STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I
2019-09-30

Skrivtid: 16.00-21.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

OBS!
Fråga 1a struken pga. fel

Uppgift 1 (20 poäng)
En variabel X har fördelningsfunktion

$$F(X) = \frac{x^3 - k}{40} \qquad x = 1, 2, 3$$

a) Visa att $k = 13$.

b) Ange sannolikhetsfördelningen för X.

c) Beräkna variansen för X.

d) Beräkna variansen för $4X - 5$.

Uppgift 2 (20 poäng)
I en svarv behandlas metallcylindrar så att de får en viss diameter. Diametern som cylindrarna får efter att ha behandlats i svarven är en stokastisk variabel som är approximativt normalfördelad med väntevärde 12.4 och standardavvikelse σ.

a) Vilket är det högsta tillåtna värdet på σ om högst 5 % av cylindrarna får ha en diameter utanför intervallet (12.0 ; 12.8)?

b) Cylindrarna klassificeras i tre klasser; A (smal), B (mellan) eller C (tjock), beroende på storleken på diametern. Klass A motsvaras av en diameter som är mindre än 12.2, klass B av en diameter som är mellan 12.2 och 12.5 och klass C av en diameter som är mer än 12.5. Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald cylinder klassifceras som A, B respektive C. Använd σ från a)-uppgiften (eller hitta på ett lämpligt värde om du inte har löst den).

c) Antag att ett slumpmässigt urval av 6 st metallcylindrar dras. Vad är sannolikheten att det i urvalet är 4 stycken cylindrar av kategori B (mellan) och 2 cylindrar av kategori A (smal) och/eller C (tjock) d.v.s. 2 från A eller 2 från B eller en från varje?

Uppgift 3 (20 poäng)
En grossist som säljer äpplen har vissa kvalitetskrav att leva upp till, såsom att äpplena har en viss fasthet. Grossisten har som ambition att högst 10 % av varje parti äpplen som säljs är av oacceptabel kvalitet. Fastheten hos ett äpple kan mätas men äpplet kommer då att förstöras och går inte att sälja. Därför testas bara ett urval äpplen ur varje parti. För att avgöra om ett parti har en godkänd kvalitetsnivå tar grossisten ett slumpmässigt urval av 4 äpplen och mäter fastheten. Om högst ett av dessa är av oacceptabel kvalitet godkänns partiet.

a) Antag att ett parti med 25 äpplen innehåller 2 äpplen som inte lever upp till kvalitetskraven. Vad är väntevärdet för antal äpplen av oacceptabel kvalitet i urvalet?

b) Beräkna sannolikheten att detta parti godkänns.

c) Beräkna sannolikheten att alla äpplen i urvalet är acceptabla givet att partiet godkänns.

Uppgift 4 (20 poäng)
Livslängden för en komponent i en elektrisk produkt är exponentialfördelad med väntevärde 200 timmar.

a) Vad är sannolikheten att en komponent håller minst 200 timmar?

b) I den elektriska produkten används 7 komponenter. När den första komponenten av de 7 går sönder fungerar inte den elektriska produkten längre. Komponenternas livslängder antas vara oberoende. Bestäm täthetsfunktion för produktens livslängd.

c) Vad är sannolikheten att produkten fungerar längre än 200 timmar?

d) Förklara skillnaden mellan sannolikheterna uträknade i a) och c).

Uppgift 5 (20 poäng)
Låt X vara beloppet (i tusentals kronor) som en vuxen person spenderar på mediciner varje år och Y vara beloppet (i tusentals kronor) som en vuxen person spenderar på restaurangbesök varje år. Den simultana täthetsfunktionen för X och Y ges av

$$f(x,y) = xe^{-x(1+y)} \qquad x > 0 \qquad y > 0$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y.

b) Är X och Y oberoende?

c) För en familj bestående av 2 vuxna personer är den totala utgiften för mediciner $U = 2X$ kronor per år. Bestäm täthetsfunktionen för U. Vad har U för fördelning?

d) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald familj bestående av 2 vuxna personer spenderar mer än 5000 kronor per år på mediciner?

