Stockholms universitet

OBS! Läs noga igenom anvisningarna i tentamen, t.ex. hur du ska skriva svaren. Det är ditt ansvar som student att följa de anvisningar som ges.
NOTE! Read the examination instructions carefully, e.g. how to write the answers. It is your responsibility as a student to follow the given instructions.

Skriv din anonymiseringskod och dagens datum på allt material du lämnar in.
(*Enter your anonymization code and todays date on all submitted materials*)

Anonymiseringskod (*Anonymization code*)	3	1	1	-	0	0	6	-	A	R	L	

Datum (*Date* YYYY-MM-DD)	2021-12-04	Plats nr. (*Seat No.*)	22

Kurs/Kurskod (*Course/Course code*)	ST211G
Kursmoment (*Course component*)	Tentamen i STMT 2

Fylls i av tentamensvärd (*To be filled in by invigilator*)

Direkt i skrivning: (kryss)		Svarsblankett: (kryss)		Lösa svarsblad: (antal)	9

Lämnat in blankt: (kryss)		Dator: (kryss)	

Inlämningstid: 14 : 00 Signatur tentamensvärd: BcKq

Fylls i av lärare/examinator (*To be filled in by teacher/examinator*)

Betyg:	B	Poäng:	80

Signatur rättande lärare/examinator: JW

Regler i skrivsalen

- Följ tentamensvärds anvisningar.
- Väskor och ytterkläder ska placeras på anvisad plats.
- Placera ID-handling väl synlig på bordet framför dig.
- Ingen student får lämna skrivsalen under de första 30 minuterna.
- Endast en student i taget får besöka toaletten. Vid toalettbesök skriv ditt namn och klockslag på avsedd lista. Efter toalettbesöket ska du åter ange klockslag på listan.
- Elektronisk utrustning som mobiltelefon eller Smartwatch ska vara avstängd och placerad på anvisad plats.
- Under tentamen gäller tystnad – det är förbjudet att prata, eller på annat sätt kommunicera, med andra studenter under pågående tentamen.
- Innan tentamenshandlingarna lämnas in; skriv sidnummer, anonymiseringskod och datum på alla inlämnade papper.

Om något är oklart – fråga gärna tentamensvärden. Lycka till!

Rules in the examination hall

- Follow the invigilator's instructions.
- Bags and outerwear must be placed at the designated place.
- Place your ID document clearly visible on the table in front of you.
- No student may leave the examination hall for the first 30 minutes.
- Only one student at a time may visit the toilet. Before visiting the toilet, write your name and time on the intended list. After the toilet visit, enter the time on the list again.
- Electronic equipment such as a mobile phone or Smartwatch must be switched off and placed at the designated place.
- During the exam, silence applies – you are not allowed to talk, or otherwise communicate, with other students during the exam.
- Before submitting the examination documents; remember to write the page number, anonymization code, and date on all papers.

Please do not hesitate to ask the invigilator if anything is unclear. Good luck!

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.) 1
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0006-ARL			

Uppg.nr.: (Task no.) 1

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 1. Vi vill bestämma antal observationer (n)

Vi vet $Y \sim N(\mu = 6, \sigma^2 = 1)$.

Hypoteser: $H_0: \mu = 5$ $H_a: \mu > 5$

Vi använder då formeln

$$n = \frac{\sigma^2 (Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_0 - \mu_a)^2}$$

$Z_\alpha = Z_{0.05} \approx 1.645$ (enligt tabell 2)

Styrka: $1-\beta$, $\beta =$ s/h typ II-fel -

$1-\beta = 0.8 \Rightarrow \beta = 0.2$

$\mu_0 = 5$ $\mu_a = 6$

$1-\beta \approx 0.8$ $\beta = 0.20$

$Z_\beta = Z_{0.20} \approx 0.84$ (enligt N.F. tabellen)

$$n = \frac{1 \cdot (1.645 + 0.84)^2}{(5-6)^2} = \frac{(1.645 + 0.84)^2}{(-1)^2} =$$

~~$\approx 6.175225 \Rightarrow n \geq 7$~~

Avrunda uppåt till närmaste heltal $n = 7$

Svar: det krävs 7 observationer.

Bra!

