Stockholms universitet

OBS! Läs noga igenom anvisningarna i tentamen, t.ex. hur du ska skriva svaren. Det är ditt ansvar som student att följa de anvisningar som ges.

NOTE! Read the examination instructions carefully, e.g. how to write the answers. It is your responsibility as a student to follow the given instructions.

Skriv din anonymiseringskod och dagens datum på allt material du lämnar in.
(*Enter your anonymization code and todays date on all submitted materials*)

Anonymiseringskod (*Anonymization code*)	311-0018-TUS
Datum (*Date YYYY-MM-DD*)	2044-10-26
Plats nr. (*Seat No.*)	30

Kurs/Kurskod (*Course/Course code*)	ST211G
Kursmoment (*Course component*)	Statistisk teori med tillämpningar

Fylls i av tentamensvärd (*To be filled in by invigilator*)

Direkt i skrivning: (kryss)		Svarsblankett: (kryss)		Lösa svarsblad: (antal)	8
Lämnat in blankt: (kryss)		Dator: (kryss)	-		

Inlämningstid: 19:00 Signatur tentamensvärd: Oles Carik Jonsson

Fylls i av lärare/examinator (*To be filled in by teacher/examinator*)

Betyg:	B	Poäng:	77

Signatur rättande lärare/examinator: PGA

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2022-10-26	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.)
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0018-TUS			1

Uppg.nr.: (Task no.) 1

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

två stora populationer => oberoende stickprov

a) Då vi antar normalfördelade populationer med samma varians och stickproven är oberoende men n är litet genomför jag ett t-test! $n_1 = n_2 = 6$ $\alpha = 0.05$

$\sum y_{1i} = 134.9$ $\sum y_{1i}^2 = 3375.79$

$\sum y_{2i} = 172.9$ $\sum y_{2i}^2 = 5344.75$

$\bar{Y}_1 = \frac{134.9}{6} \approx 22.4833$ $\bar{Y}_2 = \frac{172.9}{6} \approx 28.8167$

$S_1^2 = \frac{3375.79 - 6 \cdot 22.4833^2}{5} \approx 68.5595$

$S_2^2 = \frac{5344.75 - 6 \cdot 28.8167^2}{5} \approx 72.4674$

$S_p^2 = \frac{5 \cdot 68.5595 + 5 \cdot 72.4674}{10} \approx 70.5134$

T-test => ensidigt med poolad varians => $D = \mu_1 - \mu_2$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_a: \mu_1 - \mu_2 < 0$ H_0 förkastas då $T < -T_0$

$T_0 = t_{0.05}(10) = 2.02 \Rightarrow -2.02$

$T = \frac{22.4833 - 28.8167 - 0}{\sqrt{70.5134 \cdot \frac{2}{6}}} \approx -1.306$

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens
kommentar:
(*Teacher's*
note)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2022-10-26
Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G
Sidnr.: (Page no.) 2
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-0018-TVS
Uppg.nr.: (Task no.) 1
Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Då $-1.306 > -2.02$ kan H_0 ej förkastas.
Vi har inte bevis för att påstå att P_2 har större inkomst än P_1 då $\alpha = 0.05$!

b) Då vi har två oberoende stickprov genomför jag ett Mann-Whitney U-test.

rank	1	2	3	5	8	10
P_1	15.4	16	18.3	20.5	28.2	36.5

$W = 29$

Ensidigt test åt höger: H_0: Samma fördelning H_a: P_2 förskjuten till höger om P_1

