



Stockholms universitet

OBS! Läs noga igenom anvisningarna i tentamen, t.ex. hur du ska skriva svaren. Det är ditt ansvar som student att följa de anvisningar som ges.

NOTE! Read the examination instructions carefully, e.g. how to write the answers. It is your responsibility as a student to follow the given instructions.

Skriv din anonymiseringskod och dagens datum på allt material du lämnar in.
(Enter your anonymization code and today's date on all submitted materials)

Anonymiseringskod (Anonymization code)	3	1	1	-	0	0	2	2	-	B	K	U
Datum (Date YYYY-MM-DD)	2021-10-29						Plats nr. (Seat No.)			27		

Kurs/Kurskod (Course/Course code)	ST 211 G
Kursmoment (Course component)	tenta II

Fylls i av tentamensvärd (To be filled in by invigilator)

Direkt i skrivning: (kryss)		Svarsblankett: (kryss)		Lösa svarsblad: (antal)	13
--------------------------------	--	---------------------------	--	----------------------------	----

Lämnat in blankt: (kryss)		Dator: (kryss)	
------------------------------	--	-------------------	--

Inlämningstid: 17:59 Signatur tentamensvärd:

Fylls i av lärare/examinator (To be filled in by teacher/examinator)

Betyg:	B	Poäng:	80
--------	---	--------	----

Signatur rättande lärare/examinator:

Regler i skrivsalen

- Följ tentamensvärds anvisningar.
- Väskor och ytterkläder ska placeras på anvisad plats.
- Placera ID-handling väl synlig på bordet framför dig.
- Ingen student får lämna skrivsalen under de första 30 minuterna.
- Endast en student i taget får besöka toaletten. Vid toalettbesök skriv ditt namn och klockslag på avsedd lista. Efter toalettbesöket ska du åter ange klockslag på listan.
- Elektronisk utrustning som mobiltelefon eller Smartwatch ska vara avstängd och placerad på anvisad plats.
- Under tentamen gäller tystnad – det är förbjudet att prata, eller på annat sätt kommunicera, med andra studenter under pågående tentamen.
- Innan tentamenshandlingarna lämnas in; skriv sidnummer, anonymiseringskod och datum på alla inlämnade papper.

Om något är oklart – fråga gärna tentamensvärden. Lycka till!

Rules in the examination hall

- Follow the invigilator's instructions.
- Bags and outerwear must be placed at the designated place.
- Place your ID document clearly visible on the table in front of you.
- No student may leave the examination hall for the first 30 minutes.
- Only one student at a time may visit the toilet. Before visiting the toilet, write your name and time on the intended list. After the toilet visit, enter the time on the list again.
- Electronic equipment such as a mobile phone or Smartwatch must be switched off and placed at the designated place.
- During the exam, silence applies – you are not allowed to talk, or otherwise communicate, with other students during the exam.
- Before submitting the examination documents; remember to write the page number, anonymization code, and date on all papers.

Please do not hesitate to ask the invigilator if anything is unclear. Good luck!



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	211029	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST 211 G	Sidnr.: (Page no.)	
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-0022-BKU				1

1) $y =$ antal passningar tills en blir misslyckad

Uppg.nr.:
(Task no.)

a) ~~$P(y) = p(1-p)^{y-1}$~~ } geometrisk förd.

Lärens kommentar:
(Teacher's note)

$$E(y) \text{ i geom. förd.} = \frac{1}{p}$$

$$m'_1 = E(y) = \frac{1}{p}$$

$$m'_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$\hat{m}'_1 = m'_1 \rightarrow \frac{1}{\hat{p}_{MM}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$\hat{p}_{MM} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

Svar: Moment estimatorn av p

$$\hat{p}_{MM} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i} \quad R$$

6

Poäng:
(Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärares
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



1 b) Hitta \hat{p}_{ML}

Uppg.nr.:
(Task no.)

$$p(y) = p(1-p)^{y-1}$$

Likelihood funkt.

$$L(p) = \prod (p(1-p)^{y_i-1}) = p(1-p)^{y_1-1} \times \dots \times p(1-p)^{y_n-1}$$