Poäng: (Points) 20

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet	Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G	Sidnr.: (Page no.) 2
	Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-0006-ARL		

Uppg.nr.: (Task no.) 2

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 2. (del 1 av 3)

4.09, 4.96, 4.72, 4.64, 3.14, 3.23, 4.68, 6.63, 4.81, 4.68 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) $\mu_1' = \mu = E(Y) \quad m_1' = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \bar{Y}$

$\mu_1' = \bar{Y} \Rightarrow \tilde{\mu}_{mom} = \bar{Y} \Leftarrow$ momentestimatorn för μ

$\sigma^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \Rightarrow \sigma^2 = \mu_2' - \mu_1'^2$

$\mu_2' = \sigma^2 + \tilde{\mu}_1^2$

$m_2' = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{n}$

$\mu_2' = m_2' \Rightarrow \tilde{\sigma}^2 + \underbrace{\tilde{\mu}_1^2}_{=\bar{Y}^2} = \frac{\sum Y_i^2}{n}$

$\tilde{\sigma}^2_{Mom} = \frac{\sum Y_i^2}{n} - \bar{Y}^2 \Rightarrow \tilde{\sigma}^2_{MOM} = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n}$

$V(\bar{Y}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V(Y) =$

$= \frac{1}{n^2} n V(Y) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

estimaten:

$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i}{10} = \frac{4.09 + 4.96 + \ldots + 4.81 + 4.68}{10} = \frac{45.58}{10} = 4.558$

$\frac{\sum_{i=1}^{10}(Y_i - \bar{Y})^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 - n(\bar{Y})^2}{10} = \frac{216.328 - 10 \cdot 4.558^2}{10} =$

$= 8.57436/10 = 0.857436$

Svar: Momentestimatorerna är $\tilde{\mu}_{Mom} = \bar{Y}$ & $\tilde{\sigma}^2_{Mom} = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n}$

Variansen av $\tilde{\mu}_{MOM} = \frac{\sigma^2}{n}$

estimaten för momentestimatorerna är 4.558 & 0.857436.

Poäng: (Points)

Tentamensservice/SU/typ_a

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.) 3
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0006-ARL			

Stockholms universitet

Uppg.nr.: (Task no.) 2

Fortsättning av uppg 2 (del 2)

b) Härled Maximumestimatorerna μ o σ^2 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

Vi ställer upp detta som Likelihood funktion

Pga oberoende

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (Y_i - \mu)^2\right] = \quad \exp(x) = e^x$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right]$$

Vi tar nu logaritmen (naturlig logaritmen) ℓ

$$\ell(\mu, \sigma^2) = \ln L(\mu, \sigma^2) = \overset{=0}{\ln(1)} - \ln 2\pi\sigma^{2\,n/2} - \frac{\sum (Y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{\sum (Y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

Sedan derivevar vi log likeliyhood uttrycket med respekt till varje parameter (partiall derivata)

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = -2 \cdot \frac{\sum (Y_i - \mu)}{2\sigma^2} \cdot (-1) = \frac{\sum (Y_i - \mu)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot 2\pi - \frac{\sum (Y_i - \mu)^2}{2\sigma^4} \cdot (-1) =$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum (Y_i - \mu)^2}{2\sigma^4}$$

Sedan sätter vi derivatorna till noll o löser ut MLE.

$$\frac{\sum (Y_i - \hat{\mu}_{MLE})}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum (Y_i - \hat{\mu}_{MLE}) = 0 \Rightarrow$$

$$n\bar{Y} - n\hat{\mu}_{MLE} = 0$$

$$\hat{\mu}_{MLE} = \bar{Y} \qquad (1)$$

Fortsätter på nästa sida

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Fortsätt. av uppg 2 (del 3).

