfel, och 0.05 att det är ett linjebrott. Vidare är sannolikheten 0.01 för både transformatorfel ochl linjebrott samtidigt.

   (a) Vad är sannolikheten för minst en av de två feltyperna?

   (b) Vad är sannolikheten för att inget av felen inträffar?

   (c) Vad är sannolikheten för att det är ett linjebrott om vi vet att det är ett transformatorfel?

2. (16p) Ett nytt test för att avslöja en allvarlig sjukdom har tagits fram. Det ger positivt utslag med sannolikheten 0.99 om personen har sjukdomen och med sannolikheten 0.05 om personen inte har den. Det är känt att 1 på 100 av patientmaterialet har sjukdomen. Betrakta nu en slumpmässigt utvald patient.

   (a) Vad är sannolikheten att testet ger negativt utslag på patienten?

   (b) Vad är sannolikheten att patienten har sjukdomen om testet gav positivt utslag?

3. (16p) Man vet från tidigare erfarenhet att kostnaden för bygge av en villa med viss storlek och standard följer en normalfördelning med väntevärde 4 miljoner kronor och standardavvikelse 400 000 kr.

   (a) Vad är sannolikheten att kostnaden blir mellan 3.6 och 4.4 miljoner kronor för ett planerat sådant bygge?

   (b) För vilket värde är sannolikheten 0.2 att kostnaden understiger detta värde?

   (c) Vad är sannolikheten att kostnaden överstiger väntevärdet med mer än 1.5 standardavvikelser?

4. (18p) Ett datorprogram anropar två subrutiner, A och B. I en slumpmässigt vald körning, låt X vara antalet anrop av subrutin A och Y antalet anrop av subrutin B. Den simultana sannolikhetsfördelningen för X och Y är given enligt

X/Y	1	2	3
1	0.15	0.10	0.10
2	0.10	0.20	0.15
3	0.05	0.05	0.10

   (a) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y.

   (b) Är X och Y oberoende? Varför/varför inte?

   (c) Bestäm $E(X+Y)$ och $V(X+Y)$

5. (16p) I ett parti med många (100 000) tillverkade enheter provar man 100 slumpmässigt valda och avvisar partiet om antalet felaktiga provade enheter är minst 3.

   Beräkna sannolikheten för att ett parti med felandelen (proportionen) 1% blir avvisat, samt sannolikheten för att ett parti med felandelen (proportionen) 5% blir accepterat.

6. (16p) Ur Bure Holmbäcks biografi "Hjalmar Söderberg, ett författarliv", citerar vi:

   Han lade "Diplomaten" och gjorde statistik över hur många gånger den gick ut - normalt var det 60 à 70 gånger av 100, men vid ett tillfälle blev det 83 gånger, en "svinaktig tur".

   Håller du med honom? Välj själv något sätt att analysera situationen. (Diplomaten är en sk patiens där man använder en vanlig kortlek.)

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 4/11-2019

Sal: Uggleviksalen

Tenta: Statistikens grunder 1

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: 0071-FXL

☑ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X	X				6
Lär.ant. 18	16	12	13	16	16				

A.A.

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
91	A	96cf

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0071-FXL Blad nr: 1

1. A = TRANSFORMATORFEL B = LINJEBROTT

$P(A) = 0.8$

$P(B) = 0.05$

$P(A \cap B) = 0.01$

	A	$\bar{A}$	Marginal
B	0.01	0.04	0.05
$\bar{B}$	0.79	0.16	0.95
Marginal	0.8	0.2	1.00

a) $P(A \cup B) = 0.8 + 0.05 - 0.01 = 0.84$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.16$

c) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.01}{0.8} = 0.0125$

1/18

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG   Anonymkod: 0071-FXL   Blad nr: 2

2. A = TEST GER POSITIVT UTSLAG

B = SJUKDOM

$P(A \mid B) = 0.99$

$P(A \mid \bar{B}) = 0.05$

$P(B) = 0.01$

	A	$\bar{A}$	Marginal
B	0.0099	0.0001	0.01
$\bar{B}$	0.0495	0.9405	0.99
Marginal	0.0594	0.9406	1.00

$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = 0.0099$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B}) = 0.0495$

a) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup P(\bar{A} \cap B) = 0.9405 + 0.0001 = 0.9406$

b) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.0099}{0.0594} \approx 0.1667$

1/6

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG **Anonymkod:** 0071-FXL **Blad nr:** 3

3. X = KOSTNAD FÖR BYGGANDE AV VILLA

$X \sim N(\mu = 4\,000\,000, \sigma = 400\,000)$

a) $P(3\,600\,000 < X < 4\,400\,000)$

$$P\left(\frac{3600000 - 4000000}{400\,000} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{4\,400\,000 - 4000000}{400\,000}\right) =$$

$P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - 1 - \Phi(1) =$

$0.84134 - (1 - 0.84134) = 0.84134 - 0.15866 \approx 0.6827$

där $Z \sim N(0,1)$

b) $P(X < 4\,000\,000) = 0.2$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x - 4000000}{400000}\right) = 0.2 \Rightarrow \quad X = 0.2 \cdot \frac{400000}{4000000} = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$$

$P(Z < 0.02)$ $\Phi(0.02) = 0.50798$

c) $P(X > 4000000 + 1.5\sigma) = P(X > 4000000 + 600000)$

$P(X > 4\,600\,000)$

$$1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{4600000 - 4000000}{400000}\right) = 1 - P(Z \leq 1.5) =$$

$1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93319 \approx 0.0668$

/12

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0071-FXL Blad nr: 4.