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 30/9-2019

Sal: Ugglevikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: 0013-OMG

[X] Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
x	x	x	x	x					9
Lär.ant. 15	19	20	15	18					

NW

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
87+4=91	A	GF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vgglenh Anonymkod: 0013-046 Blad nr: 1

$$F(x) = \frac{x^3 + k}{40} \qquad x = 1, 2, 3$$

a) Då det högsta värdet på x summerar fördelningsfunktionen till 1, så måste:

$$F(3) = \frac{3^3 + k}{40} = 1$$

Genom detta visas att $k = 13$:

$$F(3) = \frac{3^3 + k}{40} = 1$$

$$= 27 + k = 40$$

$$40 - 27 = k$$

$$k = 13$$

$$F(3) = \frac{3^3 + 13}{40} = 1 \Rightarrow \frac{40}{40} = 1$$

SVAR: ovanstående uträkning har visat att $k = 13$ i fördelningsfunktionen:

$$F(x) = \frac{x^3 + k}{40} \qquad x = \{1, 2, 3\}$$

2

b)

X	1	2	3	
p(x)	0,35	0,175	0,475	1
F(x)	0,35	0,525	1	

SVAR:

$$F(1) = \frac{1^3 + 13}{40} = 0{,}35$$

$$F(2) = \frac{2^3 + 13}{40} = 0{,}525$$

$$F(3) = \frac{3^3 + 13}{40} = 1$$

Detta är fördelningsfunktions värdena. Jag frågar efter P(X=1), P(X=2) och P(X=3)

2

c) $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

siffror från b)

$$E(x) = 1 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}175 + 3 \cdot 0{,}475 = 2{,}125$$

$$E(x^2) = 1^2 \cdot 0{,}35 + 2^2 \cdot 0{,}175 + 3^2 \cdot 0{,}475 = 5{,}325$$

7

$$V(x) = 5{,}325 - 2{,}125^2 = 0{,}809375$$

SVAR: Variansen av X är 0,80938

d) $V(4X-5) = 4^2 \cdot V(X) - V(5)$

$$= 4^2 \cdot 0{,}80938 - 0 = 12{,}95$$

SVAR: $V(4X-5) = 12{,}95$

4

SU, STATISTIK

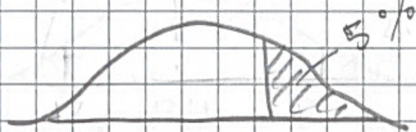
Skrivsal: Uggleviken Anonymkod: 0013-OMG Blad nr: 2

Uppgift 2 Y = diameter som cylindrarna får efter att ha behandlats i svarven

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y \sim N(12{,}4;\ \sigma^2)$$

a) $P(12 < Y < 12{,}8) = 0{,}95$

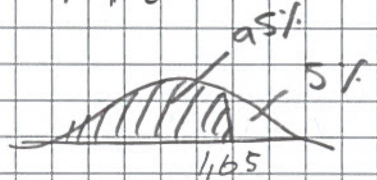
$1 - P(12 < Y < 12{,}8) = 0{,}05$ ← s.t.h. utanför intervallet



$$P(12 < Y < 12{,}8) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{12 - 12{,}4}{\sigma} < Z < \frac{12{,}8 - 12{,}4}{\sigma}\right)\ 0{,}95$$

$$P\left(\frac{-0{,}4}{\sigma} < Z < \underbrace{\frac{0{,}4}{\sigma}}_{1{,}65}\right) = 0{,}95$$



$$\frac{0{,}4}{\sigma} = \cancel{1{,}65}\ 1{,}96 \Rightarrow \sigma = 0{,}2424$$

C

SVAR: σ får högst vara 0,2424 för att högst 5% av cylindrarna får ha en diameter utanför intervallet (12; 12,8)

b) $\sigma = 0,2424 \approx 0,24$

cylindrarnas diameter efter svarven $= Y = \begin{cases} A, & y < 12,2 & \text{smal} \\ B, & 12,2 < y < 12,5 & \text{mellan} \\ C, & y > 12,5 & \text{tjock} \end{cases}$

A $P(Y < 12,2) = P\left(Z < \frac{12,2 - 12,4}{0,2424}\right)$

$= P(Z < -0,8251) \approx P(Z < -0,83)$

$1 - (\Phi 0,83) = 1 - 0,7967 = \boxed{0,2033}$

B $P(12,2 < Y < 12,5) = P\left(\frac{12,2 - 12,4}{0,24} < Z < \frac{12,5 - 12,4}{0,24}\right)$

$= P(-0,83 < Z < 0,42) = F(0,42) - F(-0,83)$

$\Phi 0,42 - (1 - \Phi 0,83) = 0,6628 - 1 + 0,7967$

$= \boxed{0,4595}$

följdfel!