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

$$= p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n y_i - n}$$

Logaritmera

$$\ln L(p) : n \ln(p) + (\sum y_i - n) \ln(1-p)$$

Derivera

$$\frac{dL}{dp} = \frac{n}{p} + \frac{\sum y_i - n}{1-p}$$

derivat = 0

$$\frac{n}{p} + \frac{\sum y_i - n}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum y_i - n}{1-p} = \frac{n}{p}$$

~~derivat = 0~~

$$p(\sum y_i - n) = n(1-p)$$

$$\hat{p}_{ML} = \frac{n}{\sum y_i}$$

$$p(\sum y_i - n) = n - np$$

Svar: $\hat{p}_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i}$

$$p \sum y_i - pn = n - np$$

$$p \sum y_i - \cancel{np} + np = n$$

6

Poäng:
(Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



$$1c) E(\bar{y}) = E\left(\frac{\sum y_i}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n} E(\sum y_i) = \frac{n \times 1}{n \times p} = \frac{n}{np} = \frac{1}{p}$$

geom $\rightarrow E(y) = \frac{1}{p}$

$\frac{1}{p}$

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

geom $\rightarrow V(y) = \frac{1-p}{p^2}$

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{\sum y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(\sum y_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(1-p)}{p^2} \right) = \frac{n(1-p)}{n^2 p^2} = \frac{1-p}{np^2}$$

~~PBR~~

Svar: $E(\bar{y}) = \frac{1}{p}$ dvs v r

$$V(\bar{y}) = \frac{1-p}{np^2}$$

Poäng:
(Points)

20

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärares
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



2a) H_0 : det finns ingen skillnad mellan gruppernas tentamensresultat.

Uppg.nr.:
(Task no.)

H_1 : Det finns en skillnad mellan gruppernas tentamensresultat.

Lärarens kommentar:
(Teacher's note)

Förutsättningar:

- parvisa/beroende observ.
- SU (ueller omringningsgrupper)
- minst ordinalskala på observationerna

$H_0: p = 0,5$

$H_1: p \neq 0,5$

Teststatistiska M

par	Grupp 1	Grupp 2	+/-	
1	92	90	+	antal + 7st
2	61	63	-	antal - 3st = M
3	74	58	+	$n = 10$
4	64	65	-	p -värde
5	67	48	+	$2 \times P(M \leq 3) = 2 \times 0,17188$
6	73	70	+	$2 \times P(M \leq 3) = 2 \times 0,17188$
7	72	70	+	$= 0,34376$ ✓ (-1)
8	69	64	+	
9	72	74	-	Svara med ett så stort obs.
10	72	66	+	p -värde kan vi ej förkasta H_0 .

6

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärares
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



2b) H_0 : det finns ingen skillnad mellan gruppernas tentamensresultat.

(lika läge på fördelningarna)

H_1 : Det finns skillnad mellan gruppernas tentamensresultat.

(fördelningarna har olika läge)

ok

Uppg.nr.: (Task no.)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

4

Förutsättningar

- parvisa/berövande obsrv.
- SU (mellan grupper)

~~och senaste orderna starta sig på 0,5~~

- samma skala på observationerna. Vi behöver kunna räkna på differens.

Grupp 1	Grupp 2	differ	I+	I-
92	90	2	23,5	
61	63	-2		-23,5
74	58	16	16,9	
64	65	-1		-1
67	48	19	19,0	
73	70	3	3,6	
72	70	2	23,5	
69	64	5	5,7	
72	74	-2		-2
72	66	6	6,8	
		$\sum 53$		-5

$n=10$

Teststatistika T

$T=5$

$\alpha=0,05 \checkmark$

kritiskt värde från tabell.

(dubbelsidigt test) = 8

vi förkastar

Eftersom $T=5 < 8$

förkastar vi H_0

Svar: vi förkastar H_0 med $\alpha=0,05$

Det finns skillnad i resultat mellan gr.

väjer $T=5$ pga $5 < 8$

\leftarrow

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	211029	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST 211 G	Sidnr.: (Page no.)	
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U				6

2c)

Parat t-test

$\mu_1 = \text{pop. med. grupp 1}$
 $\mu_2 = \text{pop. med. grupp 2}$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Förutsättningar

- differenserna är nt & oberoende
- parat data (beroende mellan paren)
- oberoende mellan paren

~~Teststatistika~~

Teststatistika

$T = \frac{\bar{d}}{S/\sqrt{n}}$

pr!