$U_0 \Rightarrow n_1 = n_2 = 6 \quad \alpha = 0.05 \Rightarrow 7 \Rightarrow$ test åt höger ger kritisk gräns $n_1 n_2 - U_0 \Rightarrow 36 - 7 = 29 \Rightarrow H_0$ förkastas då $U \geq 29$

notera att $\alpha \approx 0.05 \Rightarrow \alpha = 0.0465$

$U = 6 \cdot 6 + \frac{6 \cdot 7}{2} - 29 = 28 \Rightarrow 28 < 29$

Slutsats: H_0 kan ej förkastas på $\alpha = 0.0465$ OK

Poäng: (Points) 18

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2022-10-26

Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G

Sidnr.: (Page no.) 3

Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-0018-TUS

Uppg.nr.: (Task no.) 2

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

$X \sim exp(\beta)$

a) $E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}\sum X_i) = \frac{1}{n}E(\sum X_i) = \frac{1}{n} \cdot n E(X) = \frac{n\beta}{n} = \beta$

$\bar{X}$ är en vvr skattning av β!

$V(\bar{X}) = V(\frac{1}{n}\sum X_i) = \frac{1}{n^2}V(\sum X_i) \overset{Ob.}{=} \frac{1}{n^2} n V(X) = \frac{n\beta^2}{n^2} = \frac{\beta^2}{n}$

$\lim_{n \to \infty} V(\bar{X}) = 0 \Rightarrow$ Slutsats: Då $\bar{X}$ är vvr och variansen går mot 0 då $n \to \infty$ är $\bar{X}$ konsistent! OK

b) Faktoriseringskriteriet: $L(\beta) = g(\beta, \sum X_i)\, h(X_1, \ldots, X_n)$

$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ där h ej innehåller β.

$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta} e^{-x_i/\beta} = \frac{1}{\beta^n} e^{-\sum x_i/\beta}$

Detta kan faktoriseras som:

$g(\beta, \sum x_i) = \frac{1}{\beta^n} e^{-\sum x_i/\beta}$, $h(X_1, \ldots X_n) = 1$ OK

Då faktoriseringskravet är uppfyllt, dvs $h(X_1, \ldots, X_n)$ innehåller ej den önskade parametern, har vi bevisat att $\sum x_i$ är tillräcklig för β.

c) En pivot ska: Innehålla den önskade parametern men dess sannolikhetsfördelning ska ej bero på parametern.

$\frac{2n\bar{X}}{\beta}$ uppfyller båda dessa krav. Då den är χ^2-fördelad med $2n$ frihetsgrader. χ^2-fördelningen beror ej på β. OK

Poäng: (Points)

Tentamensservice/SU/typ_c

Sidnr.:
(*Page no.*)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Uppg.nr.: (Task no.) 2

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

d) Ett KI av pivot $\frac{2n\bar{x}}{\beta}$ kan härledas genom:

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{2n\bar{x}}{\beta} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = P\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} < \frac{\beta}{2n\bar{x}} < \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{\alpha/2}} < \beta < \frac{2n\bar{x}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Alltså utgörs ett konfidensintervall på 95% av:

$$\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{0.025}}, \frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{0.975}} \Rightarrow \frac{2\cdot 10\cdot 3.72}{34.1696}, \frac{2\cdot 10\cdot 3.72}{9.59083}$$

$$= (2.1774, 7.7574)$$ OK

e) Om $n=100$ säger CGS att samplingsfördelningen för $\bar{X}$ kan approximeras till normal! Det ger: att vi kan standardisera fördelningen för $\bar{X}$ genom formeln: $Z = \frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}} \Rightarrow$

$$\frac{\bar{X} - \beta\cdot\frac{1}{n}}{\beta\cdot 1/\sqrt{n}} = \left(\frac{\bar{X}}{\beta} - \frac{1}{n}\right)\cdot\sqrt{n} \sim Z(0,1)$$

Då kan vi konstruera ett KI enligt:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} \Rightarrow 3.72 \pm 1.96\cdot 0.1 \Rightarrow 3.72 \pm 0.196$$

KI ges av: $(3.524, 3.916)$

Poäng: (Points) 17

Sidnr.:
(*Page no.*)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2022-10-26
Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116
Sidnr.: (Page no.) 5
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-0018-TVS
Uppg.nr.: (Task no.) 3
Lärarens kommentar: (Teacher's note)