C $P(Y > 12,5) = P\left(Z > \frac{12,5 - 12,4}{0,24}\right)$

$= P(Z > 0,42) = 1 - \Phi 0,42 = 1 - 0,6628$

$= 0,3372$

SVAR: $P(Y < 12,2) = 0,2033$ ← klass A

$P(12,2 < Y < 12,5) = 0,4595$ ← klass B

$P(Y > 12,5) = 0,3372$ ← klass C

6

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevik Anonymkod: 0013-OMG Blad nr: 3

c) $n = 6$

Kategori A $y_A = 2 - y_C$ $P(y_A) = 0{,}2033$

Kategori B $y_B = 4$ $P(y_B) = 0{,}4595$

Kategori C $y_C = 2 - y_A$ $P(y_C) = 0{,}3372$

$P(y_A + y_C) = 1 - P(y_B) = 1 - 0{,}4595 = 0{,}5405$

$P(y_B = 4, \; y_A + y_C = 2)$ där $n = 6$

$$= \frac{6!}{4!\,2!} 0{,}4595^4 \, 0{,}5405^2 = 0{,}1954$$

följdfel

SVAR: sannolikheten att välja 4 av klass B och 2 från klass A och/eller C är 0,1954

7

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vegalevik Anonymkod: 0013-DMG Blad nr: 4

Uppgift 3

Y - antalet äpplen i urvalet som är av oacceptabel fasthet

$n=4$

Antaganden: Högst 10% av varje parti som säljs är av oacceptabel kvalitet, villet är ett parti där man dragit ett urval om 4 äpplen, och där fler än 1 äpple varit av oacceptabel kvalitet (fasthet).

a) Y = antalet i urvalet med den ena av två egenskaper

Y = antalet (äpplen) i urvalet med oacceptabel kvalitet

$$Y \sim Hyp(N, n, r)$$

$N=25$

$r=2$

$n=4$

$$Y \sim Hyp(25, 4, 2)$$

$$E(Y) = \frac{nr}{N} = \frac{4 \cdot 2}{25} = 0{,}32$$

4

SVAR: Väntevärdet för Y, antalet i urvalet med oacceptabel kvalitet = 0,32, alltså ca 1/3 äpple.

b)

$n=4 \quad r=2 \quad N=25$

$P(\text{parti godkänns}) = P(0) + P(1) = P(Y \leq 1)$

$$p(0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{25-2}{4-0}}{\binom{25}{4}} = \frac{1 \cdot \binom{23}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{8855}{12650} = 0{,}7$$

$$p(1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{25-2}{4-1}}{\binom{25}{4}} = \frac{2 \cdot \binom{23}{3}}{\binom{25}{4}} = \frac{3542}{12650} = 0{,}28$$

$p(0) + p(1) = 0{,}98 = P(\text{Godkänns}) = P(Y \leq 1)$

8

SVAR: Sth att partiet godkänns är 0,98

c) $$P(Y=0 \mid Y \leq 1) = \frac{P(Y=0 \cap Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)}$$

$P(Y \leq 1) = 0{,}98$ enligt b)

$Y =$ antalet i urvalet med oacceptabel kvalitet

$P(Y=0 \cap Y \leq 1) = P(Y=0) = 0{,}7$ enligt b)

$$\Rightarrow \quad P(Y=0 \mid Y \leq 1) = \frac{0{,}7}{0{,}98} = 0{,}7143$$

enda gången båda dessa gäller är då $(Y=0)$.