4. X = ANTALET ANROP AV SUBRUTIN A

Y = ANTALET ANROP AV SUBRUTIN B

a)

		Y 1	2	3	Marginal
X	1	0.15	0.10	0.10	0.35
	2	0.10	0.20	0.15	0.45
	3	0.05	0.05	0.10	0.20
Marginal		0.30	0.35	0.35	1.00

b) $0.35 \cdot 0.30 \neq 0.15$ de är beroende

alt 2; X har olika väntevärde beroende av vilket värde y har och därför är de beroende, ex. längst ner ↓

c)

X	f(x)	x·f(x)	$x^2 \cdot f(x)$
1	0.35	0.35	0.35
2	0.45	0.90	1.80
3	0.20	0.60	1.80
Summa	1.00	1.85	3.95

$E(X) = 1.85$

$V(X) = 3.95 - 1.85^2 = 0.5275$

Y	f(y)	y·f(y)	$y^2 \cdot f(y)$
1	0.30	0.30	0.30
2	0.35	0.70	1.40
3	0.35	1.05	3.15
Summa	1.00	2.05	4.85

$E(Y) = 2.05$

$V(Y) = 4.85 - 2.05^2 = 0.6475$

$E(X+Y) = ?$

$V(X+Y) = ?$

b)

X	f(x | y=1)	x·f(x | y=1)
1	0.15 / 0.30 = 0.50	0.5
2	0.10 / 0.30 = 0.33	0.66
3	0.05 / 0.30 = 0.17	0.51
Summa	1.00	1.67

$E(X \mid y=1) = 1.67$

X	f(x | y=2)	x·f(x | y=2)
1	0.10 / 0.35 = 0.29	0.29
2	0.20 / 0.35 = 0.57	1.14
3	0.05 / 0.35 = 0.14	0.42
Summa	1.00	1.85

$E(X \mid y=2) = 1.85$

1/3

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0071-FXL Blad nr: 5

5. $X \sim \text{bin}(n=100, p=0.01)$ $\binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950 \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{98} \simeq 0.1849$

$\binom{100}{1} = \frac{100!}{1!99!} = \frac{100}{1} = 100 \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{99} \simeq 0.3697$

$\binom{100}{0} = \frac{100!}{0!100!} = 1 \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{100} \simeq 0.3660$

$1 - (0.1849 + 0.3697 + 0.3660) = 1 - 0.9206 = 0.0794$

Sannolikheten att ett parti med felandelen 1% blir avvisat är 0.0794

$X \sim \text{bin}(n=100, p=0.05)$

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$\binom{100}{2} = 4950 \cdot 0.05^2 \cdot 0.95^{98} \simeq 0.0812$

$\binom{100}{1} = 100 \cdot 0.05^1 \cdot 0.95^{99} \simeq 0.0312$

$\binom{100}{0} = 1 \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^{100} \simeq 0.0059$

$0.0812 + 0.0312 + 0.0059 = 0.1183$

Sannolikheten att ett parti med felandelen 5% blir accepterat är 0.1183

/6

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG **Anonymkod:** 0071-FXL **Blad nr:** 6

6. X = antal gånger "Diplomaten" gick ut. $\frac{60+70}{2} = 65$

$E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0.65 = 65$

$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.65 \cdot 0.35 = 22.75$

$n \cdot p > 5$ och $n \cdot (1-p) > 5$ därför kan vi approximera med normal fördelning

Sannolikheten att få "Diplomaten att gå ut 60 − 70 ggr:

$P\left(\frac{60-65}{\sqrt{22.75}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{70-65}{\sqrt{22.75}}\right) = P(-1.05 < Z < 1.05) =$

$\Phi(1.05) - 1 - \Phi(1.05) = 0.85314 - (1 - 0.85314) =$

$0.85314 - 0.14686 \approx 0.7063$

Sannolikheten att "Diplomaten går ut 83 ggr:

$P(X=83) = P(X \leq 83) - P(X \leq 82)$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{83-65}{\sqrt{22.75}}\right) = P(Z \leq 3.77) = \Phi(3.77) =$

$0.99992 - 0.99988 = 0.00004$

Jag håller med honom! Sannolikheten att den går ut 60 − 70 ggr är ca 70%. medans att den skulle gå ut 83 ggr av 100 endast är 0.004%.

1/6