Stockholms universitet

Skriv din anonymiseringskod och dagens datum på allt material du lämnar in. (*Enter your anonymization code and todays date on all submitted materials*)												
Anonymiseringskod (*Anonymization code*)	3	1	1	-	K	N	U		-	N	Y	M
Datum (*Date* YYYY-MM-DD)	28-9-21											

Kurs/Kurskod (*Course/Course code*)	ST2116
Kursmoment (*Course component*)	Statistisk teori med tillämpningar I

Fylls i av tentamensvärd (*To be filled in by invigilator*)

Direkt i skrivning: (kryss)		Svarsblankett: (kryss)		Lösa svarsblad: (antal)	12

Lämnat in blankt: (kryss)		Dator: (kryss)	

Inlämningstid: 18 : 19 Signatur tentamensvärd:

Fylls i av lärare/examinator (*To be filled in by teacher/examinator*)

Betyg:	A	Poäng:	90

Signatur rättande lärare/examinator:

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21 | Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G | Sidnr.: (Page no.) 1

Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM

Uppg.nr.: (Task no.) 1 a), b)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 1

a) visa att $k = \frac{1}{18}$

vi vet att hela sannolikheten är 1. dvs

$P(x=2) + P(x=4) + P(x=6) + P(x=8) = 1$

vi löser ut funktionen och sätter den $=1$

$k2 + k4 + k6 + k8 - 2k = 1 \Rightarrow k18 = 1 \quad k = \frac{1}{18}$

V.S.V

4

b) Beräkna väntevärde för x

1) Beräkna sannolikheten för varje värde x:en anta

$P(x=2) = \frac{1}{18} \cdot 2 = \frac{2}{18}$

$P(x=4) = \frac{1}{18} \cdot 4 = \frac{4}{18}$

$P(x=6) = \frac{1}{18} \cdot 6 = \frac{6}{18}$

$P(x=8) = \frac{1}{18}(8-2) = \frac{6}{18}$

Beräkna $E(x) = \sum_x x\,p(x) = \left(\frac{2}{18} \cdot 2\right) + \left(\frac{4}{18} \cdot 4\right) + \left(\frac{6}{18} \cdot 6\right) + \left(\frac{6}{18} \cdot 8\right) \Rightarrow \frac{4}{18} + \frac{16}{18} + \frac{36}{18} + \frac{48}{18} = \frac{104}{18} = \frac{52}{9}$

Svar: $E(x) = \frac{52}{9}$

4

c) $\Rightarrow$

Poäng: (Points)

c) Beräkna $V(\ [illegible]\ )$

Vi minns [illegible] $V(X) = \sum x^2 \cdot [illegible]$

$[illegible] = [illegible] \cdot \frac{[illegible]}{13} + 4^2 \cdot \frac{4}{13} + 6^2 \cdot \frac{6}{13} + [illegible] \cdot \frac{[illegible]}{13}$

$\left(\frac{2}{13}\right) + \frac{64}{13} + \frac{216}{13} + \frac{[illegible]}{13} = \frac{[illegible]}{[illegible]} = 336$

$[illegible] = \frac{336}{[illegible]}$ [illegible]

$V(X) = \frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible] \approx [illegible]$

$V(\ [illegible]\ ) = [illegible]$

Svar: $V(\ [illegible]\ ) \approx [illegible]\ 7{,}68$ [illegible]

d) Beräkna [illegible] $P(X < [illegible])$ [illegible]

Sannolikheten [illegible]

$P(X < [illegible]) = [illegible] = [illegible] = [illegible]$

Svar: [illegible]

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21
Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116
Sidnr.: (Page no.) 2
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM

Uppg.nr.: (Task no.) 1 c), d)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

c) Beräkna $Var(3-4x)$

Vi måste först hitta $V(x)=\sum_x [x-E(x)]p(x)$

$E(x^2) = \left(2^2 \cdot \frac{2}{18}\right) + \left(4^2 \cdot \frac{4}{18}\right) + \left(6^2 \cdot \frac{6}{18}\right) + \left(8^2 \cdot \frac{6}{18}\right) \Rightarrow$

$\left(\frac{8}{18}\right) + \left(\frac{64}{18}\right) + \left(\frac{216}{18}\right) + \left(\frac{384}{18}\right) = \frac{672}{18} = \frac{336}{9}$ K

$E(x^2) = \frac{336}{9}$ Vi vet från b) att $E(x) = \frac{52}{9}$

$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \frac{336}{9} - \frac{270}{4} = 3,95061$ K

konstanten försvinner

$Var(3-4x) \Rightarrow (-4)^2 \cdot 3,95061 = -63,20987648$

Svar: $Var(3-4x) = \cancel{-}63,2097648$

7

d) Beräkna $F(5)$ dvs $= P(x \leq 5)$ alltså sannolikheten att X är mindre eller lika med 5