8

SVAR: Sannolikheten att alla äpplen är acceptabla (alltså att $Y=0$), givet att partiet godkänns (att $Y \leq 1$) är 0,7143.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Upplevik Anonymkod: 0013-DWG Blad nr: 5

Uppgift 4

Y = Livslängd för en komponent

$\beta = 200$ = väntvärde

$Y \sim Exp(\beta) \Rightarrow Y \sim exp(200)$

a) $P(Y > 200)$

där $0 < y < \infty$

$$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} = \frac{1}{200} e^{-y/200}, \quad 0 < y < \infty$$

$$P(Y > 200) = \int_{200}^{\infty} \frac{1}{200} e^{-y/200} \, dy$$

$$= \left[-e^{-y/200} \right]_{200}^{\infty} = \underbrace{0}_{e \to 0 \text{ då } y \to \infty} - \left(-e^{-\frac{200}{200}} \right) = e^{-1} = 0{,}3679$$

SVAR: $P(Y > 200) = 0{,}3679$

Sannolikheten att en komponent håller minst 200 timmar är 0,3679

6

b) $f(y) = \frac{1}{200} e^{-y/200}$ $\quad n=7$

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{200} e^{-y/200} \, dy = \left[-e^{-y/200} \right]_0^y$$

$$= -e^{-y/200} - \left(-e^{-0/200}\right) = -e^{-y/200} + e^{0}$$

$$= 1 - e^{-y/200}, \quad \text{då} \quad 0 < y < \infty$$

Som ~~fil~~ tid av att hela produkten slutar fungera när den första komponenten går sönder, alltså när komponenten med kortast verkningstid går sönder, vill jag hitta $f_{Y(1)}(y)$.

$$f_{Y(1)}(y) = 7\left[1 - \left(1 - e^{-y/200}\right)\right]^6 \cdot \frac{1}{200} e^{-y/200}$$

$$7\left(\cancel{1-}\left(e^{-y/200}\right)^6\right) \cdot \frac{1}{200} e^{-y/200}$$

$$7\left(\cancel{1-} e^{-\frac{6y}{200}}\right) \cdot \frac{1}{200} e^{-y/200}$$

$$7(0{,}0296) \cdot \frac{1}{200} e^{-y/200} =$$

$$0{,}20688 \cdot \frac{1}{200} e^{-y/200} =$$

$$0{,}001\, e^{-y/200} = \frac{1}{1000} e^{-y/200}$$

3

SVAR: $f_{Y(1)}(y) = \frac{1}{1000} e^{-y/200}$, alltså täthetsfunktionen för produktens livslängd.

SU, STATISTIK [illegible]

Skrivsal: [illegible] Anonymkod: 0013-DMG Blad nr: 6

4.

c) Y= livslängden för en produkt av sju komponenter

P(Y > 200)

$$f(y) = \frac{1}{1000} e^{-y/200}, \quad 0 < y < \infty$$

$$P(Y>200) = \int_{200}^{\infty} \frac{1}{1000} e^{-y/200} \, dy$$ Fel, ideal

$$= \frac{1}{1000} \int_{200}^{\infty} e^{-y/200} \, dy = \frac{1}{1000} \left[\frac{-e^{-y/200}}{1/200} \right]_{200}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1000} \left[-200e^{-y/200} \right]_{200}^{\infty} = \frac{1}{1000} \left(0 - \left(-200e^{-200/200} \right) \right)$$

funktionen → 0 då y → ∞

$$\frac{1}{1000} \left[200 e^{-1} \right] = 0,074$$ ✓

4

SVAR: Sannolikheten att produktens livslängd är längre än 200 timmar är 0,074

d) ~~Svar:~~ Skillnaderna mellan sannolikheterna

uträknade i a) och c) är att

i a) räknade jag ut sannolikheten

av att en komponent håller minst 200

timmar, medan i c) räknade

jag ut sannolikheten av att hela

produkten bestående av 7 komponenter

håller mer än 200 timmar.

2

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uppskrivet   Anonymkod: 0013-OMG   Blad nr: 7

Uppgift 5

X - beloppet i tusentals kronor som en vuxen person spenderar på mediciner varje år

Y - beloppet i tusentals kronor som en vuxen person spenderar på vetrauvrang-besök

$$f(x,y) = xe^{-x(1+y)}, \quad x>0, \; y>0$$

a) Bestäm $f(y)$ och $f(x)$

partiell integration

$$f(y) = \int_0^\infty \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^{-x(1+y)}}_{f(x)} \, dx$$

$F(x) = -e^{-x(1+y)}$

$f(x) = e^{-x(1+y)}$

$g(x) = x$

$g'(x) = 1$

$$\left[-\frac{e^{-x(1+y)}}{1+y} \cdot x \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty -\frac{e^{-x(1+y)}}{1+y} \cdot 1 \, dx$$

$$0 - \left(-e^{-0(1+y)} \cdot 0\right) + \int_0^\infty \frac{e^{-x(1+y)}}{1+y} \, dx$$

funktionen → 0 då x → ∞

$$= \int_0^\infty e^{-x(1+y)} \, dx = \left[-e^{-x(1+y)} \right]_{x=0}^{x=\infty}$$