Dittor

2 -2 16 -1 19 3 2 5 -2 6

$S^2 = \frac{\sum d_i^2 - n(\bar{d})^2}{n-1} = \frac{704 - 10(4,8)^2}{9} = 52,62$

$\sum d = 48$

$\bar{d} = \frac{48}{10} = 4,8$

$\sum d^2 = 704$

$t_{obs} = \frac{4,8}{\sqrt{52,62}/\sqrt{10}} = 2,0925$

$fg = 10 - 1 = 9$

~~$\alpha = 0,05$~~ ger oss kritiskt värde 1,83

$2,09 > 1,83 \rightarrow H_0$ förkastas

Svar: H_0 förkastas med $\alpha = 0,05$. Det finns skillnad mellan gruppernas resultat på tentamen.

Poäng:
(Points)

17

7

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	21 10 29	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST 211 G	Sidnr.: (Page no.)	
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U				7

3a) En konsistent estimator behöver för det första vara VVR. \leftarrow inte nödvändigt.

Variansen av estimatorm $V(\hat{\theta})$
ska dessutom minskat då antalet observationer n ökar.

Alltså, när n närmar sig ∞ så kommer variansen att närma sig 0.

b) Vi har ett ~~konfidenstest~~ ex 95%
konfidenstest

Det innebär att vi 95% av gångerna som vi utför ett test [?] och beräknar KI kommer att "fånga" det samma värdet inom vårt KI, ~~konfidenstest~~.

c) Likelihood kvottestet används för att testa styrka. [?]

till skillnad från NPL så vill vi här göra för ett test på hela "parameterområdet".

$$\lambda_{LR} = \frac{L(\Omega_0)}{L(\Omega_a)} < k$$

utifrån kvoten kan vi den se om data stämmer bättre med H_0 ($L(\Omega_0)$) eller H_a ($L(\Omega_a)$).

k står för någon konstant k som kommer att bero på vilken α vi använder.

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

3

3

4

Poäng:
(Points)

17

10/1

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärares
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	21 10 29	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211 G	Sidnr.: (Page no.)	8
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U				

3d) vid stora urval kan vi anv.
 $-2 \ln L_R$ för att approximeras
en χ^2 (omifördelning)

$$W = -2 \ln L_R \quad f.g.?$$

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

3

e) Spearman's rang korrelation

(+) I de fall vi använder oss av
data/observationer som inte är samma
"skal" så kan vi ändå räkna ut
rang korrelationen eftersom vi rangord.
grupperna var för sig.

4

(+) Vi behöver inte lika många antaganden
~~om μ och σ som i ett~~ som med ett
parametriskt test.

(-)

Styrkan i icke-parametriska test
är dock lägre. Det finns en
större risk för Typ II fel (B)

Poäng:
(Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	21 10 29	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST 211 G	Sidnr.: (Page no.)	9
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U				

Ua) $H_0: p = 0,2$ $H_a: p = 0,5$

Från uppgift 1 $\rightarrow h(p) = p^n (1-p)^{k-j-n}$

NPL

$$\frac{h(\theta_0)}{h(\theta_a)} = \frac{L(p=0,2)}{L(p=0,5)} = \frac{0,2^n (0,8)^{k-j-n}}{0,5^n (0,5)^{k-j-n}} < k$$

$$= \left(\frac{0,2}{0,5}\right)^n \left(\frac{0,8}{0,5}\right)^{k-j-n} < k$$

logaritmera

$$n \ln(0,2/0,5) + (k-j-n) \ln(0,8/0,5) < \ln(k)$$

$$= (k-j-n) \ln(0,8/0,5) < \ln(k) - n \ln(0,2/0,5)$$

$$k-j-n < \frac{\ln(k) - n \ln(0,2/0,5)}{\ln(0,8/0,5)}$$

$$k-j < \frac{\ln(k) - n \ln(0,2/0,5)}{\ln(0,8/0,5)} + n$$

$$k-j < \frac{\ln(k) - n(\ln(0,2) - \ln(0,5))}{\ln(0,8) - \ln(0,5)} + n$$

k' = teststatistikens kritiskt värde

~~... (scribbled out text) ...~~

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

6

Poäng:
(Points) 6

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



4a) forts.