$P(X \leq 5) = P(x=2) + P(x=4) = \frac{2}{18} + \frac{4}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

Svar: $F(5)$ = Sannolikheten att X är mindre eller lika med 5, $P(X \leq 5) = \frac{1}{3}$

4

Tentamensservice/SU/typ_a

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21

Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G

Sidnr.: (Page no.) 3

Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM

Uppg.nr.: (Task no.) 2, a), b), c)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 2

a) P(vinner) = 0,6

P(Förlorar) = 0,1

P(oavgjort) = 0,2

Fördelningen är "första gången fördelning" dvs geometrisk.

$X \sim geo(p = 0,6)$

$P(X=3) = 0,6(1-0,6)^2 = 0,096$

5

Svar: Sannolikheten att Fey måste spela 3 gånger innan hon vinner är 0,096

b) $Y \sim negbin(p = 0,6, r = 5)$

$P(Y=8) = \binom{8-1}{5-1} 0,6^5(1-0,6)^3 \Rightarrow \binom{7}{4} 0,6^5(1-0,6)^3 \Rightarrow$

$(35) \cdot 0,6^5(1-0,6)^3 = 0,17418$

5

Svar: P(Y=8) = 0,17418 Det vill säga sannolikheten att den femte vinsten inträffar i åttonde omgången är 0,17418

c) $X \sim bin(p = 0,6, n = 10)$

$P(X=7) = \binom{10}{7} 0,6^7(1-0,6)^3 = 0,2149$

5

Svar: Sannolikheten att Fey vinner 7 av totalt 10 omgånger är 0,2149

d) $\Rightarrow$

Poäng: (Points)

Tentamensservice/SU/typ_b

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

A) [illegible] sannolikhet [illegible]

Vinst 5

Förlust = 3

Oavgjort [illegible]

Fördelningen är multinomial.

$$\frac{n!}{\text{vinst}!\,\text{förlust}!\,\text{oavgjort}!} \cdot 0{,}6^{5} \cdot 0{,}1^{3} \cdot 0{,}3^{1} =$$

$$= \frac{9!}{5! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot 0{,}6^{5} \cdot 0{,}1^{3} \cdot 0{,}3^{1} = [illegible]$$

Sannolikheten att [illegible] vinner 5 / förlorar 3 och oavgjort 1 ≈ 0,0174

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD)	28-9-21	Kurs/Kurskod: (Course/Course code)	ST2116	Sidnr.: (Page no.)
Anonymiseringskod (Anonymization code)	311-KNU-NYM			4

Uppg.nr.: (Task no.) 2, d)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

uppgift 2 d)

Beräkna Sannolikheten att:

vinna = 5

Förlora = 3

Oavgjort = 4

Fördelningen är multinomial

$$\frac{n!}{\text{Vinna}!\ \text{Förlora}!\ \text{oavgjort}!} = 0{,}6^5 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}3^4$$

$$\frac{12!}{5! \cdot 3! \cdot 4!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}0174\ldots$$

5

Svar: Sannolikheten att Fey vinner 5, Förlorar 3, och Spelar oavgjort 4 är 0,0174

Poäng: (Points)

Tentamensservice/SU/typ_a

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21 | Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211G | Sidnr.: (Page no.) 5

Anonymiseringskod (Anonymization code) 331-KNU-NYM

Uppg.nr.: (Task no.) 3 a)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 3

(i) = Det är en diskret fördelningsfunktion. Anledningen till att funktion är diskret är för att den kan enbart anta heltal 0, + kan vara en fördelningsfunktion för att leda sannolikheten är ett och funktionen kan ej anta negativa sannolikheter, enligt grafen

1

(ii) Det ~~är~~ kan vara en fördelningsfunktion. Funktionen är diskret. funktionen antar 1 med sannolikheten 1, och 0 med sannolikheten 0. Funktionen visar också att F(x) inte kan anta negativa värden vilket innebär att F(x) går från 0-1 alltså är det en fördelningsfunktion som går mellan sannolikheten 0-1. Enligt det man ser från grafen.

0

(iii) Det är ingen fördelningsfunktion. Det beror på att ...

0,5

(iv) Det är kontinuerlig fördelningsfunktion, som är exponentiell. Anledning varför den är kontinuerlig är för att funktionen kan anta alla möjliga värden, alltså inte enbart heltal. Anledningen till att det är en fördelningsfunktion är för att den totala sannolikheten är ett, alltså den totala sannolikheten är lika med 1. Den visar också för värden som är mindre än noll är sannolikheten noll.