→

$$= \underbrace{0}_{\substack{\text{funktionen} \to 0 \\ \text{då } x \to \infty}} - \left(-e^{-0(1+y)}\right) = e^{0} = 1$$

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^\infty x e^{-x(1+y)}\,dy = \left[-e^{-x(1+y)}\right]_{y=0}^{y=\infty}$$

$$= \underbrace{0}_{\substack{\text{funktionen} \to 0 \\ \text{då } y \to \infty}} - \left(-e^{-x(1+0)}\right) = e^{-x} = f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$ K

5

<u>SVAR:</u> $f(y) = 1, \quad y > 0$ ✓

$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$ K

b) Vid oberoende så ska $f(y) \cdot f(x) = f(x,y)$,

Bevis 1) alltså $1 \cdot e^{-x} = x e^{-x(1+y)} \Rightarrow$ vilket inte stämmer $\Rightarrow 1 \cdot e^{-x} \neq x e^{-x(1+y)}$, vilket

Bevis 2) betyder att x och y är beroende. 2

Ett annat sätt att visa på beroende mellan x och y är att det inte går att separera $f(x,y)$ i en funktion av bara x och en funktion av bara y:

→

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uppsala   Anonymkod: 0013-DMG   Blad nr: 8

$$f(x,y) = xe^{-x(1+y)} = xe^{-x}e^{-xy}$$

vilket inte är två funktioner där den ena bara beror av x och den andra bara av y.

Bevis 3) $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)} = \dfrac{xe^{-x(1+y)}}{1} = xe^{-x(1+y)}$,

ett tredje sätt som visar på beroende, för vid oberoende hade $f(x \mid y) = f(x)$

vilket inte är fallet här.

SVAR: X och Y är beroende enligt 3 redovisade bevis för beroende.

c)

$$U = 2X$$

$$f(x) = e^{-x} \qquad x > 1$$

<u>Transformationsmetoden</u>

$$u = 2x \Rightarrow \frac{u}{2} = x \qquad h^{-1}(u) = \frac{u}{2}$$

$$\frac{d\,h^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{2}$$

$$f_U(u) = e^{-u/2} \cdot \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} e^{-u/2}$$

där $U \sim \exp(\beta)$ vilket gör att:

$$U \sim \exp(2), \quad 0 < u < \infty$$

svar: $f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-u/2}, & 0 < u < \infty \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

K

$U \sim \exp(2) \Rightarrow U \sim \exp(\beta)$ vilket gör

att U är exponentiell fördelad med

parametern $\beta = 2$.

7

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uppsala Anonymkod: 6013-OMG Blad nr: 9

d) $P(2X > 5000)$

X = Beloppet i tusental kr som en person spenderar på mediciner per år

$$\Rightarrow \quad P(2X > 5) = P(X > 2{,}5)$$

$$f(x) = e^{-x}$$

$$P(X > 2{,}5) = \int_{2{,}5}^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{x=2{,}5}^{x=\infty}$$

$$= \underbrace{0}_{\text{funktionen} \to 0 \text{ då } x \to \infty} - \left(-e^{-2{,}5}\right) = e^{-2{,}5} = 0{,}0821$$

4

SVAR: Sannolikheten att 2 enskilda personer spenderar mer än 5000 kr på mediciner varje år är 0,0821

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 30/9-2019

Sal: Ugglevikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: 0050-OCY

☑ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					7
Lär.ant. 20	20	20	15	12					

MW

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
87+3=90	B	JF

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0050-OCY Blad nr: 1

Uppgift 1.

$$F(x) = \frac{x^3 - k}{40}, \quad x = 1, 2, 3$$
$$0, \text{ annars}$$

a) Eftersom maxvärdet som X kan anta är fördelningsfunktionen av $(x=3) = 1 = P(X \leq 3)$

$$F(x=3) = 1 = \frac{3^3 - k}{40} \rightarrow 1 \cdot 40 = 3^3 - k$$
$$\rightarrow 40 + k = 3^3 \rightarrow 3^3 - 40 = k \rightarrow k = 27 - 40 = \underline{\underline{-13}}$$

Svar: Se uträkning ovan. K är inte lika med 13, utan (-13)! Bra!