X_i är en bernoulli variabel, vilket gör att $\sum X_i$ är binomialfördelat. Låt $\sum X_i = Y$ där $Y \sim bin(n, 1-e^{-\theta})$

$$p(y) = \binom{n}{y} \cdot p^y (1-p)^{n-y}$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{y} \cdot p^{\sum y_i} \cdot (1-p)^{n-\sum y_i}$$

$$\ln(L(p)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\binom{n}{y} + \sum y_i \ln(p) + (n - \sum y_i)\ln(1-p)$$

$$\frac{d}{dp}\ln(L(p)) = \frac{\sum y_i}{p} - \frac{n-\sum y_i}{1-p}$$

$$\frac{\sum y_i}{p} - \frac{n - \sum y_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \sum y_i - p\sum y_i - np + p\sum y_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum y_i - np = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{Y}$$

Alltså vi kan skatta hela uttrycket $1-e^{-\theta}$ med $\bar{Y}$ OK

men då vi önskar skatta endast θ får vi skriva om uttrycket: $\frac{1}{e^{\theta}} = 1-\bar{Y} \Rightarrow e^{\theta} = \frac{1}{1-\bar{Y}} \Rightarrow \underline{\hat{\theta} = \ln\left(\frac{1}{1-\bar{Y}}\right)}$

där $Y = \sum X_i$

För utfallet i uppgiften ger detta skattningen:

$\bar{Y} = 0.3 \Rightarrow \hat{\theta} = \ln\left(\frac{1}{0.7}\right) \approx 0.36$

Är det en vvr skattning?

Då jag vet att $\bar{Y}$ är en vvr skattning av p i binomialfallet menar jag att även denna skattning är vvr för θ. ✓

Poäng (Points): 7

Sidnr.:
(*Page no.*)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2022-10-26	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.)
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0018-TUS			6

Uppg.nr.: (Task no.) 4

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Då $H_a: \lambda = 0.5 > H_0: \lambda = 0.1$ förkastar vi H_0 för stora värden på statistikan $\sum x_i$.

Enligt N-P lemma ges det starkaste testet av:

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_a)} < k \Rightarrow L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!} = \frac{\lambda^{\sum y_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} y!}$$

$$L(\theta_0) = 0.1^{\sum y_i} \cdot e^{-0.1n} \cdot \frac{1}{\prod y!}, \quad L(\theta_a) = 0.5^{\sum y_i} \cdot e^{-0.5n} \cdot \frac{1}{\prod y!}$$

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_a)} = \frac{0.1^{\sum y_i} \cdot e^{-0.1n}\ {}^{1}/_{\prod y!}}{0.5^{\sum y_i} \cdot e^{-0.5n} \cdot {}^{1}/_{\prod y!}} = \left({}^{0.1}/_{0.5}\right)^{\sum y_i} \cdot e^{(0.5-0.1)n}$$

$$= 0.2^{\sum y_i} \cdot e^{0.4n} \Rightarrow 0.2^{\sum y_i} \cdot e^{0.4n} < k \Rightarrow$$

$$\sum y_i \underbrace{\ln(0.2)}_{<0} + 0.4n < \ln(k) \Rightarrow \sum y_i \ \cancel{<}\ > \frac{\ln(k) - 0.4n}{\ln(0.2)} = k'$$

$\Rightarrow$ Då vi har ett ensidigt test åt höger förkastar vi för stora värden och vänder därför på olikhets-tecken! Då får vi att starkaste testet ges av förkastelseregel:

$$\sum y_i \geq k' \quad \text{där } \sum y_i \sim poi(\lambda n)$$

Om $k' = 3$ blir $\alpha = P_{H_0}\left(\sum y_i \geq 3\right)$ då $\sum y_i \sim poi(1)$

$$= 1 - 0.9\overset{20}{\cancel{81}} = 0.0\underset{8}{\cancel{19}}$$

Poäng: (Points) 15

Sidnr.:
(*Page no.*)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2022-10-26
Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G
Sidnr.: (Page no.) 7
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-0018-TVS
Uppg.nr.: (Task no.) 4