0

(v) Det ~~är~~ kan vara en kontinuerlig fördelningsfunktion. Anledningen till det är att funktionen kan anta alla möjliga värden (går mot oändligheten). Det är en fördelningsfunktion för att F(x) går mellan 0 och 1. Om x är < 0 är F(x) = 0. Enligt grafen

1

→

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21
Kurs/Kurskod: (Course/Course code) S1211G
Sidnr.: (Page no.) 6
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM
Uppg.nr.: (Task no.) 3a) 3b)
Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Fortsättning 3 a)

(vi) Ingen fördelningsfunktion. Det beror på att F(x) alltså sannolikheten har negative värden vilket inte är möjligt i en fördelningsfunktion. ~~Då~~ 1

(vii) Det är en kontinuerlig fördelningsfunktion. Fördelningsfunktion för att F(x) går mellan 0-1 alltså sannolikheten går mellan noll och ett. kontinuerlig för att den kan anta värden som inte enbart är heltal. 1

(viii) Funktionen är en kontinuerlig fördelningsfunktion för värden x kan anta är alla möjliga negative och possitive värden. Däremot viser funktionen att den enbart kan anta sannolikheten 0-1 alltså att sannolikheten inte kan vara större än 100% vilket gör den till en fördelningsfunktion. 1

b) (i) Bestäm fördelningsfunktionen för X.

För $F(x)$, $x \le -1$

0

För $F(x)$, $-1 < x < 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} t+1 \, dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2} + x - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2}$$ R

$\Longrightarrow$ Fortsättning b) nästa sida

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21	Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST216	Sidnr.: (Page no.) 7
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM		

Uppg.nr.: (Task no.) 3 b) i, ii

For $F(x)$ $0 \leq x < 1$

$$F(x) = \int_{-1}^{0} x+1 \, dx + \int_{0}^{x} 1 - t \, dt = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} - (0-0) \Rightarrow \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{1+2x-x^2}{2} =$$

$$\frac{-x^2+2x+3}{2}$$

$$F(x) \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^2+2x+1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{-x^2+2x+1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

8

ii) Beräkna $P(-0,5 < X < 0,5) \Rightarrow$

$$P(-0,5 < X < 0,5) = P(X \leq 0,5) - P(X \leq -0,5) =$$

$$\frac{-(0,5)^2 + 2 \cdot 0,5 + 1}{2} - \left(\frac{(-0,5)^2 + (-0,5 \cdot 2) + 1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$0,875 - 0,125 = 0,75$$

Svar: $P(-0,5 < X < 0,5) = 0,75$

4

Tentamensservice/SU/typ_a

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens
kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21 | Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116 | Sidnr.: (Page no.) 8

Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM

Uppg.nr.: (Task no.) 4 a), b)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 4.

a) Hitta marginalfördelningen för x

$f_x(x) = \int_0^1 \frac{x+y}{3} dy \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{3} + \frac{y}{3} dy = \left[\frac{xy}{3} + \frac{y^2}{6}\right]_0^1 \Rightarrow$

$\frac{x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2x+1}{6}$

$f_x(x) \begin{cases} \frac{2x+1}{6}, & 0<x<2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

Marginalfördelning y

$f_y(y) = \int_0^2 \frac{x}{3} + \frac{y}{3} dx = \left[\frac{x^2}{6} + \frac{xy}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{6} + \frac{2y}{3} - 0 \Rightarrow$

$\frac{2+2y}{3}$

$f_y(y) \begin{cases} \frac{2+2y}{3}, & 0<y<1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

6

b) $E(x) = \int_0^2 \left(\frac{2x+1}{6}\right) x \, dx = \int_0^2 \frac{2x^2}{6} + \frac{x}{6} dx =$

$\left[\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{12}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{9} + \frac{2^2}{12}\right) - 0 = \frac{8}{9} + \frac{4}{12} =$

$\frac{96}{108} + \frac{36}{108} = \frac{138}{108} = \frac{11}{9}$ Svar: $E(x) = \frac{11}{9}$

4

Poäng: (Points)

Tentamensservice/SU/typ_a

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21
Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116
Sidnr.: (Page no.) 9
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM
Uppg.nr.: (Task no.) 4, c, d
Lärarens kommentar: (Teacher's note)

c) om oberoende gäller sta $f(x) \cdot f(y) = f(x,y)$

$$\left(\frac{2x+1}{6}\right) \cdot \left(\frac{2+2y}{3}\right) \neq \frac{x+y}{3}$$

Svar: Dem är stokastiskt beroende då $f(x) \cdot f(y) \neq f(x,y)$

2

d) Beräkna $P(X>1 \mid Y<\frac{1}{2}) = \frac{P(X>1, Y<\frac{1}{2})}{P(Y<\frac{1}{2})}$