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2_{MLE}} + \frac{\sum(Y_i - \hat{\mu}_{MLE})^2}{2\hat{\sigma}^4_{MLE}} = 0$$

$$\frac{\sum(Y_i - \hat{\mu}_{MLE})^2}{2\hat{\sigma}^4_{MLE}} = \frac{n}{2\hat{\sigma}^2_{MLE}}$$

$$\frac{\sum(Y_i - \hat{\mu}_{MLE})^2}{n} = \hat{\sigma}^2_{MLE} \quad (2)$$ (sätter in (1) i (2))

$$\hat{\sigma}^2_{MLE} = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n}$$

Variansen av $\hat{\mu}_{MLE}$ är

$$V(\hat{\mu}_{MLE}) = V(\bar{Y}) = V\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot V(Y) = // V(Y)=\sigma^2 // =$$

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} //$$

estimaten av $\hat{\mu}_{MLE}$ o $\hat{\sigma}^2_{MLE}$ är

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i}{10} = \frac{45.58}{10} = 4.558$$

$$\sigma^2_{obs} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(Y_i - \bar{Y})^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 - n\bar{Y}^2}{10} = \frac{216.328 - 10\cdot 4.558^2}{10} =$$

$$= 8.57436/10 = 0.857436$$

Svar: Maximum likelihoodestimatorerna för μ o σ^2 är $\hat{\mu}_{MLE} = \bar{Y}$ o $\hat{\sigma}^2_{MLE} = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n}$

Variansen av $\hat{\mu}_{MLE}$ är σ^2/n

Estimaten för $\hat{\mu}_{MLE}$ o $\hat{\sigma}^2_{MLE}$ är 4.558 o 0.857436 respektiva.

Oj vilken formidabel härledning! Men du kom rätt till slut! Bra kämpat.

Poäng: (Points) 20

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet	Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G	Sidnr.: (Page no.) 5
	Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0006-ARL	

Uppgg.nr.: (Task no.) 3

Uppgift 3. Vi ska bestäma ett 95%-igt K.I för variansen (χ^2)

Observationer $n=10$

Obs: 4.09, 4.96, 4.72, 4.64, 3.14, 3.23, 4.68, 6.63, 4.81, 4.68

Vi ska använda formeln:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-(\alpha/2)}(n-1)}\right)$$

$(n-1) = 10-1 = 9$

$\chi^2_{0.05/2}(9) : \chi^2_{0.025}(9) = 19.02$ enligt tabell 4

$\chi^2_{0.975}(9) = 2.70$ enligt tabell 4.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2}{n-1}$$

$\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 4.09^2 + \dots + 4.68^2 = 216.328$

$\bar{Y} = \frac{4.09 + \dots + 4.68}{10} = 4.558$

$$s^2 = \frac{216.328 - 10 \cdot 4.558^2}{10-1} = \frac{8.57436}{9} \approx 0.95271$$

Då ger K.I för variansen:

$$\left(\frac{9 \cdot 0.95271}{19.02}, \frac{9 \cdot 0.95271}{2.70}\right) =$$ ok

$(0.4508091, 3.1757)$ //

Svar: K.I för variansen för det fysiologiska experimentet är: $(0.4508091, 3.1757)$.

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Poäng: (Points) 20

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.) 6
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0006-ARL			

Stockholms universitet

Uppg.nr.: (Task no.) 4

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 4 (del 1)

Teckentest (icke-parametriskt test)

a) (Relaterade urval)

Hypoteser: $H_0: P = \frac{1}{2}$ $H_a: P \neq \frac{1}{2}$

(efter som det står skillnad antar jag dubbelsidigt hypotestest)

Antaganden: S.U. och paren är oberoende.

~~Teststatistika: M (antal positiva differanser)~~

Om Ho är sann så är $M \sim Bin(n, p = 0.5)$

sign. nivå: $\alpha = 0.05$

Motionär	Före	Efter	d_i	d_i^2	$\lvert d_i \rvert$	Rang	Tecken
1	346	325	+21	441	21	10	+
2	330	332	∸2	4	2	3.5	−
3	337	317	+20	400	20	9	+
4	332	333	−1	1	1	1.5	−
5	334	324	+10	100	10	8	+
6	336	335	+1	1	1	1.5	+
7	336	330	+6	36	6	6.5	+
8	334	332	+2	4	2	3.5	+
9	336	330	+6	36	6	6.5	+
10	336	333	+3	9	3	5	+
			Σ 66	Σ 1032			

Vi har ej några ties så $n = 10 \Rightarrow M \sim Bin(10, 0.5)$

$M = 8$

Vi räknar ut P-värde

$P(M \geq 8 \mid p = 0.5) = 1 - P(M \leq 7 \mid p = 0.5) = 1 - 0.94531$

$= 0.05469$

eftersom vi har dubbel sidigt test blir vårt

P-värde $= 2 \cdot 0.05469 = \underline{0.10938}$

Svar: Vi kan inte förkasta nollhypotesen på sign. nivå 5% inte heller på sign. nivå 10%.