β bli då: $P_{H_a}(\sum y_i \leq 2)$ då $\sum y_i \sim poi(5) = 0.125$
testets styrka ges då av $1-0.125 = 0.875$ OK
Slutsats:
Det starkaste testet ges av N-P Lemma och har förkastelseregeln att H_0 förkastas då $\sum y_i \geq k'$.
Om vi sätter kritisk gräns $k' = 3$ ger detta en signifikansnivå på ca 0.04 och en styrka på 0.875.

Lärarens kommentar: (Teacher's note)
Poäng: (Points)

Sidnr.:
(*Page no.*)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens
kommentar:
(*Teacher's
note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2022-10-26	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.)
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0018-TUS			8

Uppg.nr.: (Task no.) 5

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

$E(S^2) \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \Rightarrow E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n-1}\right) =$

$= \frac{\sigma^2}{n-1} \cdot E(\chi^2_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{n-1} \cdot n-1 = \sigma^2 \Rightarrow S^2$ är vvr!

$V(S^2) = V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n-1}\right) = \left(\frac{\sigma^2}{n-1}\right)^2 \cdot V(\chi^2_{n-1}) =$

$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} \cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$

$E(aS_1^2 + bS_2^2) = aE(S_1^2) + bE(S_2^2) = a\sigma_1^2 + b\sigma_2^2$

Om $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ måste alltså summan $a\sigma^2 + b\sigma^2$ bli lika med $2\sigma^2$ för att skattningen ska bli väntevärderiktig. För att det ska gälla måste $a+b=1$. OK

$V(aS_1^2 + bS_2^2) \overset{ober.}{=} a^2V(S_1^2) + b^2V(S_2^2) =$

$= \frac{a^2 2\sigma^4}{n_1-1} + \frac{b^2 2\sigma^4}{n_2-1}$

kommentar: Jag hoppas att jag är på rätt väg! Tyvärr tog tiden slut. Tänk gärna på det när du rättar :)

Den här uppgiften var väldigt svår och tidskrävande...

Poäng: (Points) 10

Sidnr.:
(*Page no.*)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Regler i skrivsalen

- Följ tentamensvärds anvisningar.
- Väskor och ytterkläder ska placeras på anvisad plats.
- Placera ID-handling väl synlig på bordet framför dig.
- Ingen student får lämna skrivsalen under de första 30 minuterna.
- Endast en student i taget får besöka toaletten. Vid toalettbesök skriv ditt namn och klockslag på avsedd lista. Efter toalettbesöket ska du åter ange klockslag på listan.
- Elektronisk utrustning som mobiltelefon eller Smartwatch ska vara avstängd och placerad på anvisad plats.
- Under tentamen gäller tystnad – det är förbjudet att prata, eller på annat sätt kommunicera, med andra studenter under pågående tentamen.
- Innan tentamenshandlingarna lämnas in; skriv sidnummer, anonymiseringskod och datum på alla inlämnade papper.

Om något är oklart – fråga gärna tentamensvärden. Lycka till!

Rules in the examination hall

- Follow the invigilator's instructions.
- Bags and outerwear must be placed at the designated place.
- Place your ID document clearly visible on the table in front of you.
- No student may leave the examination hall for the first 30 minutes.
- Only one student at a time may visit the toilet. Before visiting the toilet, write your name and time on the intended list. After the toilet visit, enter the time on the list again.
- Electronic equipment such as a mobile phone or Smartwatch must be switched off and placed at the designated place.
- During the exam, silence applies – you are not allowed to talk, or otherwise communicate, with other students during the exam.
- Before submitting the examination documents; remember to write the page number, anonymization code, and date on all papers.

Please do not hesitate to ask the invigilator if anything is unclear. Good luck!

Tentamensservice
tentamensservice@su.se | www.su.se/tentamensservice

Stockholms universitet