Börja med att beräkna $P(X>1, Y<\frac{1}{2})$

$$\int_1^2 \int_0^{0,5} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \, dy \, dx \int_1^2 \left[\frac{xy}{3} + \frac{y^2}{6}\right]_0^{0,5} dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{0,5x}{3} + \frac{0,25}{6} \, dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{1x}{6} + \frac{1}{24} \, dx = \left[\frac{x^2}{12} + \frac{x}{24}\right]_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4}{12} + \frac{2}{24} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = \frac{12}{24} - \frac{3}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$ ✓

$P(X>1, Y<\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

Hitta $P(Y<\frac{1}{2})$

$$f_Y(y) = \int_0^{0,5} \frac{2}{3} + \frac{2y}{3} \, dy = \left[\frac{2y}{3} + \frac{2y^2}{6}\right]_0^{0,5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$ K

$$P(X<\tfrac{1}{2}) = \frac{5}{12} \quad \frac{P(X>1, Y<\frac{1}{2})}{P(Y\leq\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{12}} = 0,8999\ldots$$ ✓

Svar: $P(X>1 \mid Y<\frac{1}{2}) = 0,8999$

1,5

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Stockholms universitet

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21	Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST211	Sidnr.: (Page no.) 10
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM		

Uppg.nr.: (Task no.) 5 a)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

Uppgift 5

a)

Vi vet:

$\beta = 5$

$$f(y) \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} & 0 < y < \infty \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$P(Y>7) \Rightarrow f(y) \int_7^\infty \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} dy = \left[-e^{-\frac{y}{5}} \right]_7^\infty \Rightarrow$$

$$+(e^{-\frac{\infty}{5}} - (-e^{-\frac{7}{5}})) = e^{-\frac{7}{5}} = 0,09697...$$

när $y \to \infty$ blir det noll

4,5

Svar: $P(Y>7) = 0,09697$. Sannolikheten är 0,09697 att man måste vänta längre än 7 sekunder på att datorn ska köra klart algoritmen

Poäng: (Points)

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21	Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116	Sidnr.: (Page no.) 11
Anonymiseringskod (Anonymization code) 311-KNU-NYM		

Uppg.nr.: (Task no.) 5b)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

5b) Hitta $F_{Y(n)}(y)$

börja med $F(y)$

går mot noll då $\infty \Rightarrow \infty$

$$F(y) = \int_0^y f(t)\,dt \Rightarrow \int_0^y \frac{1}{5} e^{-t/5} \Rightarrow \left[-e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^y = -e^{-\frac{y}{5}}$$

$$F(y) \begin{cases} 1-e^{-\frac{y}{5}}, & y > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$F_{Y(n)}(y) = \left(-e^{-\frac{y}{5}}\right)^N$$

Vi vet att $N = 50$

Seda beräknar sannolikheten att $P(Y>30) \Rightarrow$

$$-e^{-\frac{\infty}{5}} - \left(-e^{-\frac{30}{5}}\right) = 0{,}00247\ldots$$

Sätter in det i $F_{Y(n)}(y) = (0{,}00247)^{50} = 0$

Svar: Ja! Datorn lever upp till kravet då sannolikheten är noll.

3

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)

Datum: (Date YYYY-MM-DD) 28-9-21 Kurs/Kurskod: (Course/Course code) ST2116 Sidnr.: (Page no.) 12

Anonymiseringskod (Anonymization code) 3111-KNU-NXM

Uppg.nr.: (Task no.) 5, c)

Lärarens kommentar: (Teacher's note)

c) Tiden att köra hela programmet $= T = 2Y + 3$

Hitta fördelningsfunktionen av T

Använder fördelningsfunktionsmetoden.

$P(T < t) = P(2Y+3 < t) = P\left(Y < \frac{t-3}{2}\right)$

$1 - F_t(t) = \int_{\frac{t-3}{2}}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} \, dy \left[-e^{-\frac{y}{5}} \right]_{\frac{t-3}{2}}^{\infty}$ $-e^{-\frac{y}{5}} \to 0$ när $y = \infty$

$0 - -e^{-\frac{1}{5}\left(\frac{t-3}{2}\right)} = \Rightarrow 0 - -e^{-\left(\frac{t-3}{10}\right)} = e^{-\left(\frac{t-3}{10}\right)}$

$F_t(t) \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t-3}{10}\right)}, & t > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

$P(t > 20) = e^{-\left(\frac{20-3}{10}\right)} = 0{,}18268\ldots$ K

Svar: Sannolikheten att hela programmet tar mer än 20 sekunder är 0,18268

6,5

Uppg.nr.:
(*Task no.*)

Lärarens kommentar:
(*Teacher's note*)

Poäng:
(*Points*)