2

b) $P(x=1) = P(X \leq 1) = F_x(1) = \frac{1^3 - (-13)}{40} = \frac{1+13}{40} = \underline{0{,}35}$

$P(x=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \frac{2^3 - (-13)}{40} - 0{,}35 = \frac{8+13}{40} - 0{,}35 \rightarrow$
$= 0{,}525 - 0{,}35 = \underline{0{,}175}$

$P(x=3) = P(x \leq 3) - P(x \leq 2) = 1 - 0{,}525 = \underline{0{,}475}$.

Svar: sannolikhetsfördelningen för X är som följer:

X	P(x)
1	0,350
2	0,175
3	0,475
Σ	1.000

7

c)

X	p(x)	p(x)·x	x^2	$x^2 \cdot p(x)$
1	0,350	0,350	1	0,350
2	0,175	0,350	4	0,7
3	0,475	1,425	9	4,275
Σ	1	2,125 E(x)		5,325

$$V(X) = \sum_x x^2 p(x) - (E(x))^2 = 5{,}325 - (2{,}125)^2 = \underline{0{,}809375}$$

7

Svar: Variansen för X är 0,81.

d)

x	p(u) p(x)	u=4x-5	u·p(u)	u^2	$u^2 \cdot p(u)$
1	0,35	-1	-0,35	1	0,35
2	0,175	3	0,525	9	1,575
3	0,475	7	3,325	49	23,275
Σ			3,5 = E(u)		25,2

$$V(u) = \sum_u u^2 p(u) - (E(u))^2 = 25{,}2 - (3{,}5)^2 = \underline{12{,}95}$$

Svar: Variansen för u = 4x-5 är 12,95.

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0050-OCY Blad nr: 2

Uppgift 2. Y = cylinderdiameter

$Y \sim N(\mu = 12{,}4, \sigma)$

a)

$P(Y<12) + P(Y>12{,}8) \leq 0{,}05$

Eftersom fördelningen är symmetrisk kring μ och $|12 - 12{,}4| = |12{,}8 - 12{,}4|$ så är

$P(Y<12) + P(Y>12{,}8) = 2 \cdot P(Y<12)$.

$2 \cdot P(Y<12) = 2 \cdot P\left(Z < \frac{12-12{,}4}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{-0{,}4}{\sigma}\right)$

$\frac{2\,\Phi(-0{,}4)}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$. Enligt tabell är $0{,}025 = \Phi(-1{,}96)$.

$\rightarrow \frac{0{,}4}{\sigma} = 1{,}96 \rightarrow 1{,}96 \cdot \sigma = 0{,}4 \rightarrow \frac{0{,}4}{1{,}96} = \sigma = 0{,}204$

7

Svar: Standardavvikelsen får vara högst 0,204 längdenhet

→

b) $\sigma = 0{,}2$

$\underline{P(A)} = P(Y < 12{,}2) = P\left(Z < \frac{12{,}2 - 12{,}4}{0{,}2}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$

$\{\text{enligt tabell}\} = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}$

$\underline{P(B)} = P(Y < 12{,}5) - P(Y < 12{,}2).\quad P\left(Z < \frac{12{,}5 - 12{,}4}{0{,}2}\right) = P(Z < 0{,}5)$

$= \Phi(0{,}5) = \{\text{enligt tabell}\} = 0{,}6915$

$\rightarrow P(B) = 0{,}6915 - 0{,}1587 = \underline{0{,}5328}$

$\underline{P(C)} = P(Y > 12{,}5) = 1 - P(Y < 12{,}5) = 1 - 0{,}6915 = \underline{0{,}3085}$

Kontroll: $P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}1587 + 0{,}5328 + 0{,}3085 = \underline{1}$

Svar: Sannolikheten att en slumpmässigt vald cylinder klassas som någon av de angivna klasserna är som följer:

$P(A) = 0{,}1587$, $P(B) = 0{,}5328$, $P(C) = 0{,}3085$.