nästa sida

Poäng: (Points) 20

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.)
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0006-ARL			7

Uppg.nr.: (Task no.) 4

Uppg. 4. (del 2) Wilcoxons tecken-rang test
b) (icke parametriskt test, relaterade urval)

Vi har S.U. o paren är oberoende (diff är oberoende)

Ho: Det är ingen skillnad mellan Före resp. Sista träningstillfälle avseende på löptid.

Ha: Det är skillnad mellan före och sista träningstillfälle avseende på löptid.

Teststatistika: $T = \min(T^-, T^+)$ ⇒ (eftersom testet är två-sidigt)

Sign. nivå: $\alpha = 0.05$ (dubbelsidigt).

$T^+ = 10 + 9 + 8 + 1.5 + 6.5 + 3.5 + 6.5 + 5 = 50$

$T^- = 1.5 + 3.5 = 5$

$T = \min(T^-, T^+) = 5$

(T är tecken på diff, T^- = är summan av alla negativa diff. o T^+ är summan av de pos. diff.)

(RR = förkastelse område)

$RR = \{T_{obs} \leq T_\alpha\} = \{5 \leq 8\}$

Vi kan förkasta vår noll-hypotes

Svar: Det finns emperiska belägg för att anta att det finns skillnad på löptid mellan Före o Efter träningspassen.

Lärarens kommentar: (Teacher's note) R

Poäng: (Points)

Tentamensservice/SU/typ_a

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet	Datum: (Date YYYY-MM-DD) 2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116	Sidnr.: (Page no.) 8
	Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-0006-ARL		

Uppg.nr.: (Task no.) 4

Uppg. 4 (del 3)

c) Parametriskt test t-test (relaterade urval)

Hypoteser: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \Leftrightarrow \mu_1 \neq \mu_2$

Antagande: • Att differanserna är N.F.
• Att differanserna har samma varians.

Teststatistika: $T = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}}$ $\alpha = 0.05$ (dubbelsiddigt)

Om H_0 är sann så är $T \sim t(n-1)$

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{66}{10} = 6.6$$

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n(\bar{d})^2}{n-1} = \frac{1032 - 10\cdot(6.6)^2}{9} = \frac{596.4}{9} =$$

$= 66.266667$

$RR = \{|t_{obs}| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\} = \{|t_{obs}| \geq t_{0.025}(9)\} =$
$= \{|t_{obs}| \geq 2.26\}$

$$t_{obs} = \frac{6.6}{\sqrt{66.266667/10}} \approx \frac{6.6}{2.56387} = 2.574233 \approx 2.57$$

eftersom $t_{obs} = 2.57 > 2.26$ kan vi förkasta H_0 hypotesen.

R

Svar: Det finns emperiska bevis för att det är skillnad på löptid hos ~~de~~ deltagarna före ~~o~~ efter löpsessionerna.

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	2021-12-04	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST2116	Sidnr.: (Page no.)
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0006-ARL			9

Uppg.nr.: (Task no.) 5

Uppgift 5: Jag skulle använda mig av ett Mann-Whitney U-test då den lilla resp. den stora hissen ses som oberoende, (de påverkar inte varandra o anses var två orelaterade urval). ?

Var får du att det är TVÅ urval ifrån ???

antal S: $n_1 = 21$

antal L: $n_2 = 13$

dessutom vet vi ej om de två grupperna (lilla o stora) är N.F., o vi kan ej använda t-test för stora urval då n är ej är större än 30 obs. för respektive grupp.
Så det blir ett Mann-Whitney U-test o eftersom n_1 o n_2 är större än 10 kan vi Normalapproximera Mann Whitney U-testet.

Runs = R = 16

$$Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{V(R)}}$$

$$E(R) = \frac{2n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$V(R) = \frac{2n_1 \cdot n_2 (2n_1 \cdot n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2 (n_1+n_2-1)}$$

Hinner ej göra denna Uppg. klar!
Brist på tid! :(

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Poäng: (Points) 0

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)