Om vi får en liten kvot α

$$\text{ex } \frac{1}{10} = 0,1$$

↪ så slår vi H_0 lättare än H_1

? H_0 kommer således att
förkastas vid små värden
på teststatistikan.



Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	21 10 20	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211G	Sidnr.: (Page no.)	10
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U				

4b) $L(p) = p^n (1-p)^{k_{y_i} - n}$

$H_0: p = 0,2$

$H_1: p > 0,2$

~~eller~~ ↓

$H_a: p = 0,3$

$H_a: p = 0,4$

$H_a: p = 0,5$

osv

} fler sannsynlighetsverdier

① $\frac{L(p=0,2)}{L(p=0,3)} = \frac{(0,2)^n (0,8)^{k_{y_i} - n}}{(0,3)^n (0,7)^{k_{y_i} - n}}$

$\hookrightarrow k_{y_i} < \frac{\ln(k) - n \ln(0,2) - \ln(0,3)}{\ln(0,8) - \ln(0,7)} + n$

② $\frac{L(p=0,2)}{L(p=0,4)} = \frac{(0,2)^n (0,8)^{k_{y_i} - n}}{(0,4)^n (0,6)^{k_{y_i} - n}}$

$\hookrightarrow k_{y_i} < \frac{\ln(k) - n \ln(0,2) - \ln(0,4)}{\ln(0,8) - \ln(0,6)} + n$

Bonus vi har ej ett likemøntet størkaste test eftersom vi kommer att få helt olika RR beregninger på ulikene H_a vi vurderer. ✓

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens kommentar:
(Teacher's note)

Poäng:
(Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	21 10 21	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST2119	Sidnr.: (Page no.)	
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U			12	

4c)

$$\alpha = 0,05$$

Jag utgår från hypoteserna i Mb)

$$H_0: p = 0,2$$

$$H_a: p > 0,2$$

enkelsidigt test $\alpha = 0,05$ ger oss

kritiskt värde 1,64

$$z = \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma}$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{p}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1-p}{p^2}$$

Om H_0 är sann $p = 0,2$

$$z_{obs} = \frac{\frac{1}{0,2} - 0,2}{\sqrt{\frac{1-0,2}{0,2^2}}} = \frac{5 - 0,2}{\sqrt{\frac{0,8}{0,04}}} = 1,0733$$

$$z_{obs} = 1,07 < \text{kritiskt värde } 1,64$$

\therefore vi förkastar inte H_0

Svar: vi kan inte förkasta H_0 med $\alpha = 0,05$.

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärares
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)



Datum: (Date YYYY-MM-DD)	21 10 20	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST211 G	Sidnr.: (Page no.)	
Anonymiseringskod (Anonymization code)	3 1 1 - 0 0 2 2 - B K U				13

5) H_0 : Sekvensen S & L är slumpmässig
~~(korrekt)~~

Uppg.nr.:
(Task no.)

H_1 : Sekvensen S & L är inte slumpmässig
(Det finns ett "monster")

Lärarens kommentar:
(Teacher's note)

eftersom vi har $n=34$ så använder vi oss av normalapproximering.

$$\text{teststatist} \rightarrow Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{VR}}$$

$$n_1 = \text{antal L} = 13$$

$$n_2 = \text{antal S} = 21$$

$$E(R) = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2 \times 13 \times 21}{13+21} + 1 = 17,0588$$

$$V(R) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} = \frac{2 \times 13 \times 21(2 \times 13 \times 21 - 13 - 21)}{(13+21)^2(13+21-1)}$$

$$= \frac{546 \times 512}{1156 \times 33} = \frac{279552}{38148} = 7,3281$$

$$R = \text{antal "mnis"} = 16$$

$$Z_{\text{obs}} = \frac{16 - 17,0588}{\sqrt{7,3281}} = -0,39$$

Svar: med $Z_{\text{obs}} = -0,39$ kan vi ej förkasta H_0 på någon nivå α .
Våra observationer talar för att sekvensen skulle kunna vara slumpmässig.

Poäng:
(Points)

20

Uppg.nr.:
(Task no.)

Lärarens
kommentar:
(Teacher's
note)

Poäng:
(Points)