6

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG   Anonymkod: 0050-OCY   Blad nr: 3

forts. uppgift 2.

c) Multinomialfördelning

$n=6$

Sökt: $P(0A, 4B, 2C) + P(1A, 4B, 1C) + P(2A, 4B, 0C)$

- $P(0A, 4B, 2C) = \frac{6!}{0!4!2!} \cdot 0{,}1587^0 \cdot 0{,}5328^4 \cdot 0{,}3085^2$

$= 15 \cdot 1 \cdot 0{,}0806 \cdot 0{,}0952 = \underline{0{,}115}$

- $P(1A, 4B, 1C) = \frac{6!}{1!4!1!} \cdot 0{,}1587^1 \cdot 0{,}5328^4 \cdot 0{,}3085^1$

$= 30 \cdot 0{,}1587 \cdot 0{,}0806 \cdot 0{,}3085 = \underline{0{,}118}$

- $P(2A, 4B, 0C) = \frac{6!}{2!4!0!} \cdot 0{,}1587^2 \cdot 0{,}5328^4 \cdot 0{,}3085^0$

$= 15 \cdot 0{,}0252 \cdot 0{,}0806 \cdot 1 = \underline{0{,}03}$

$P(0A, 4B, 2C) + P(1A, 4B, 1C) + P(2A, 4B, 0C) = 0{,}115 + 0{,}118 + 0{,}03$

$= \underline{0{,}263}$

7

Svar: sannolikheten att det är 4B är $\underline{0{,}263}$.

kontroll: $Y \sim bin(p = 0{,}5328, n = 6)$ $q = 1 - 0{,}5328 = 0{,}4662$

$P(Y=4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}5328^4 \cdot 0{,}4662^2 =$

$15 \cdot 0{,}0806 \cdot 0{,}2173 = \underline{0{,}263}$

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0050-OCY Blad nr: 4

Uppgift 3.

a) Hypergeometrisk fördelning

Y = antal oacceptabla äpplen i ett urval av 4 ur en population av 25 där 2 äpplen är oacceptabla.

$Y \sim HypGeo(N=25, n=4, r=2)$

$E(Y) = \frac{n \cdot r}{N} = \frac{4 \cdot 2}{25} = \frac{8}{25} = \underline{0{,}32}$

4

Svar: Väntevärdet för antal oacceptabla äpplen i urvalet är $\underline{0{,}32}$.

b) $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$.

$P(Y=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{25-2}{4-0}}{\binom{25}{4}} = \frac{1 \cdot 8855}{12650} = \underline{0{,}7}$

$P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{25-2}{4-1}}{\binom{25}{4}} = \frac{2 \cdot 1771}{12650} = \frac{3542}{12650} = \underline{0{,}28}$

$P(Y \leq 1) = 0{,}7 + 0{,}28 = \underline{0{,}98}$

Svar: Sannolikheten att partiet godkänns är $\underline{0{,}98}$.

8

→

Forts. uppgift 3.

c)

$$P(Y=0 \mid Y\leq 1) = \frac{P(Y=0 \cap Y\leq 1)}{P(Y\leq 1)} = \frac{P(Y=0)}{P(Y\leq 1)} = \frac{0{,}7}{0{,}98}$$

$$= 0{,}714$$

Svar: Sannolikheten att alla äpplen i urvalet är acceptabla givet att partiet godkänns är 0,714.

8

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0050-OCY Blad nr: 5

Uppgift 4. Y = komponentens livslängd

$Y \sim Exp(\beta = 200)$

a) $P(Y<200) = \int_0^{200} \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy = \left[-e^{-y/\beta}\right]_0^{200} = (-e^{-1}) - (-e^{0}) =$

$= (-0{,}3679) - (-1) = -0{,}3679 + 1 = 0{,}6321$

$P(Y \geq 200) = 1 - 0{,}6321 = \underline{0{,}3679}$

Alt: $P(Y>200) = \int_{200}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy = \left[\underbrace{-e^{-y/\beta}}_{\to 0 \text{ när } Y \to \infty}\right]_{200}^{\infty} = 0 - (-0{,}3679)$

$= \underline{0{,}3679}$

6

Svar: Sannolikheten att en komponent håller minst 200 timmar är 0,3679.

forts. uppgift 4.

b) Ordningsvärden. Vi vill hitta fördelningen av den första av 6 komponenter som går sönder.

$$f_{Y_{(1)}}(y) = 7 \cdot \left[1-\left(-e^{-y/\beta}\right)\right]^{6} \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot e^{-y/\beta}\right)$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y/200}$$

$$F_{Y_{(1)}}(y) = 1 - \left(e^{-y/\beta}\right)^{7}$$

$$f_{Y_{(1)}}(y) = \frac{d}{dy}\left(-e^{-y/\beta}\right)^{7} = 7\left(-e^{-y/\beta}\right)^{6} \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot e^{-y/\beta}\right)$$

Svar: Täthetsfunktionen för produktens livslängd är: $7\left(-e^{-y/200}\right)^{6} \cdot \left(\frac{1}{200} \cdot e^{-y/\beta}\right)$, $y > 0$

0, annars

4

$$\left[\frac{d}{dy}\, 1-\left(1-\left(-e^{-y/\beta}\right)\right)^{7} = -7\left(1+e^{-y/\beta}\right)^{6} \cdot \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}\right]$$

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0050-OCY Blad nr: 6

forts. uppgift 4. $F(y) = \int \frac{1}{\beta} e^{y/\beta} dy = -e^{-y/\beta}$

c) $F_{Y_{(1)}}(y) = 1-(1-(-e^{-y/\beta}))^7, \quad y>0$

Y = produktens livslängd. 0, annars.

$P(Y<200) = F_{Y_{(1)}}(200) = (1-(1-(-e^{-y/\beta}))^7 = 1-0{,}04032 = 0{,}9597$

$P(Y \geq 200) = 1-0{,}9597 = 0{,}0403$ ✓

3

Svar: Sannolikheten att produkten lever längre än 200 timmar är 0,04, eller 4%.

d) Sannolikheten i a) avser en enskild komponent, medan sannolikheten i c) avser en produkt som är beroende av 7 st identiska komponenter. Komponenternas livslängd har en varians som gör att vi kommer få en spridning runt väntevärdet. Eftersom vi har 7 komponenter så kommer (om antagandet om fördelningen stämmer) minst en komponent ha en livslängd som är kortare än väntevärdet

→

Uppgift 4 d) forts.

→ Sannolikheten att en komponent har en livslängd över genomsnittet* är högre än att alla 7 i ett urval har det.

* eller något annat sökt värde.

2

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0050-OCY Blad nr: 7

Uppgift 5

$$f(x,y) = \begin{cases} x e^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) marginalfördelningarna

$$f(x) = \int_0^\infty x \cdot e^{-x(1+y)}\,dy = x\left[-e^{-x(1+y)}\right]_{y=0}^{y=\infty} = 0 - (-e^{-x})$$

$\to 0$ när $y \to \infty$

$$= \underline{e^{-x}}$$

Visa alla steg!

$$\underline{f(y)} = \int_0^\infty x \cdot e^{-x(1+y)}\,dx = \left[\cdot \frac{1}{1+y} \cdot e^{-x(1+y)}\right]_{x=0}^{x=\infty}$$

$\to 0$ när $x \to \infty$

$$= 0 - \frac{1}{1+y} \cdot e^0 = \underline{\frac{1}{(1+y)^2}}$$

Visa alla steg!

Svar: $f(x) = e^{-x}$, $f(y) = \frac{1}{(1+y)^2}$

4

b) Nej, jag lyckas inte dela upp uttrycket i två separata funktioner.

$f(x=1, y=1) = 1\cdot e^{-1\cdot(1+1)} = e^{-2} = 0{,}353$

$f(x=1) = e^{-x} = e^{-1} = 0{,}3679$

$f(y=1) = \frac{1}{y} = 1$

Kan ändå vara oberoende även om det inte går att dela upp.

ej oberoende!

0

c) ? $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}$?

$U = 2X$, $u > 0$

Visa stegen!

$f_U(u) = e^{-u/2} \cdot \left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| = e^{-u/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-u/2}$

Visa hur du får dessa!

Svar: U har en exponentialfördelning med $\theta = 2$ och täthetsfunktion $\frac{1}{2}e^{-u/2}$.

6

d) $\cancel{2}\cdot\iint$

$\cancel{2}\int_{\cancel{2,5}\ 5}^{\infty} e^{-x}\,dx = 2\left[-e^{-x}\right]_{2,5}^{\infty} = 2(0-(-0{,}082)) = 0{,}164$

$\to 0$ när $x \to \infty$

Svar: sannolikheten är 0,164

2